

## Chapitre 4

# Dynamique de la déformation des continents

CHAPITRE 4. DYNAMIQUE DE LA DÉFORMATION DES CONTINENTS

# Table des matières

<b>4</b>	<b>Dynamique de la déformation des continents</b>	<b>1</b>
4.1	Croissance d'une chaîne de montagne très simplifiée . . . . .	4
4.2	Déformation d'une lithosphère continentale en une dimension . .	5
4.2.1	Équilibre hydrostatique . . . . .	5
4.2.2	Force de volume associée . . . . .	7
4.2.3	Exemple d'un continent en extension . . . . .	12
4.3	Une chaîne de montagnes simplifiée à l'équilibre dynamique . . .	12
4.3.1	Équilibre des forces . . . . .	13
4.3.2	Energie potentielle de gravité . . . . .	14
4.3.3	Énergie potentielle de gravité et géoïde . . . . .	15
4.3.4	Équilibre des forces en deux dimensions . . . . .	18
4.3.5	Approximation de plaque mince . . . . .	19
4.3.6	Introduction des contraintes déviatoriques . . . . .	19
4.3.7	Introduction de l'énergie potentielle de gravité . . . . .	20
4.3.8	Introduction des équations constitutives . . . . .	21
4.3.9	Résolution par différences finies . . . . .	22
4.3.10	Conditions aux limites . . . . .	23
4.3.11	Exemple de code 1D . . . . .	24
4.4	En trois dimensions . . . . .	24
4.5	Application à l'Asie . . . . .	28

L'objectif de ce chapitre est de "mettre en musique" les connaissances acquises dans les chapitres précédents en les appliquant à des exemples simplifiés de grandes structures géologiques. Nous allons étudier les conséquences dynamiques – en terme d'équilibre des forces – de la déformation de la lithosphère en commençant par des exemples simples, puis en les complexifiant progressivement. Le problème, dans tous les cas, est basé sur l'équilibre dynamique d'une lithosphère soumise à des forces aux limites et dont l'énergie potentielle de gravité varie latéralement.

## 4.1 Croissance d'une chaîne de montagne très simplifiée

(Voir Molnar P. and H. Lyon-Caen, Some simple physical aspects of the support, structure, and evolution of mountain belts, Geological Society of America Special Papers, vol. 218, 179-208, 1988.)

Imaginons une montagne ou un plateau se formant par épaissement crustal au lieu de convergence entre deux plaques et que la convergence soit à vitesse constante [Molnar et Lyon-Caen, 1988]. Considérons une croûte d'épaisseur initiale  $Z_c$  épaissie sur une largeur  $L$  par une montagne d'élévation  $H$  et compensée par une racine crustale d'épaisseur  $W$  suite à un raccourcissement  $\Delta x$ . L'énergie potentielle de gravité générée par ce raccourcissement, par unité de longueur de la montagne ou du plateau, est :

$$\Delta E_p = \rho_c g H \left( \frac{H}{2} + Z_c + \frac{W}{2} \right) L \quad (4.1)$$

Imaginons que l'élévation de la montagne ou du plateau double. L'isostasie (équation ??) implique que l'épaisseur de la racine crustale double aussi. L'énergie potentielle par unité de longueur devient :

$$\Delta E_p(2H) = 2 \rho_c g H L (H + Z_c + W) \quad (4.2)$$

Imaginons à l'inverse que la largeur de la montagne/plateau double, en restant à la même élévation. L'énergie potentielle par unité de longueur devient alors :

$$\Delta E_p(2L) = 2 \rho_c g H L \left( \frac{H}{2} + Z_c + \frac{W}{2} \right) \quad (4.3)$$

La différence d'énergie potentielle entre ces deux scénarios est :

$$\begin{aligned} \delta E_p &= 2 \rho_c g H L \left( H - \frac{H}{2} + W - \frac{W}{2} \right) \\ &= \rho_c g H L (H + W) \\ &= \rho_c g H \rho_c g H^2 L + \rho_c g H L W \end{aligned} \quad (4.4)$$

La condition d'isostasie permet de remplacer  $W$  par  $H\rho_c/\Delta\rho$ , on trouve donc :

$$\delta E_p = \rho_c g L \frac{1 + \rho_c}{\Delta\rho} H^2 \quad (4.5)$$

### 4.1. CROISSANCE D'UNE CHAÎNE DE MONTAGNE TRÈS SIMPLIFIÉE4



On observe donc que le travail à mettre en œuvre est supérieur dans le premier cas que dans le second et qu'il augmente rapidement en fonction de  $H$  car  $\delta E_p$  est fonction du carré de  $H$ . De fait, le travail nécessaire pour augmenter l'élévation d'une montagne augmente vite quand l'élévation augmente. De fait, pour une quantité d'énergie donnée fournie par le mouvement des plaques, l'élévation d'une montagne et l'épaisseur de sa racine crustale ont une valeur limite. Les montagnes ne peuvent pas croître indéfiniment.

On constate donc qu'il est plus économique énergétiquement de propager la montagne/plateau latéralement que de la faire croître verticalement. Cela est de plus en plus vrai à mesure que la montagne/plateau s'élève. En d'autres termes, cela consomme plus d'énergie d'élever une montagne/plateau déjà haute que d'élever son avant-pays. On peut donc attendre que les chevauchements qui permettent l'épaississement crustal cessent d'être actifs à mesure qu'ils doivent élever des montagnes de plus en plus hautes mais, en contrepartie, que de nouveaux chevauchements apparaissent sous les régions de faible élévation de l'avant-pays.

Noter que ces raisonnements ne tiennent pas compte des variations latérales de la résistance mécanique de la lithosphère.

Et si on autorisait à la convergence de ralentir ?

## 4.2 Déformation d'une lithosphère continentale en une dimension

Nous étudions ici un cas simplifié où la déformation de la lithosphère s'effectue uniquement selon la direction verticale. Croûte et manteau lithosphérique peuvent s'épaissir ou s'amincir de manière indépendante. Par exemple, la croûte peut s'épaissir dans un orogène en conséquence de l'empilement tectonique des croûtes de deux blocs en collision. Dans le même temps, le manteau lithosphérique peut s'amincir sous l'effet d'advection de chaleur à la base de la lithosphère. Il est donc utile de découpler la croûte du manteau lithosphérique et d'étudier comment leurs variations d'épaisseur relative influent sur les forces de volume.

### 4.2.1 Équilibre hydrostatique

Nous cherchons maintenant à comparer l'élévation de deux colonnes de lithosphère continentale, l'une dite "normale", ou non-déformée, d'épaisseur totale  $Z_l$  comprenant une croûte d'épaisseur  $Z_c$ , l'autre déformée dans la direction verticale et d'épaisseur totale  $Z_{Ldef}$  comprenant une croûte d'épaisseur  $Z_{Cdef}$ . Cette déformation est décrite par deux scalaires  $f_c$  et  $f_l$  qui donnent, respectivement, l'épaississement de la croûte et de l'ensemble de la lithosphère :

$$f_c = \frac{Z_{Cdef}}{Z_c} \quad f_l = \frac{Z_{Ldef}}{Z_l} \quad (4.6)$$

La figure schématise cette structure et indique l'axe vertical, la différence d'élévation entre les deux colonnes  $\Delta H$ , les épaisseurs de lithosphère  $Z_l$  et de croûte

$Z_c$ , etc. La condition d'équilibre isostatique permet de déduire l'élévation  $H_{def}$  de la colonne déformée par rapport à une colonne de référence :

$$H_{def} = \delta f_c Z_c - \xi f_l Z_l \quad (4.7)$$

avec :

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{\rho_m - \rho_c}{\rho_m} \\ \xi &= \alpha \frac{T_l - T_s}{2} \end{aligned} \quad (4.8)$$

De fait, la différence d'élévation  $\Delta H$  entre les colonnes de lithosphère continentale déformée et non déformée est donnée par :

$$\begin{aligned} \Delta H &= (\delta Z_c - \xi Z_l) - (\delta f_c Z_c - \xi f_l Z_l) \\ \Delta H &= \delta Z_c (f_c - 1) - \xi Z_l (f_l - 1) \end{aligned} \quad (4.9)$$

La figure 4.1 représente  $\Delta H$  dans un diagramme avec en abscisse  $f_c$  et en ordonnée  $f_l$ , avec  $0 \leq f_c \leq 2.5$  et  $0 \leq f_l \leq 2.5$ . Il existe dans ce diagramme un domaine où les solutions pour  $\Delta H$  sont impossibles : celui lequel la croûte de la lithosphère déformée serait plus épaisse que l'ensemble de la lithosphère, soit  $f_c Z_c > f_l Z_l$ . La pente  $\psi$  de la droite qui limite ce domaine est :

$$\psi = Z_c / Z_l \quad (4.10)$$

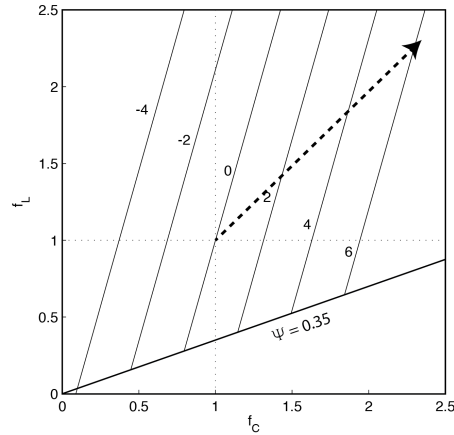


FIGURE 4.1 – Représentation des droites d'iso- $\Delta H$  (en km) dans un diagramme  $[f_c, f_l]$  pour  $\psi = Z_c / Z_l = 0.35$ . La flèche en tiretés indique le chemin suivi par une lithosphère qui s'épaissit de manière homogène à partir de conditions initiales non déformées.

La figure 4.1 montre les droites qui définissent  $\Delta H = -2, 0, 2, 4$ . On observe sur cette figure qu'un doublement de l'épaisseur crustale sans changement de l'épaisseur de la lithosphère induit un relief positif de l'ordre de 6 km, un exemple proche du cas du Tibet où l'épaississement de la croûte est causé par son redoublement tectonique. On observe aussi qu'une augmentation de l'épaisseur de la

#### 4.2. DÉFORMATION D'UNE LITHOSPHÈRE CONTINENTALE EN UNE6 DIMENSION

lithosphère sans changement de l'épaisseur de la croûte cause une subsidence. Puisque la base de la lithosphère est définie comme un isotherme (1200 °C, un lithosphère qui s'épaissit devient en moyenne plus froide, donc plus dense. à la limite, une colonne de lithosphère peut se déformer sans changement d'élévation si  $f_l$  augment suffisamment rapidement par rapport à  $f_c$ , de telle façon que le chemin suivi lors de la déformation corresponde à  $\Delta H = 0$ . Cela est dû au fait que la flottabilité induite par la variation de l'épaisseur crustale est compensée par celle induite par l'expansion thermique, qui agit en sens opposé.

