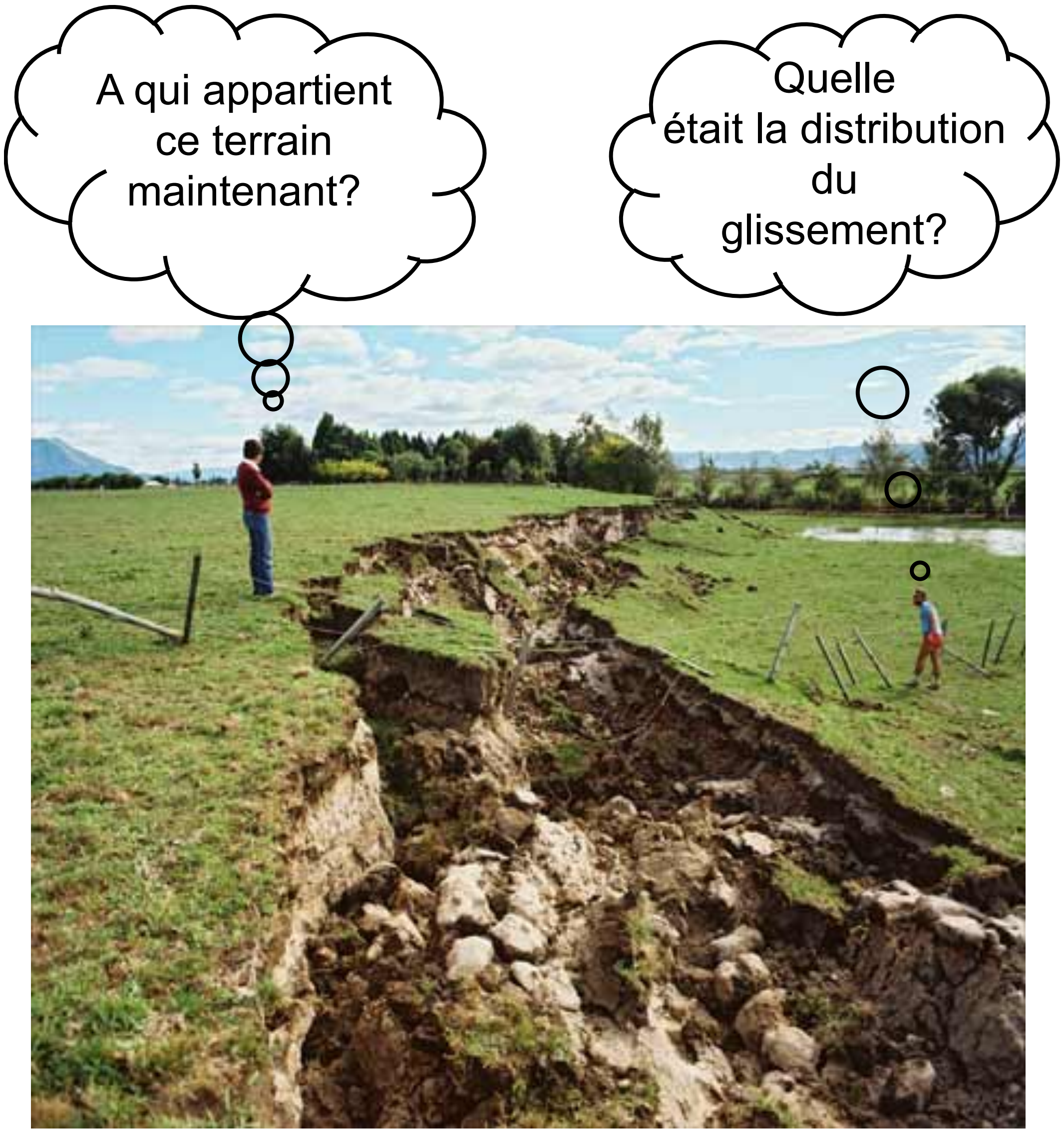
Le géo-positionnement et quelques applications

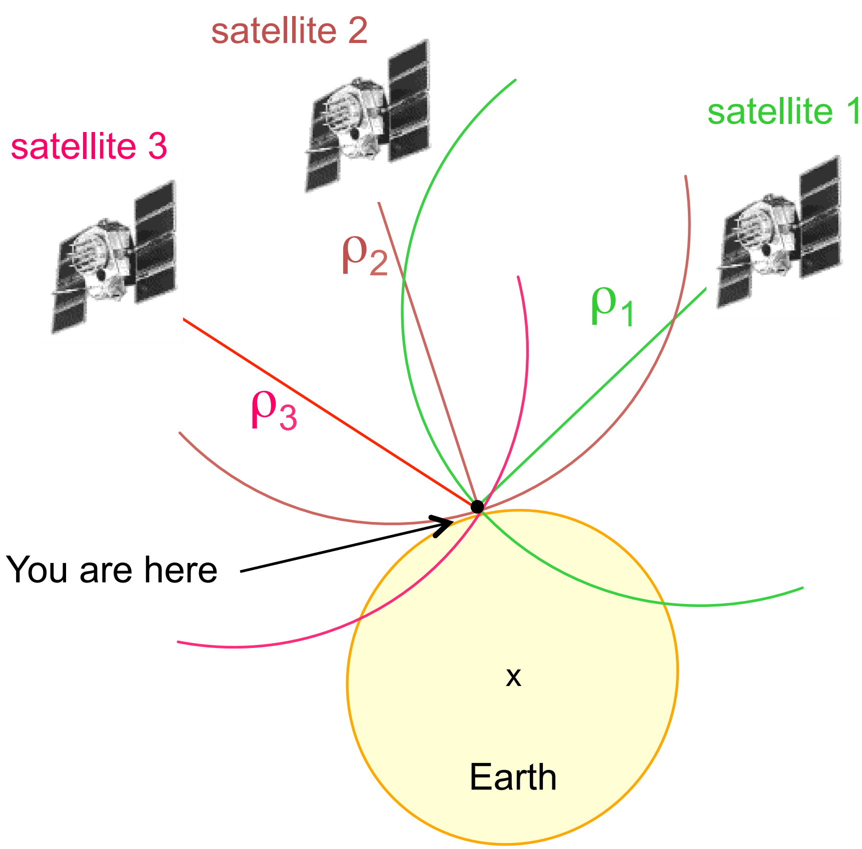
Eric Calais – eric.calais@ens.fr

Motivation: du mètre au mm