L'élévation atteinte par une colonne de lithosphère qui se déforme dépend de l'effet combiné de l'épaississement ou amincissement de la croûte qui, pour un lithosphère d'épaisseur donnée, induit une flottabilité respectivement positive ( $f_c > 1$ ) ou négative ( $f_c < 1$ ) et de l'expansion thermique, qui induit une flottabilité négative quand la lithosphère se refroidit (donc s'épaissit,  $f_l > 1$ ) et positive quand elle se réchauffe (donc s'amincit,  $f_l < 1$ ).

On peut tracer sur la figure 4.1 le chemin suivi par une lithosphère qui s'épaissit de manière homogène (c'est-à-dire telle que le rapport des épaisseurs croûte / lithosphère reste constant,  $fl = f_c$ ). Dans ce cas, l'élévation de la colonne déformée change relativement peu car l'épaississement de la lithosphère qui induit une flottabilité négative est compensé par l'épaississement de la croûte qui induit une flottabilité positive. Par contre, dans le cas où l'épaisseur lithosphérique ne varie pas ( $f_l = 1$ ), l'élévation augmente plus rapidement car la flottabilité positive induite par l'épaississement de la croûte n'est pas compensée par la flottabilité négative due à l'épaississement de la lithosphère.

#### 4.2.2 Force de volume associée

Voir :

- Sandiford M. and R. Powell, Some isostatic and thermal consequences of the vertical strain geometry in convergent orogens, *Earth and Planetary Science Letters*, vol. 98, no. 2, 154-165, 1990.
- Turcotte D. L., Mechanisms of crustal deformation Thirty-sixth William Smith Lecture, *Journal of the Geological Society*, vol. 140, no. 5, pp. 701-724, 1983.
- Fleitout L. and C. Froidevaux, Tectonic stresses in the lithosphere, *Tectonics*, vol. 2, no. 3, 315-324, 1983.

On cherche maintenant à déterminer la force par unité de longueur  $F_b$  due à la différence d'énergie potentielle de gravité  $\Delta E_p$  entre deux colonnes adjacentes non-déformée (A) et déformée (B).

#### Effet du matériau seul

Dans un premier temps on s'intéresse uniquement à la contribution du matériau sur les variations de densité. La croûte et le manteau ont donc une densité

constante  $\rho_c$  et  $\rho_m$ , respectivement. Cette force est donnée par :

$$\begin{aligned}\Delta E_P = F_b &= \int_0^{Z_l} \sigma_{zz}^A(z) dz - \int_{Z_l(1-f_l)}^{Z_l} \sigma_{zz}^B(z) dz \\ &= \int_0^{Z_l} \int_0^z \rho_A(z') dz' dz - \int_0^{f_l Z_l} \int_0^z \rho_A(z') dz' dz\end{aligned}\quad (4.11)$$

où  $\sigma_{zz}(z)$  est la contrainte verticale et  $\rho_A(z)$  et  $\rho_B(z)$  les densités des colonnes A et B.

La figure 4.2 représente graphiquement (1) les contraintes verticales  $\sigma_{zz}(z)$  pour les colonnes A et B, avec la différence d'élévation entre les deux colonnes  $\Delta H$  et l'épaisseur de la racine crustale sous la colonne déformée  $W$ , et (2) la différence des contraintes verticales  $\Delta\sigma_{zz}(z)$  entre les deux colonnes. Ce dernier graphique permet de déterminer simplement l'expression de  $F_b$ , qui est simplement l'aire en grisé sur la figure, somme du triangle (1), du rectangle (2) et du triangle (3) :

$$\begin{aligned}F_b &= \frac{1}{2} \rho_c g \Delta H^2 + \rho_c g \Delta H Z_c + \frac{1}{2} \rho_c g \Delta H W \\ &= \rho_c g \Delta H \left[ \frac{\Delta H}{2} + Z_c + \frac{W}{2} \right]\end{aligned}\quad (4.12)$$

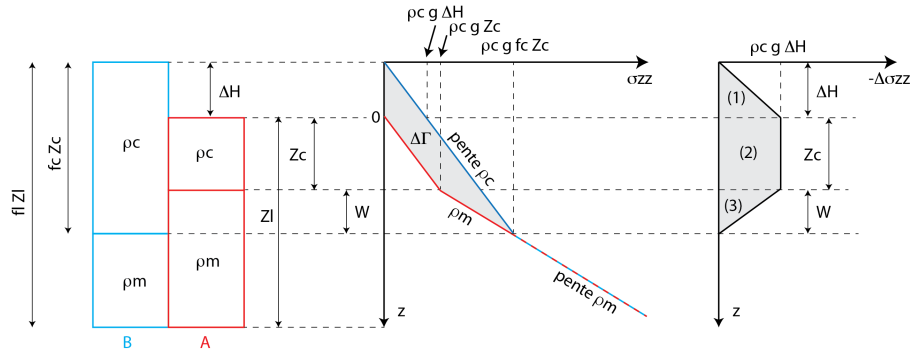


FIGURE 4.2 – Gauche : schéma du problème étudié. Centre : contraintes verticales pour les colonnes A (bleu) et B (rouge) en fonction de la profondeur. Le domaine en grisé représente la différence des intégrales de  $\sigma_{zz}(z)$  entre les deux colonnes, donc, par définition, la force horizontale de volume par unité de longueur  $F_b$ . Droite : différence d'énergie potentielle de gravité entre deux colonnes de lithosphère. Le domaine en grisé permet de calculer  $f_b$  aisément.

Calculons  $F_b$  pour les valeurs standard  $\Delta H = 3$  km,  $\rho_c = 2700$  kg/m<sup>3</sup>,  $\rho_m = 3300$  kg/m<sup>3</sup>,  $Z_c = 35$  km. L'isostasie impose que  $\Delta\rho W = \Delta H \rho_c$ , donc :

$$W = \frac{\Delta H \rho_c}{\Delta\rho} = \frac{3 \times 10^5 \times 2700}{600} = 13500 \text{ m}\quad (4.13)$$

Pour  $Z_c = 35$  km on trouve  $F_b = 3.5 \times 10^{12}$  N m<sup>-1</sup>.

## 4.2. DÉFORMATION D'UNE LITHOSPHÈRE CONTINENTALE EN UNES DIMENSION

Exprimons  $F_b$  en fonction de  $f_c$ . La géométrie du problème donne :

$$\begin{aligned} H + Z_c + W &= f_c Z_c \\ W &= Z_c (f_c - 1) - H \end{aligned} \quad (4.14)$$

On substitue cette expression dans  $F_b$  pour trouver :

$$\begin{aligned} F_b &= \rho_c g \Delta H \left[ \frac{\Delta H}{2} + Z_c + \frac{1}{2} Z_c (f_c - 1) - \frac{H}{2} \right] \\ &= \rho_c g \Delta H \left[ 1 - \frac{f_c - 1}{1} \right] \\ &= \rho_c g \Delta H \left[ \frac{1 - f_c}{2} \right] \end{aligned} \quad (4.15)$$

L'isostasie (matériau seul) implique que :

$$\begin{aligned} H \rho_c &= \Delta \rho W \\ H &= \frac{\Delta \rho}{\rho_c} (Z_c (f_c - 1) - H) \\ H &= \frac{\Delta \rho}{\Delta \rho + \rho_c} Z_c (f_c - 1) \end{aligned} \quad (4.16)$$

On substitue cette dernière expression dans  $F_b$  pour trouver :

$$F_b = \rho_m Z_c^2 g \delta \left( \frac{1 - \delta}{2} \right) (f_c^2 - 1) \quad (4.17)$$

### Effet de la température seule

Dans un deuxième temps on considère uniquement l'effet de la température sur la densité. On fait la même hypothèse que précédemment d'un géotherme linéaire en fonction de la profondeur entre la surface (où  $T = 0$ ) et  $Z_l$  (où  $T = T_l$ ). Les densités  $\rho$  en fonction de la profondeur  $z$  pour la colonne  $A$  et pour la colonne  $B$  sont données par :

$$\begin{aligned} \rho_A(z) &= \rho_m \alpha T_l - \frac{\rho_m \alpha T_l}{Z_l} z \\ \rho_B(z) &= \rho_m \alpha T_l - \frac{\rho_m \alpha T_l}{f_l Z_l} z \end{aligned} \quad (4.18)$$

La figure 4.3 montre côte-à-côte les deux colonnes de lithosphère que vous aller considérer pour ce problème. Pour la colonne déformée, on fait l'hypothèse que  $f_l > 0$ . On considère que l'élévation de la colonne de référence donne le zéro des ordonnées, positives vers le bas. La profondeur de compensation  $Z_k$  est indiquée, ainsi que la différence d'élévation entre les deux colonnes  $\Delta H$ , les épaisseurs des lithosphères de référence  $Z_l$  et déformée  $f_l Z_l$ . Les contraintes verticales  $\sigma_{zz}^A(z)$  et  $\sigma_{zz}^B(z)$  pour, respectivement, la colonne de référence et la colonne déformée,

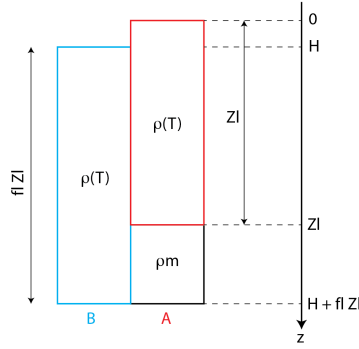


FIGURE 4.3 – Schéma du problème étudié dans le cas de l'isostasie uniquement thermique. Dans ce cas, la colonne de lithosphère épaissie est plus froide, donc plus dense que la colonne de référence. Sa flottabilité est donc négative.

sont :

$$\begin{aligned}
 \sigma_{zz}^A(z) &= \int_0^z \rho_A(z) dz + \int_{Z_l}^z \rho_m dz \\
 &= \rho_m \alpha T_l z - \frac{\rho_m \alpha T_l}{2 Z_l} z^2 + \rho_m (z - Z_l) \\
 \sigma_{zz}^B(z) &= \int_0^z \rho_B(z) dz \\
 &= \rho_m \alpha T_l z - \frac{\rho_m \alpha T_l}{2 f_l Z_l} z^2
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

L'énergie potentielle de gravité correspondant aux colonnes A et B est donc :

$$\begin{aligned}
 E_A &= \int_0^{Z_l} \left( \rho_m \alpha T_l z - \frac{\rho_m \alpha T_l}{2 Z_l} z^2 \right) dz + \int_{Z_l}^{H+f_l Z_l} \rho_m (z - Z_l) dz \\
 E_B &= \int_H^{H+f_l Z_l} \left( \rho_m \alpha T_l z - \frac{\rho_m \alpha T_l}{2 f_l Z_l} z^2 \right) dz
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

La force de volume (par unité de longueur) qui dérive de la différence d'énergie potentielle de gravité entre ces deux colonnes est donc :

$$E_A - E_B = F_b = \dots \tag{4.21}$$

L'isostasie thermique donne :

$$H = \xi Z_l (f_l - 1) \tag{4.22}$$

Que l'on substitue dans  $F_b$  pour trouver, après un peu d'algèbre :

$$\begin{aligned}
 \frac{F_b}{g \rho_m Z_c^2} &= \delta \left( \frac{1 - \delta}{2} \right) (f_c^2 - 1) \\
 &\quad - \frac{\alpha T_l}{6 \psi^2} [f_l^2 - 1 - 3\delta(f_c f_l - 1)] \\
 &\quad - \frac{\alpha^2 T_l^2}{8 \psi^2} (f_l^2 - 1)
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

## 4.2. DÉFORMATION D'UNE LITHOSPHERE CONTINENTALE EN UNE DIMENSION

### Effets conjoints du matériau et de la température

La somme des forces de volume horizontales dues au matériau et à la température est la force de volume horizontale totale (par unité de longueur) qui se développe suite à la déformation verticale d'une colonne de référence. La figure ci-dessous représente, dans l'espace  $[f_c, f_t]$ , des courbes d'iso-valeur de cette force par unité de longueur. Ces courbes d'iso- $F_b$  représentent la force de volume dans l'orogène uniquement induite par la contribution des variations latérales de densité dans la lithosphère, dont l'origine est le type de matériau (manteau versus croûte) et la température. Dans la réalité, comme nous le verrons dans la section ci-dessous, ces forces de volume sont équilibrées par des forces aux limites. C'est la résultante des deux qui détermine le régime de déformation.

En absence de forces appliquées aux limites, on observe que :

1. Un épaissement crustal et un amincissement lithosphérique induisent une force de volume positive (extension) dans l'orogène. Celle-ci se traduira par de l'extension (failles normales) si la force en question est supérieure à la résistance mécanique moyenne de la lithosphère.
2. À l'inverse, un amincissement crustal et un épaissement lithosphérique induisent une force de volume négative compressive. Celle-ci se traduira par de la compression (plis, failles inverses) si la force en question est supérieure à la résistance mécanique moyenne de la lithosphère.
3. Pour une lithosphère d'épaisseur constante, que peut-on dire du travail à mettre en œuvre pour déformer la lithosphère pour des valeurs croissantes de  $f_c$  ? Comparer en particulier le domaine en amincissement à celui en épaissement crustal.

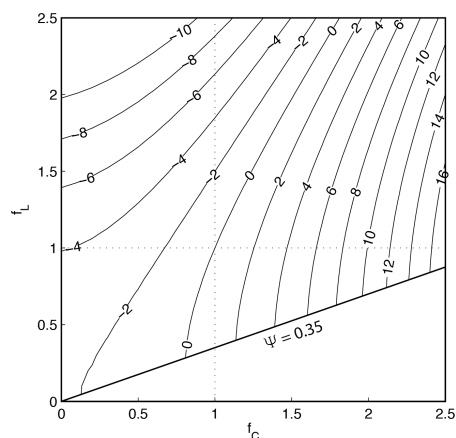


FIGURE 4.4 – Courbes d'iso-valeur de la force de volume horizontale par unité de longueur qui se développe suite à la déformation verticale d'une colonne de référence. Les nombres sur les courbes sont en unité de  $10^{12}$  N/m.

### 14.2. DÉFORMATION D'UNE LITHOSPHERE CONTINENTALE EN UNE DIMENSION

### 4.2.3 Exemple d'un continent en extension

Utilisons maintenant les résultats des sections précédentes, notamment les figures 4.1 et 4.2.2 pour décrire l'évolution d'une lithosphère "normale" impactée par un panache mantellique.

La base de la lithosphère (thermique) remonte par conduction de la chaleur advectée par le panache. De fait, la lithosphère s'amincit ( $fl < 1$ ) tandis que l'épaisseur crustale est inchangée. La figure 4.1 montre que le résultat en est une surrection ( $H$  augmente). On parle parfois de "doming" dans le cas de l'effet d'un panache mantellique. On note que l'élévation positive atteinte ne peut guère dépasser le kilomètre. Ce relief va s'éroder, on devrait donc en retrouver les témoins dans l'enregistrement sédimentaire sur les pourtours du dôme topographique.

En plus de l'advection de chaleur, le panache mantellique exerce aussi une pression à la base de la lithosphère. Cette pression induit aussi une surrection régionale qui s'ajoute à l'effet thermique. L'excès de topographie alors obtenu (par rapport à la topographie d'origine purement thermique à l'équilibre isostatique) est appelé "topographie dynamique".

Indépendamment de cette topographie dynamique, le nouvel état de doming thermique induit, comme le montre la figure 4.2.2, une force de volume horizontale positive, donc extensive. Si celle-ci est suffisante par rapport à la résistance mécanique de la lithosphère – notamment de la croûte et du manteau supérieur – l'ensemble de la lithosphère, y compris la croûte, va s'étirer, donc s'amincir. Cet amincissement ( $f_c < 1$ ) va induire une subsidence, donc créer un bassin qui se remplira sans doute de sédiments.

Si les forces extensives en présence sont maintenues, la déformation extensive se poursuit et peut se localiser sur des failles normales, qui délimitent alors des bassins étroits dits de "rift". L'amincissement peut se poursuivre et le système évoluer jusqu'à la rupture de la lithosphère puis l'océanisation.

Si les forces extensives deviennent insuffisantes, le système revient à l'équilibre thermique initial par refroidissement. De fait, la lithosphère s'épaissit et retrouve son épaisseur initiale au bout d'un certain temps. La croûte, elle, reste bien sûr amincie. Ce refroidissement correspond à une seconde phase de subsidence, comme le montre la figure 4.1.

## 4.3 Une chaîne de montagnes simplifiée à l'équilibre dynamique

Nous allons maintenant chercher à résoudre le problème fondamental de l'équilibre des forces de volume et des forces aux limites au sein d'une lithosphère déformée, c'est-à-dire dont l'épaisseur varie latéralement. Cela doit nous permettre de calculer, par exemple, les contraintes dues à l'existence d'un haut plateau de type Tibet ou Colorado sur les régions adjacentes. On peut aussi chercher à déterminer l'importance relative des forces aux limites et des forces de volume dans la déformation de la lithosphère continentale. Nous allons utiliser les



concepts décrits précédemment et, au prix de quelques simplifications que nous justifierons, arriverons à une formulation que nous résoudrons numériquement.

Voir :

- Bird P. and K. Piper, Plane-stress finite-element models of tectonic flow in southern California, *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 21, 2, 158-175, 1980.
- England P. and D. McKenzie, A thin viscous sheet model for continental deformation, *Geophysical Journal International*, 70, 2, 295-321, 1982.
- Houseman P. and P. England, Finite strain calculations of continental deformation : 1. Method and general results for convergent zones, *Journal of Geophysical Research*, 91, 3, 3651-3663, 1986.

### 4.3.1 Équilibre des forces

Dans la lithosphère, les forces aux limites exercées sur un volume de roche sont équilibrés par les forces de volume générées par les gradients horizontaux d'énergie potentielle. Nous avons vu dans un chapitre précédent que l'équation de l'équilibre des forces, qui formalise cet état, s'écrit :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = -\rho g_i \quad (4.24)$$

soit, sous forme explicite :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} &= \rho g_z \\ \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (4.25)$$

La quantité la plus parlante, ou la plus directement compréhensible, n'est généralement pas la contrainte  $\sigma_{ij}$  mais les déformations que subissent les roches, qui sont observables dans l'enregistrement géologique ou dans les mesures géodésiques. Ces déformations ne sont bien sûr que le gradient spatial des déplacements. La résolution des équations ci-dessus doit donc permettre d'estimer des contraintes qui, elles-mêmes pourront être converties en déformations et déplacements en utilisant les lois constitutives qui décrivent les relations entre déformation – ou taux de déformation – et contrainte.

Les équations ci-dessus sont difficiles à résoudre dans le cas général. On peut cependant faire appel à des simplifications telles qu'elles restent néanmoins applicables à la déformation continentale grande échelle.

La première simplification consiste à considérer que, puisque les objets géologiques considérés sont de grande extension spatiale par rapport à l'épaisseur de la lithosphère – donc de plusieurs centaines de kilomètres d'extension latérale – la lithosphère est en équilibre isostatique. En d'autres termes, le poids des colonnes de lithosphère est soutenu uniquement par une traction à leur base, pas par les contraintes de cisaillement le long de ses bords verticaux. On peut

donc écrire :

$$\sigma_{xz} = \sigma_{zx} = \sigma_{zy} = \sigma_{yz} \approx 0 \quad (4.26)$$

L'équation d'équilibre des forces dans la direction verticale devient alors :

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \rho g \quad (4.27)$$

De fait :

$$\sigma_{zz}(z) = g \int_0^z \rho(z') dz' = \text{constante} \quad (4.28)$$

### 4.3.2 Energie potentielle de gravité

Moyennons  $\sigma_{zz}(z)$  sur l'épaisseur de la lithosphère  $L$ . On a alors, par surface unitaire :

$$\bar{\sigma}_{zz} = \frac{g}{L} \int_{-L}^0 \int_0^z \rho(z') dz' dz \quad (4.29)$$

où  $\rho(z')$  est la densité de la colonne considérée à la profondeur  $z$ .

La différence entre deux colonnes adjacentes,  $\Delta \bar{\sigma}_{zz}$  est simplement :

$$\Delta \bar{\sigma}_{zz} = \frac{g}{L} \int_{-L}^0 \int_0^z \Delta \rho(z') dz' dz \quad (4.30)$$

où  $\Delta \rho(z')$  est la différence de densité entre ces deux colonnes à la profondeur  $z$ .

Prenons le cas de deux colonnes en équilibre isostatique au sens d'Airy, comme le montre la figure 4.5. On représente  $\sigma_{zz}$  en fonction de la profondeur.  $\sigma_{zz} = \rho g z$  augmente linéairement avec une pente  $\rho g$ . On suppose une densité constante  $\rho_c$  dans la croûte et  $\rho_m$  dans le manteau. On a donc pour la colonne 1 une droite de pente  $\rho_c g$  de 0 à  $S =$  profondeur du Moho, et de pente  $\rho_m g$  de  $S$  à la base de la lithosphère  $L$ . Pour la colonne 2, on a une droite de pente  $\rho_m g$  de la profondeur  $h$  à la base de la lithosphère.

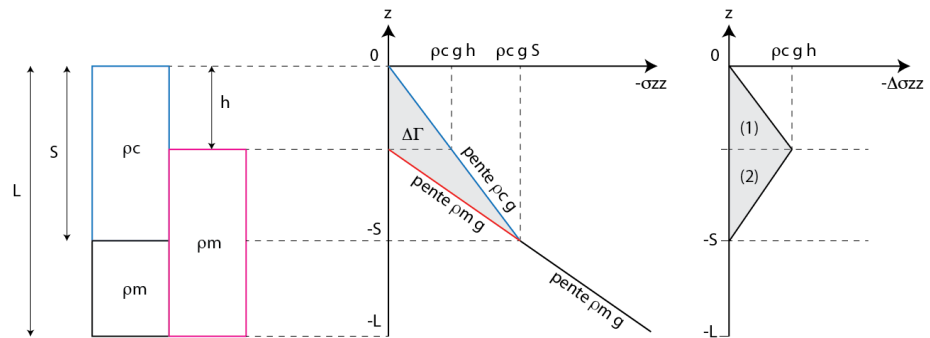


FIGURE 4.5 – Différence d'énergie potentielle de gravité entre deux colonnes de lithosphère.

À l'évidence, la différence de  $\sigma_{zz}$  entre les deux colonnes entre les profondeurs  $S$  à  $L$  est nulle puisque leurs densités sont égales. Par contre, on distingue entre 0 et  $S$  le domaine 1 où :

$$\Delta\sigma_{zz} = \frac{g\rho_c h^2}{2} \quad (4.31)$$

et le domaine 2 où :

$$\Delta\sigma_{zz} = \frac{g\rho_c h (S - h)}{2} \quad (4.32)$$

La différence de  $\sigma_{zz}$  entre ces deux colonnes adjacentes, de 0 à la profondeur  $L$ , est donc la somme des domaines (1) et (2), que l'on moyenne en divisant par  $L$  pour obtenir  $\bar{\sigma}_{zz}$  :

$$\Delta\bar{\sigma}_{zz} = \frac{g\rho_c h S}{2L} \quad (4.33)$$

Nous avons supposé l'isostasie, donc :

$$\rho_c S + \rho_m L - \rho_m S = \rho_m L - \rho_m h \quad (4.34)$$

soit :

$$h = S (1 - \rho_c / \rho_m) \quad (4.35)$$

Note :  $S^2$  should be  $(S - S_0)^2$  where  $S_0$  is some reference.

On trouve donc que :

$$\Delta\bar{\sigma}_{zz} = -\frac{g\rho_c (1 - \rho_c / \rho_m) S^2}{2L} \quad (4.36)$$

La compensation du poids de la topographie selon l'hypothèse d'Airy n'est qu'un des modes de compensation du relief. De fait,  $\Delta\bar{\sigma}_{zz}$  n'est en général pas seulement une fonction de la topographie. Par contre,  $\Delta\bar{\sigma}_{zz}$  est directement relié aux variations latérales d'énergie gravitationnelle de pesanteur  $\Delta\Gamma$ .

### 4.3.3 Énergie potentielle de gravité et géoïde

*NB : cette section est optionnelle dans la démonstration. Elle permet de montrer que  $\Delta\bar{\sigma}_{zz}$  et/ou le gradient latéral d'EPG  $\Delta\Gamma$ , sont proportionnels au gradient horizontal du géoïde. Comme ce dernier est mesurable à partir de techniques de gravimétrie ou de géodésie spatiale, on sait donc quantifier  $\Delta\Gamma$  ou  $\Delta\bar{\sigma}_{zz}$ . On peut, pour gagner du temps, aller directement en section 4.3.4.*

Par définition de l'EPG, un élément de masse situé à une hauteur  $h$  possède une énergie potentielle de gravité  $U$  :

$$U = m g h \quad (4.37)$$

On a donc, pour la colonne totale :

$$U_c = \int_{-L}^0 m g z dz = \int_{-L}^0 V \rho g z dz \quad (4.38)$$

On a donc, par unité de longueur :

$$U_{cu} = \int_{-L}^0 \rho g z dz = \Gamma \quad (4.39)$$

Nous avons vu qu'à une profondeur  $z$  :

$$\rho g z = \sigma_{zz} \quad (4.40)$$

De fait, l'EPG par unité de longueur pour une colonne d'épaisseur  $L$  par rapport à une élévation 0 est :

$$\Gamma = \int_{-L}^0 \sigma_{zz}(z) dz \quad (4.41)$$

avec :

$$\sigma_{zz}(z) = g \int_0^z \rho(z') dz' \quad (4.42)$$

On retrouve donc :

$$\Gamma = g \int_{-L}^0 \int_0^z \rho(z') dz' dz \quad (4.43)$$

L'équation 4.29 permet d'écrire :

$$\Gamma = L \bar{\sigma}_{zz} \quad (4.44)$$

et donc :

$$\Delta\Gamma = L \Delta\bar{\sigma}_{zz} \quad (4.45)$$

On a donc :

$$\Delta\Gamma = g \int_{-L}^0 \int_0^z \Delta\rho(z') dz' dz \quad (4.46)$$

L'intégrale interne de cette équation n'est autre que la variation de  $\sigma_{zz}$  avec la profondeur, au facteur  $g$  près. Elle représente donc la surface de chacun des triangles (1) ou (2) de la figure 4.5. L'intégrale totale est la somme de la contribution de chacune de ces surfaces. On peut donc discrétiser l'intégrale interne par sections de  $\Delta\rho$  constant, ce qui donne :

$$\Delta\Gamma = g \int_{-L}^0 z \Delta\rho(z) dz \quad (4.47)$$

car

$$\int_0^z dz' = z \quad (4.48)$$

On retrouve ici, comme mentionné au chapitre "pesanteur et géoïde", le moment de densité  $z \Delta\rho(z)$ . Nous avons vu dans ce même chapitre que l'on peut, en condition d'isostasie, relier les variations de hauteur du géoïde  $\Delta N$  à la distribution du moment de densité selon :

$$\Delta N = -\frac{2\pi G}{g} \int_{-L}^0 z \Delta\rho(z) dz \quad (4.49)$$

En insérant l'équation 4.47 on obtient une relation simple entre variations de hauteur du géoïde et d'énergie gravitationnelle de pesanteur :

$$\Delta N = \frac{2\pi G}{g^2} \Delta \Gamma \quad (4.50)$$

On substitue l'équation 4.45 pour obtenir :

$$\Delta N = \frac{2\pi G}{g^2} L \Delta \bar{\sigma}_{zz} \quad (4.51)$$

On observe donc que le gradient horizontal du géoïde est proportionnel au gradient horizontal d'énergie potentielle ou au gradient horizontal de la contrainte verticale moyenne. Si l'on sait mesurer  $\Delta N$  par des méthodes de gravimétrie ou de géodésie spatiale, cf chapitre sur le champ de pesanteur. On sait donc, en condition d'isostasie, déterminer les contraintes horizontales qui résultent des gradients horizontaux d'énergie gravitationnelle de pesanteur dans la lithosphère.

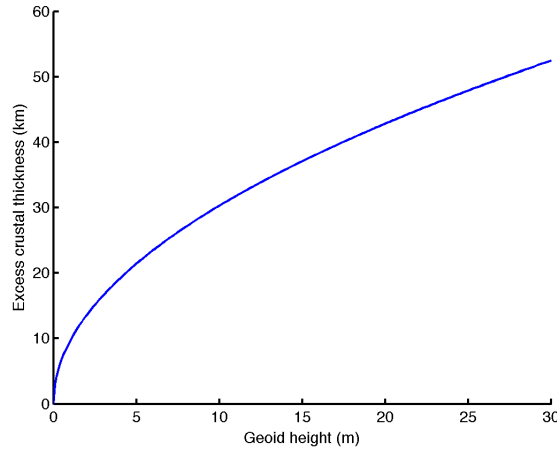


FIGURE 4.6 – Relation entre hauteur du géoïde et excès d'épaisseur crustale (par rapport à une colonne de référence pour laquelle  $\Delta N = 0$ ) telle que décrite par l'équation 4.53.

La condition d'isostasie de l'équation 4.36 donne  $\Delta \bar{\sigma}_{zz}$  et permet d'écrire :

$$\Delta N = \frac{2\pi G L g \rho_c (1 - \rho_c / \rho_m)}{g^2 2L} S^2 \quad (4.52)$$

soit, après simplification :

$$\Delta N = \frac{\pi G \rho_c (1 - \rho_c / \rho_m)}{g} S^2 \quad (4.53)$$

On voit donc qu'il existe, à l'isostasie, une relation de proportionnalité entre l'anomalie du géoïde et les variations d'épaisseur crustale au carré. Sous cette condition, le géoïde mesure quasiment directement la topographie du Moho. La

figure 4.6 montre la relation entre hauteur du géoïde  $\Delta N$  et excès d'épaisseur crustale  $S$  (par rapport à une colonne de référence pour laquelle  $\Delta N = 0$ ) donnée par l'équation 4.53.

La figure 4.7 représente la carte du géoïde centrée sur la zone de collision alpine. On observe que le Tibet correspond à une anomalie positive de géoïde d'environ 20 m (hors du front collisionnel himalayen). La figure 4.6 indique que cela devrait correspondre à un excès d'épaisseur crustale de l'ordre de 40 km. C'est bien ce qui est observé au Tibet, où les données sismologiques montrent un Moho à environ 70 km de profondeur, soit excès d'épaisseur crustale de 40 km par rapport à une croûte normale de 35 km (en comptant bien sûr les 5 km de topographie du plateau).

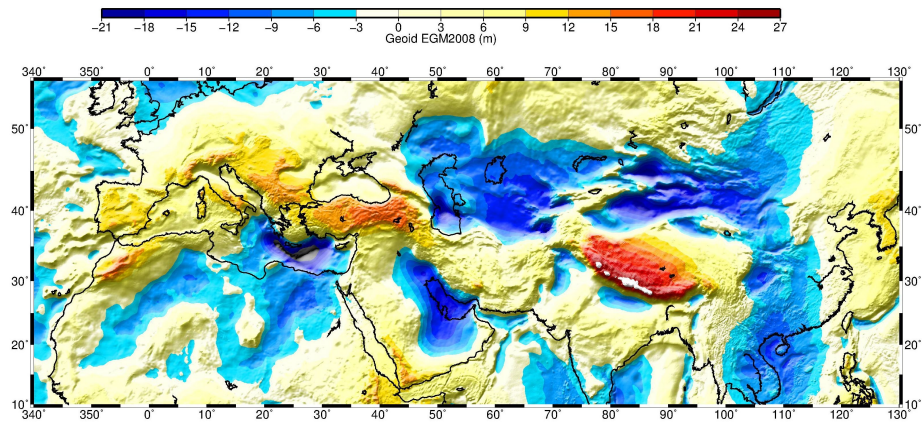


FIGURE 4.7 – Carte du géoïde EGM2008 centrée sur la zone de collision alpine. Figure d'I. Jimenez-Munt (<http://diapiro.ictja.csic.es/gt/ivone>).

L'inspection de la figure 4.7 montre, outre le plateau tibétain, deux autres régions où la hauteur du géoïde est importante : le plateau anatolien (Turquie – Arménie) et le plateau d'Europe sudorientale (ouest Bulgarie, Macédoine, Serbie, Bosnie-Herzégovine). Au sud de ces deux positifs, on observe un fort négatif du géoïde en mer Méditerranée orientale. Le gradient du géoïde entre la mer et la terre dans cette région est très fort – les forces horizontales générées par ce gradient sont donc aussi très significatives et jouent certainement un rôle important dans la déformation récente et actuelle de cette région.

Note :  $S^2$  is actually w.r.t. a reference column, meaning it is a gradient  $\Delta S^2$ .

### 4.3.4 Équilibre des forces en deux dimensions

Prenons l'exemple d'une chaîne de montagne très allongée, comme les Andes par exemple. Dans ce cas, on peut négliger les variations longitudinales et étudier le système en deux-dimensions, dans un repère  $(0, x, z)$  perpendiculaire à la montagne avec  $z$  positif vers le haut. Nous supposons la montagne, d'épaisseur crustale  $L$ , en équilibre isostatique. L'épaisseur crustale  $S(x)$  varie latéralement.

Puisque nous sommes en deux dimensions, les variations selon la direction  $y$

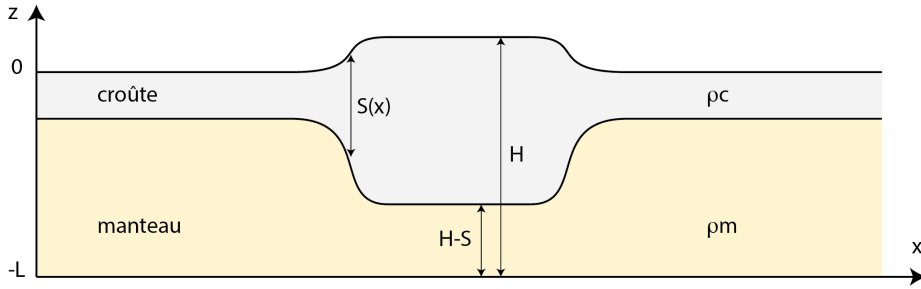


FIGURE 4.8 – Chaîne de montagne (ou plateau) simplifiée, en deux dimensions.

sont nulles. L'équation d'équilibre des forces (4.25) devient :

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (4.54)$$

### 4.3.5 Approximation de plaque mince

Il n'est pas possible de déterminer le gradient vertical des contraintes cisailantes  $\sigma_{xz}$ . Tâchons de simplifier le problème en considérant que l'épaisseur de la lithosphère est très petite par rapport à l'extension latérale du domaine étudié. Dans la pratique, nous allons remplacer la lithosphère par sa moyenne verticale en intégrant l'équation 4.54 sur l'épaisseur de la lithosphère  $L$  et en divisant par  $L$  :

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^0 \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dz + \frac{1}{L} \int_{-L}^0 \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz = 0 \quad (4.55)$$

soit :

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_{xx}}{\partial x} + \frac{\sigma_{xz}(0) - \sigma_{xz}(-L)}{L} = 0 \quad (4.56)$$

Le second terme de cette équation représente la différence entre les contraintes cisailantes à la base et au sommet de la lithosphère. On considère que celles-ci sont très petites par rapport à  $\sigma_{xx}$ , on peut donc ignorer ce second terme pour trouver :

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_{xx}}{\partial x} \approx 0 \quad (4.57)$$

Cette équation nous dit que la contrainte horizontale moyenne (sur l'épaisseur de la lithosphère) s'exerçant sur des plans verticaux est constante. Cela n'a pas l'air très intéressant mais avançons néanmoins.

### 4.3.6 Introduction des contraintes déviatoriques

Par définition des contraintes déviatoriques  $\tau$ , on a :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \tau_{xx} + \sigma_m \\ \text{et} \\ \sigma_{zz} &= \tau_{zz} + \sigma_m \end{aligned} \quad (4.58)$$

où  $\sigma_m$  est la contrainte moyenne donnée par :

$$\sigma_m = \frac{1}{3} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \quad (4.59)$$

On élimine  $\sigma_m$  par différence pour trouver :

$$\sigma_{xx} = \tau_{xx} - \tau_{zz} + \sigma_{zz} \quad (4.60)$$

On a aussi, par définition des contraintes déviatoriques :

$$\tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{zz} = 0 \quad (4.61)$$

donc, puisque  $\tau_{yy} = 0$  en deux dimensions :

$$\tau_{xx} = -\tau_{zz} \quad (4.62)$$

On combine 4.60 et 4.62 pour trouver :

$$\sigma_{xx} = 2\tau_{xx} + \sigma_{zz} \quad (4.63)$$

dont on prend les moyennes verticales, puisque nous faisons l'approximation de plaque mince, soit :

$$\bar{\sigma}_{xx} = 2\bar{\tau}_{xx} + \bar{\sigma}_{zz} \quad (4.64)$$

On peut maintenant insérer ce résultat dans l'équation 4.57 pour trouver :

$$2 \frac{\partial \bar{\tau}_{xx}}{\partial x} = - \frac{\partial \bar{\sigma}_{zz}}{\partial x} \quad (4.65)$$

### 4.3.7 Introduction de l'énergie potentielle de gravité

Nous avons écrit, dans la section 4.3.2, la différence  $\Delta \bar{\sigma}_{zz}$  des contraintes verticales moyenne entre deux colonnes de lithosphère adjacentes. Nous avons conclu que, dans le cas d'une isostasie au sens d'Airy,  $\Delta \bar{\sigma}_{zz}$  était une fonction simple de la densité et de l'épaisseur de la croûte et de la densité du manteau (équation 4.36). Toutes ces quantités sont connues *a priori*.

La combinaison des équations 4.65 et 4.36 donne :

$$2 \frac{\partial \bar{\tau}_{xx}}{\partial x} = \frac{g\rho_c (1 - \rho_c/\rho_m)}{2L} \frac{\partial S^2}{\partial x} \quad (4.66)$$

En d'autres termes, les gradients horizontaux d'épaisseur crustale sont équilibrés par les gradients horizontaux des contraintes horizontales déviatoriques moyennes. De fait, dans une région où l'épaisseur crustale est celle de la colonne de référence, les contraintes sont nulles. Dans une région où l'épaisseur crustale est supérieure à celle de la colonne de référence, les contraintes sont extensives. C'est par exemple le cas d'un plateau ou de la partie centrale de notre chaîne de montagne 2D. À l'inverse, dans une région où l'épaisseur crustale est inférieure, les contraintes sont compressives.



### 4.3.8 Introduction des équations constitutives

La relation entre déformation – ou taux de déformation – et contrainte dépend des propriétés mécaniques des roches : de leur rhéologie. Ces relations sont les “lois constitutives” des matériaux, ou lois de déformation ou de comportement. Par exemple, on approxime parfois le comportement mécanique long terme de la lithosphère par une loi de fluage qui relie le taux de déformation  $\dot{\epsilon}$  aux contraintes déviatoriques  $\tau$  par l’intermédiaire de la viscosité effective du matériau  $\eta_e$  :

$$\bar{\tau}_{ij} = \eta_e \dot{\epsilon}_{ij} \quad (4.67)$$

avec la relation entre taux de déformation  $\dot{\epsilon}$  et vitesse de déplacement  $u$  :

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (4.68)$$

La viscosité effective dépend de la température du milieu, des propriétés physiques des minéraux et du taux de déformation. Elle est résumée par :

$$\eta_e = A^{-\frac{1}{n}} e^{\frac{Q}{nRT}} \dot{\epsilon}^{\frac{1-n}{n}} \quad (4.69)$$

où  $A$  (constante pré-exponentielle en  $MPa^{-n}s^{-1}$ ) et  $Q$  (énergie d’activation en  $kJ mol^{-1}$ ) dépendent du matériau considéré et sont mesurées en laboratoire pour différents minéraux ou assemblages minéraux.  $R$  = constante des gaz parfaits ( $8.3 J mol^{-1} K^{-1}$ ),  $T$  = température ( $K$ ). Si  $n = 1$  le comportement est dit “Newtonien”. La plupart des roches ont un comportement non-Newtonien avec  $2 < n < 4$ . Si  $n \rightarrow \infty$  le matériau tend vers un comportement élastique.

On peut donc écrire  $\dot{\epsilon}_{xx}$  :

$$\dot{\epsilon}_{xx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) = \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad (4.70)$$

Ce qui permet d’écrire maintenant  $\bar{\tau}_{xx}$  :

$$\bar{\tau}_{xx} = \eta_e \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad (4.71)$$

que l’on combine avec l’équation 4.66 pour obtenir :

$$2\eta \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} = K \frac{\partial S^2}{\partial x} \quad (4.72)$$

avec :

$$K = \frac{g\rho_c(1 - \rho_c/\rho_m)}{2L} \quad (4.73)$$

L’équation 4.72 doit maintenant être résolue pour trouver  $u$  en fonction de  $x$ . Dans la pratique, on peut calculer  $K$  car on connaît la densité du manteau et de la croûte. On peut aussi calculer  $\partial S^2/\partial x$  car on connaît les variations d’épaisseur crustale dans la zone d’étude. On connaît aussi la viscosité long terme de la lithosphère, de l’ordre de  $\eta = 10^{21}$  Pa s. On peut alors utiliser une méthode numérique simple, les différences finies, pour calculer  $u$ .

### 4.3.9 Résolution par différences finies

Soit  $u$  une fonction d'une seule variable  $x$ , continue et partout dérivable. Pour un très petit intervalle  $h \rightarrow 0$ , le théorème de Taylor donne :

$$\begin{aligned} (1) \quad u(x+h) &= u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) + \frac{h^3}{6}u'''(x) + O(h^4) \\ (2) \quad u(x-h) &= u(x) - hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) - \frac{h^3}{6}u'''(x) + O(h^4) \end{aligned} \quad (4.74)$$

où  $'$ ,  $''$  et  $'''$  indiquent les dérivées première, seconde et tierce par rapport à  $x$ . En écrivant (1) + (2), on obtient :

$$u''(x) = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} + O(h^3) \quad (4.75)$$

C'est l'approximation centrée de la dérivée seconde sur l'intervalle  $[-h, h]$ . Elle permet de linéariser une dérivée seconde, donc d'écrire notre problème sous la forme d'une fonction linéaire des inconnues  $u(x)$ .

Discretisons maintenant notre espace, qui est devenu uni-dimensionnel en vertu de l'approximation de plaque mince, en  $N$  intervalles de longueur constante  $\Delta x$  séparés par  $N + 1$  noeuds de  $x_0$  à  $x_N$  (figure 4.9).

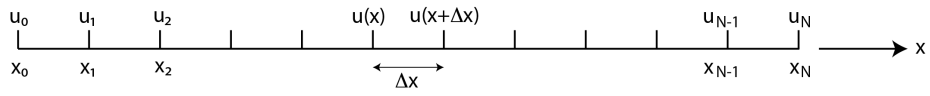


FIGURE 4.9 – Discrétisation de l'espace pour l'approximation par différences finies en une dimension.

Au point 1, l'équation 4.72 :

$$2\eta \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} = K \frac{\partial S^2}{\partial x} \quad (4.76)$$

devient, en utilisant l'approximation centrée (équation 4.75) :

$$\frac{2\eta}{\Delta x^2} (u_2 - 2u_1 + u_0) = K \Delta S_1^2 \quad (4.77)$$

Au point 2, on a de la même façon :

$$\frac{2\eta}{\Delta x^2} (u_3 - 2u_2 + u_1) = K \Delta S_2^2 \quad (4.78)$$

Et au point  $N - 1$  :

$$\frac{2\eta}{\Delta x^2} (u_N - 2u_{N-1} + u_{N-2}) = K \Delta S_{N-1}^2 \quad (4.79)$$

Il convient de faire attention aux conditions aux limites  $u_0$  et  $u_N$ , qu'il faut imposer. On a en fait au point 1, en séparant les inconnues à gauche de l'égalité et les quantités connues à droite :

$$\frac{2\eta}{\Delta x^2} (u_2 - 2u_1) = K \Delta S_1^2 - \frac{2\eta}{\Delta x^2} u_0 \quad (4.80)$$

Et au point  $N - 1$  :

$$\frac{2\eta}{\Delta x^2} (-2u_{N-1} + u_{N-2}) = K\Delta S_{N-1}^2 - \frac{2\eta}{\Delta x^2} u_N \quad (4.81)$$

Cette série d'équations peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\frac{2\eta}{\Delta x^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K\Delta S_1^2 - 2\eta/\Delta x^2 u_0 \\ K\Delta S_2^2 \\ \vdots \\ \vdots \\ K\Delta S_{N-1}^2 - 2\eta/\Delta x^2 u_N \end{bmatrix} \quad (4.82)$$

soit, sous forme compacte :

$$\frac{2\eta}{\Delta x^2} [D] U = K [\Delta S^2] \quad (4.83)$$

$[D]$  est la matrice des différences finies, connue ;  $u$  est le vecteur des inconnues ;  $[\Delta S^2]$  est le vecteur contenant le gradient horizontal de  $S^2$ .

Le point clé de cette affaire est que nous avons réussi à linéariser un problème qui était non linéaire et n'admettait pas de solution analytique simple grâce à une approximation numérique qui rend le problème linéaire – en l'approximant un peu.

On est donc réduit à un problème du type :

$$A u = b \quad (4.84)$$

Puisque  $A$  est une matrice carrée de dimension  $(N - 1 \times N - 1)$ , on trouve la solution de l'équation 4.84 simplement<sup>1</sup> :

$$\begin{aligned} A u &= b \\ \implies A^{-1} A u &= A^{-1} b \\ \implies u &= A^{-1} b \end{aligned} \quad (4.85)$$

### 4.3.10 Conditions aux limites

Une fois la solution obtenue pour  $u = [u_1 \cdots u_{N-1}]$ , on ajoute les conditions aux limites (connues) du problème. Le vecteur solution devient donc  $[u_0 \ u \ u_N]$ .

On en déduit les taux de déformation  $\dot{\epsilon}_x x$  :

$$\dot{\epsilon}_{xx} = \vec{\nabla}(u) \quad (4.86)$$

On peut alors calculer les contraintes déviatoriques verticales moyennes en utilisant l'équation constitutive :

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_{xx} &= \eta \dot{\epsilon}_{xx} \\ \bar{\tau}_{zz} &= -\tau_{xx} \end{aligned} \quad (4.87)$$

---

1. En Matlab, cela se code simplement : `u = b \pinv(A)`.

L'élevation du relief topographique  $H$  par rapport à la base de la lithosphère (voir figure 4.8) découle de la condition d'équilibre isostatique :

$$\begin{aligned}\bar{\tau}_{zz} &= \rho g h = \rho_c g S + \rho_m g (H - S) \\ &= g \rho_c S + g \rho_m H - g \rho_m S \\ &= g (\rho_c - \rho_m) S + g \rho_m H\end{aligned}\tag{4.88}$$

dont on déduit que :

$$H = \frac{\bar{\tau}_{zz} - g (\rho_c - \rho_m) S}{g \rho_m}\tag{4.89}$$

### 4.3.11 Exemple de code 1D

Le code `Matlab` ci-dessous résout le problème ci-dessus et génère les graphiques correspondants. Pour des conditions aux limites fixes (vitesses = 0), la figure 4.10 montre, en fonction de la distance, la topographie du plateau et la racine crustale correspondante, les contraintes déviatoriques horizontales moyennes, les vitesses horizontales et l'anomalie du géoïde correspondante  $N$ . On observe que le plateau est en extension et son avant-pays en compression. Les valeurs maximales obtenues pour cette configuration sont :

- élévation = 2518.1 m
- $\tau_{xx} = 12.0$  MPa
- $\dot{\epsilon}_{xx} = 3.8 \times 10^7$  an<sup>-1</sup>
- $u_x = 2.1$  mm/yr
- $N = 11.8$  m

Ces valeurs sont cohérentes avec ce que l'on peut attendre dans la réalité. Cette expérience numérique illustre le rôle des forces de volume dans la déformation de la lithosphère continentale.

On peut aussi, par essai/erreur, chercher la valeur de la vitesse aux limites telle que la déformation du plateau soit nulle, ou de manière équivalente que la vitesse  $y$  soit constante. En d'autres termes, quelle vitesse faut-il imposer sur un des bords du modèle pour que le plateau ne s'effondre pas ? La figure 4.11 montre le résultat. On trouve que la vitesse à imposer est de 37 mm/yr. Cette valeur élevée montre que les forces de volumes sont un moteur majeur de la déformation de la lithosphère continentale.

## 4.4 En trois dimensions

L'équilibre des forces, incluant l'hypothèse de plaque mince, devient :

$$\begin{aligned}2 \frac{\partial \bar{\tau}_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}_{yy}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial y} &= \frac{\partial \Gamma}{\partial x} \\ 2 \frac{\partial \bar{\tau}_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\tau}_{xx}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial x} &= \frac{\partial \Gamma}{\partial y}\end{aligned}\tag{4.90}$$

L'équation constitutive pour un fluide de viscosité  $\eta$ , qui est notre approximation

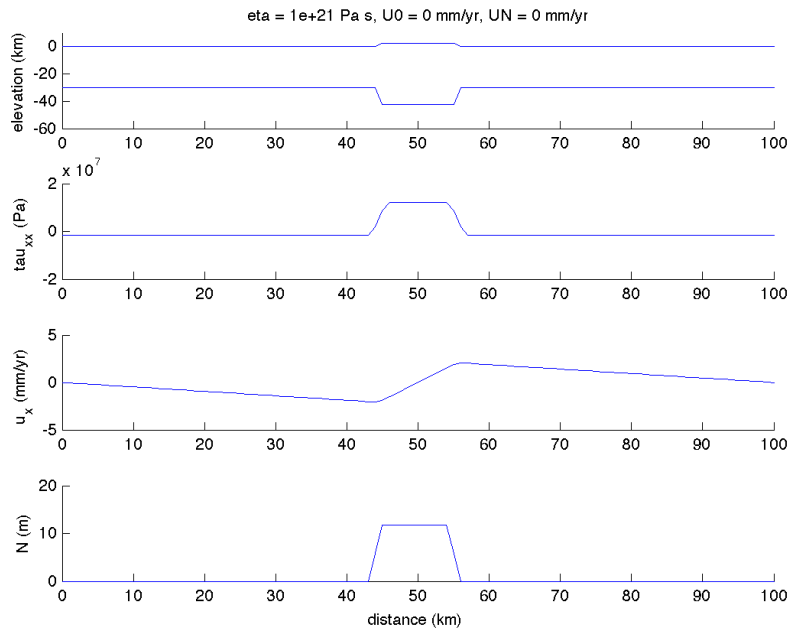


FIGURE 4.10 – Déformation d’une lithosphère continentale sous l’effet des forces de volume générées par la présence d’un plateau isostatiquement compensé au sens d’Airy. Les vitesses imposées aux limites sont nulles.  $N$  est l’anomalie du géoïde. On observe que le plateau “s’écoule” sur ses avant-pays, comme le montrent les vitesses  $u_x$  au travers de celui-ci. Ce calcul utilise les valeurs suivantes :  $\rho_m = 3300 \text{ kg/m}^3$ ,  $\rho_c = 2700 \text{ kg/m}^3$ ,  $L = 100 \text{ km}$ ,  $S = 30 \text{ km}$ ,  $\eta = 10^{21} \text{ Pa s}$ . La croûte est épaissie de 50% entre les distances horizontales 45 et 55 km.

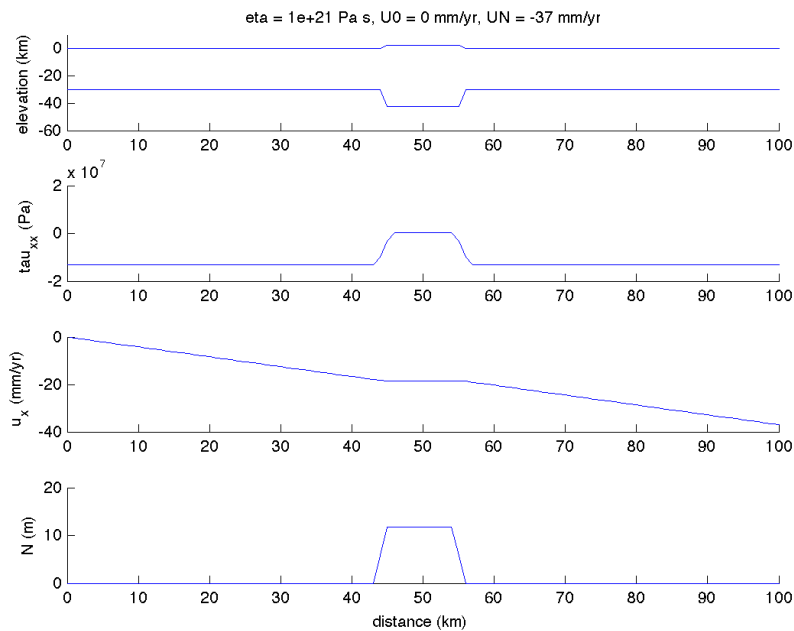


FIGURE 4.11 – Même chose que la figure 4.10, avec cette fois-ci une vitesse  $u_x = -37 \text{ mm/an}$  imposée au bord droit du modèle. Dans ce cas le plateau “tient en place”, avec  $u_x = \text{constante}$  au travers de celui-ci.

de la lithosphère continentale aux échelles de temps géologiques, est :

$$\bar{\tau}_{ij} = \eta \dot{\epsilon}_{ij} = \eta \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (4.91)$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_{xx} &= \eta \dot{\epsilon}_{xx} = \eta \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \bar{\tau}_{yy} &= \eta \dot{\epsilon}_{yy} = \eta \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ \bar{\tau}_{xy} &= \eta \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (4.92)$$

On insère ces expressions des contraintes déviatoriques moyenne dans l'équilibre des forces pour trouver :

$$\begin{aligned} \eta \left[ 2 \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right] &= \frac{\partial \Gamma}{\partial x} \\ \eta \left[ 2 \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} \right] &= \frac{\partial \Gamma}{\partial y} \end{aligned} \quad (4.93)$$

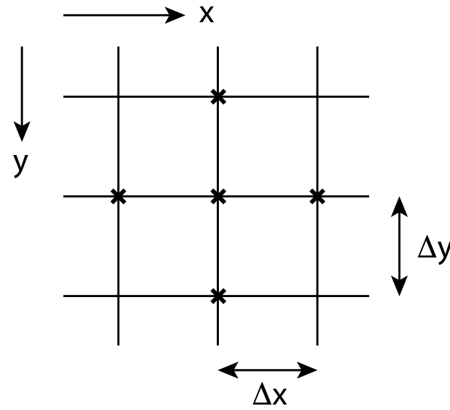


FIGURE 4.12 – Approximation par différences finies, formule à 5 points.

On résoud ces équations numériquement par la méthode des différences finies. L'approximation la plus simple est dite de la "formule à 5 points" (Figure 4.12 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} &= \frac{u(x + \Delta x) - 2u(x) + u(x - \Delta x)}{\Delta x^2} \\ \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} &= \frac{u(y + \Delta y) - 2u(y) + u(y - \Delta y)}{\Delta y^2} \end{aligned} \quad (4.94)$$

Prenons l'exemple d'une grille carrée de 5×5 noeuds que nous dénombrons séquentiellement de 1 à 25 comme le montre la figure 4.13. On a :

—  $i = [1 : 25]$

- $nx = 5$
- $ny = 5$

On constate que que la numérotation des noeuds de la grille est telle que les 4 noeuds les plus proches d'un noeud d'intérêt  $i$  sont  $i - 1, i + 1, i - ny, i + ny$ .

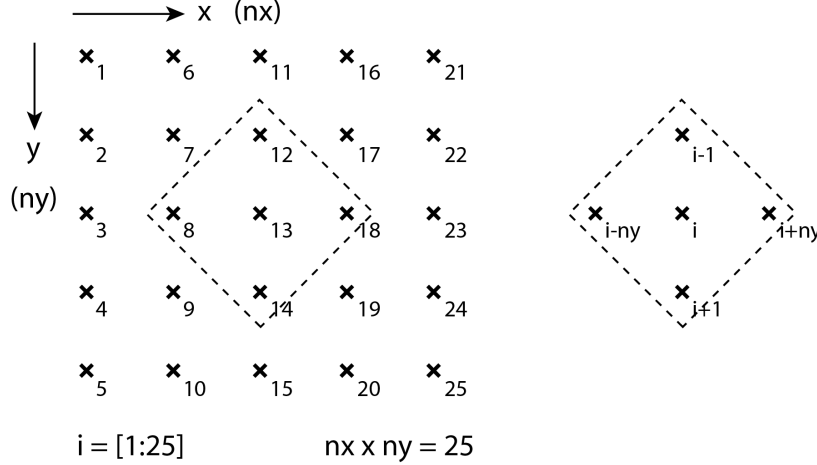


FIGURE 4.13 – Numérotation des noeuds d'une grille de  $5 \times 5$  noeuds.

L'approximation par différences finies de l'équation 4.93 au point  $i$  est donc :

$$\eta \left[ 2 \frac{ux_{i-ny} - 2ux_i + ux_{i+ny}}{\Delta x^2} + \frac{1}{2} \frac{ux_{i-1} - 2ux_i + ux_{i+1}}{\Delta y^2} \right] = \frac{\partial \Gamma}{\partial x} \quad (4.95)$$

$$\eta \left[ 2 \frac{uy_{i-1} - 2uy_i + uy_{i+1}}{\Delta y^2} + \frac{1}{2} \frac{uy_{i-ny} - 2uy_i + uy_{i+ny}}{\Delta x^2} \right] = \frac{\partial \Gamma}{\partial y}$$

Pour la grille  $5 \times 5$  ci-dessus, nous avons donc :

- 9 noeuds internes : 7, 8, 9, 12, 13, 14, 17, 18, 19. Nous cherchons à calculer la vitesse de ces noeuds.
- 16 noeuds aux limites dont nous imposerons la vitesse.

Ecrivons la première équation ci-dessus sous forme matricielle (dérivée partielle selon  $x$ ). Les noeuds internes forment le système suivant pour le premier terme :

$$\frac{2\eta}{\Delta x^2} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x7} \\ u_{x8} \\ u_{x9} \\ u_{x12} \\ u_{x13} \\ u_{x14} \\ u_{x17} \\ u_{x18} \\ u_{x19} \end{bmatrix} = \left[ \frac{\partial \Gamma}{\partial x} \right] \quad (4.96)$$

Soit :

$$\frac{2\eta}{\Delta x^2} [Dudx] [U_x] = \left[ \frac{\partial \Gamma}{\partial x} \right] \quad (4.97)$$

On a pour le second terme :

$$\frac{\eta}{2\Delta y^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x7} \\ u_{x8} \\ u_{x9} \\ u_{x12} \\ u_{x13} \\ u_{x14} \\ u_{x17} \\ u_{x18} \\ u_{x19} \end{bmatrix} = \left[ \frac{\partial \Gamma}{\partial y} \right] \quad (4.98)$$

### 4.5 Application à l'Asie

La collision continentale entre l'Inde et l'Eurasie, qui a donné naissance à l'Himalaya, a aussi été accompagnée par la mise en place du plateau Tibétain. Ce dernier atteint une altitude moyenne de 4500 m, avec une épaisseur crustale, déterminée sismiquement, de 70 km soit le double de celle d'une croûte continentale normale. Le plateau Tibétain est donc une anomalie de très grande ampleur en terme d'altitude et d'épaisseur crustale. Le mécanisme qui a permis cet épaissement – doublement – crustal reste débattu. Il n'en reste pas moins que le contraste latéral d'épaisseur crustale entre le plateau et les régions de faible élévation qui le bordent au nord (bassin du Tarim), au sud (plaine Indogangétique) et à l'est (bassin du Sichuan) doit s'accompagner d'importantes variations latérales de potentiel gravitationnel – donc générer des contraintes déviatoriques significatives.

Le rôle de ces forces de volumes dans la dynamique de la déformation continentale en Asie a longtemps été débattu. Pour certains, la déformation du Tibet et de ses alentours a son moteur uniquement dans les forces exercées par les déplacements horizontaux des plaques en présence : la collision de l'Inde induit une force compressive à laquelle les subductions d'Asie de l'est et du sud-est n'offrent pas de résistance. Dans ce cas, l'Asie du sud-est et la Chine du sud sont alors "exclusées" vers l'est sous l'effet de la collision Inde-Asie. Dans ce cas, la tectonique de l'ensemble de l'Asie est contrôlée par cette collision. C'est le modèle dit "d'extrusion" prôné notamment par P. Tapponnier et ses collaborateurs dans les années 1980-1990 (Figure 4.14, gauche). Pour d'autres, les forces de volume jouent un rôle prépondérant et la collision Inde-Asie est le moteur de l'épaissement de la croûte tibétaine, mais pas de la déformation de l'ensemble de l'Asie (Figure 4.14, droite). C'est le modèle prôné notamment par P. England et G. Houseman dans ces mêmes années.

Dans le premier cas, l'Asie continentale se comporte comme une mosaïque de blocks rigides bordés par des failles dont certaines, pour des raisons de bilan cinématique, doivent accommoder d'importantes quantités de mouvement. C'est notamment le cas des failles de l'Altyn Tagh et du Fleuve Rouge. La déformation du continent asiatique obéirait alors à un modèle de type tectonique des plaques : elle serait alors simplement décrite par la cinématique de blocs rigides poussés les uns contre les autres sous l'effet de la convergence Inde-Asie (Figure 4.14, gauche). Dans le second cas, l'explication de la déformation continentale en Asie



ne peut faire l'économie d'une description dynamique qui permet d'inclure le rôle des forces de volume. Les premiers modèles dans cette direction font l'hypothèse d'une lithosphère visqueuse qui se déforme de manière continue, comme décrit dans les exemples des chapitres précédents (Figure 4.14, droite). Ils expliquent le style et les direction de la déformation active déduite des mécanismes au foyer des séismes sur le pourtour du plateau tibétain. Ces modèles n'incorporent cependant pas de failles, alors que celles-ci sont clairement exprimées dans la géologie de l'Asie.

Depuis le milieu des années 2000, le GPS offre un jeu de données qui permet de tester ces modèles. La figure 4.15 montre le premier champ de vitesse complet pour la totalité de l'Asie. On observe la convergence Inde-Asie à une vitesse de l'ordre de 35 mm/an. Le front himalayen encaisse environ 20 mm/an de cette convergence. Le reste est distribué dans l'ensemble de l'Asie avec (1) du raccourcissement nord-sud à l'ouest de la longitude d'environ 100°E, et (2) un déplacement vers l'est à environ 10 mm/an de l'ensemble de la façade est du continent asiatique – pas seulement de la Chine du sud comme le proposaient les modèles d'extrusion cités plus haut. La distribution de la déformation montre aussi la présence grands blocs de lithosphère continentale relativement rigides tels que Chine du Nord, Chine du Sud, Sunda, Tarim, avec quelques indication de déformation continue seulement au Tibet – en désaccord avec les modèles de déformation continue visqueuse cités plus haut.

Des modèles plus récents utilisent ces observations GPS. De plus, ils incluent à la fois un comportement frictionnel sur des failles, avec un critère de mouvement de type Coulomb nécessitant donc de prescrire une friction, et un comportement visqueux dans le reste du volume de lithosphère (Figure 4.16). La résistance mécanique moyenne de la lithosphère y est calculée en fonction (1) du flux de chaleur local et (2) de l'épaisseur crustale elle-même déduite de la topographie et d'une hypothèse d'isostasie de type Airy. En fait, un profil de Brace-Goetze est calculé en chaque élément du modèle pour en déduire la résistance mécanique intégrée de la lithosphère. Ces modèles permettent aussi de limiter la traction cisailante maximale que peuvent supporter les subductions péri-asiatiques : si le calcul prédit une traction supérieure à une valeur seuil – qu'il faut prescrire – alors la subduction glisse et dissipe donc une partie de l'énergie du modèle. Dans le cas inverse, la subduction reste bloquée et résiste donc aux forces de volume présentes dans le modèle. Ces modèles permettent donc de prendre en compte une géologie réaliste, avec topographie, failles, flux de chaleur, variations latérales d'épaisseur crustale. Ils font cependant appel à des hypothèses fortes sur la friction des failles et la traction cisailante maximale que peuvent soutenir les subductions océaniques ou continentales.

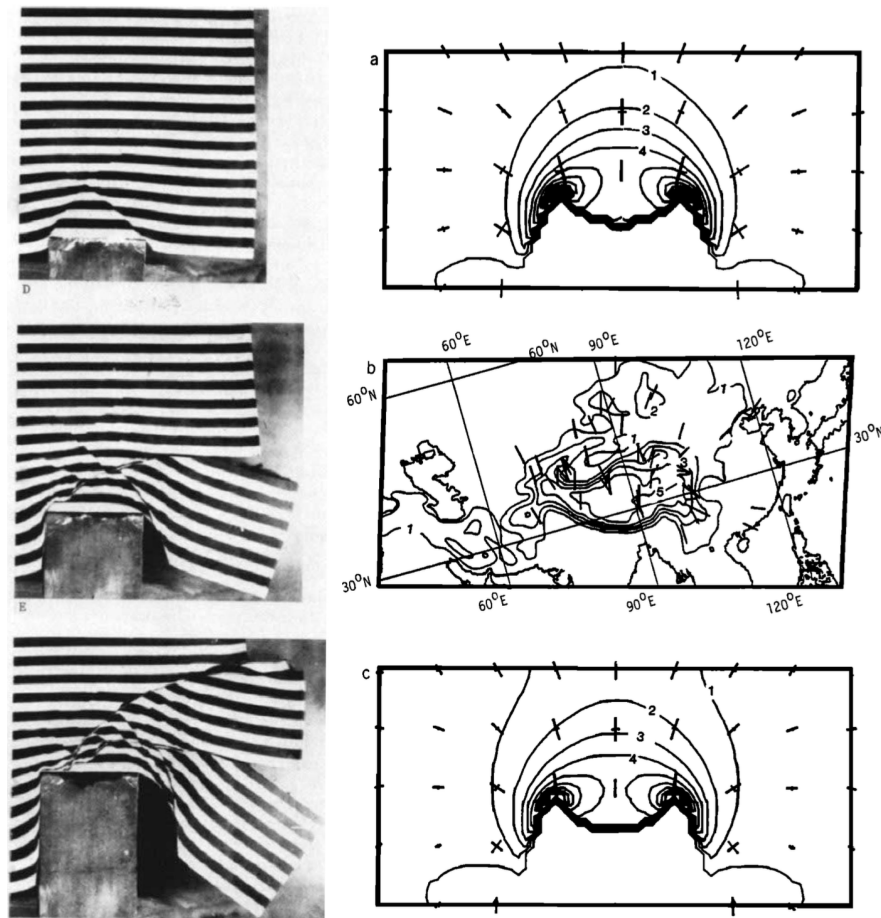


FIGURE 4.14 – Gauche : expérience de poinçonnement d'un bloc de plastiline pour simuler la déformation continentale en Asie. Le poinçon métallique figure l'Inde rigide. L'Asie est supposée être plus "molle", avec un bord libre à l'est et au sud figurant les subductions péri-asiatiques supposées offrir peu de résistance aux mouvements des blocs continentaux. Les bords ouest et nord sont bloqués pour simuler la résistance offerte par la plaque Eurasie. On observe que la plastiline se découpe le long de grandes failles qui permettent l'extrusion vers l'est et le sud-est de deux grands blocs similaires aux blocs Sunda et Chine du Sud. On note que cette expérience en condition de déformation plane ne prend pas en compte l'épaississement crustal du Tibet. Figure tirée de Tapponnier et Peltzer, *Geology*, 1982. Droite : calcul des forces de volume dues au plateau Tibétain et de la déformation associée, représentée par les contraintes déviatoriques principales (barres noires, les plus longues indiquent la compression). Haut : calcul pour  $n = 5$  après 40 Ma de convergence. Bas : calcul pour  $n = 3$  après 45 Ma de convergence. Les contours indiquent l'élévation du Tibet en km. Milieu : contours de l'élévation actuelle du Tibet et direction des axes P des séismes. On note un bon accord entre les déformations calculées et observées : topographie et séismes. Ce modèle, par conception, n'inclut pas de failles. Figure tirée de England et Houseman, *JGR*, 1986.

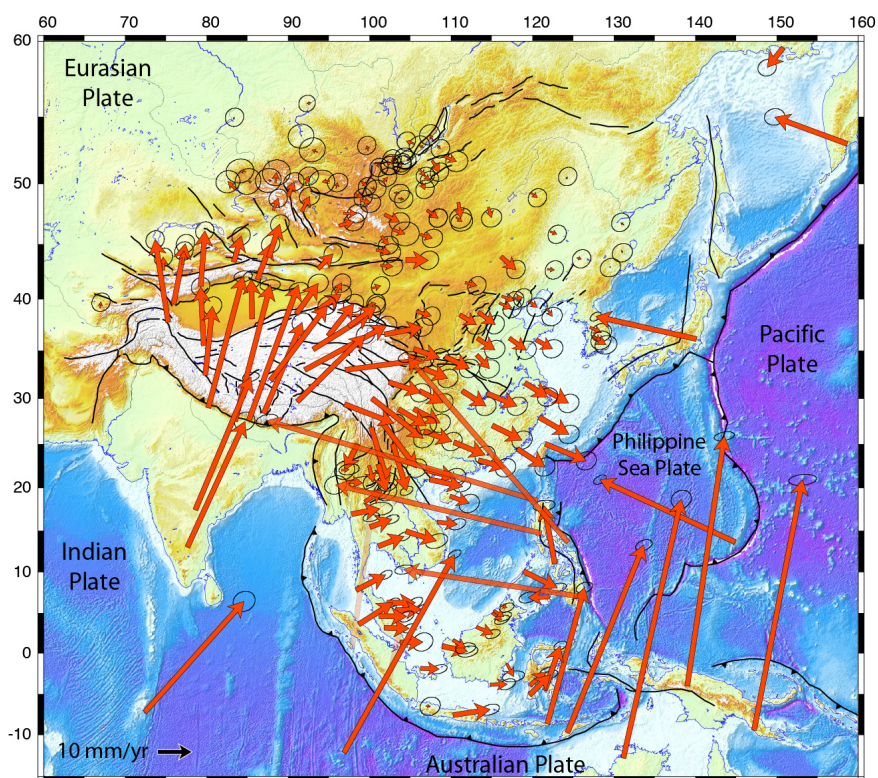


FIGURE 4.15 – Vitesses GPS en Asie exprimées par rapport à l'Eurasie stable. On observe une convergence de l'Inde à 35 mm/an, absorbée par de la déformation compressive au travers du front himalayem, du Tibet, ou du Tien Shan, ainsi qu'un mouvement vers le sud-est de l'essentiel de l'Asie de l'est, depuis la péninsule indochinoise jusqu'à la Mongolie. Figure tirée de Dong et Calais, GRL, 1996.

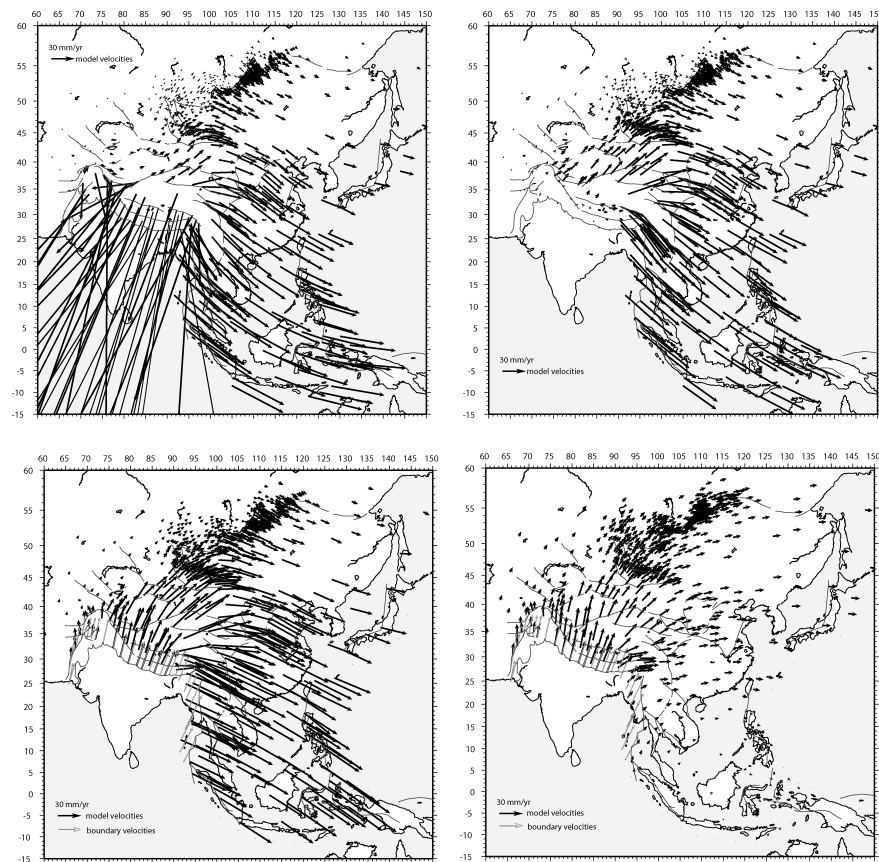


FIGURE 4.16 – Quatre calculs de déformation en Asie dans un modèle numérique qui inclut forces de volumes causées par les gradients d'énergie potentielle, comportement frictionnel des grandes failles de l'Asie, et traction cisailante sur les subductions océaniques et continentales. A : ce modèle inclut uniquement les forces de volume – la plaque indienne est immobile – et illustre le rôle des gradient d'énergie potentielle entre le Tibet et les région voisines ainsi qu'au travers des marges océaniques péri-asiatiques. On observe que le Tibet “coule” sur l'Inde, ce qui est tout à fait irréaliste. La moitié orientale de l'Asie se déplace vers le sud-est à forte vitesse. B : même configuration que le précédent modèle, mais on impose une résistance frictionnelle limite le long de la subduction continentale himalayenne (20 MPa). Celle-ci équilibre les forces de volume qui tendaient à faire “couler” le Tibet vers le sud, mais on n'observe pas de raccourcissement le long du front himalayen. C : même configuration que le précédent modèle, avec cette fois un déplacement de l'Inde vers le nord à 35 mm/an. On observe cette fois environ 20 mm/an de raccourcissement le long du front himalayen. Le déplacement vers le sud-est de l'est de l'Asie est trois fois plus rapide qu'observé. D : même configuration que le précédent modèle, avec cette fois une résistance frictionnelle limite le long des subductions océaniques péri-asiatiques. Cela limite la vitesse de l'est de l'Asie. Ce modèle reproduit relativement bien les observations géodésiques GPS, mais les directions observées dans l'est de l'Asie (Chine du Sud, Chine du Nord, Mongolie) sont en fait plus sud-est que prédites par ce modèle. Figures tirées de Vergnolle et Calais, JGR, 2007.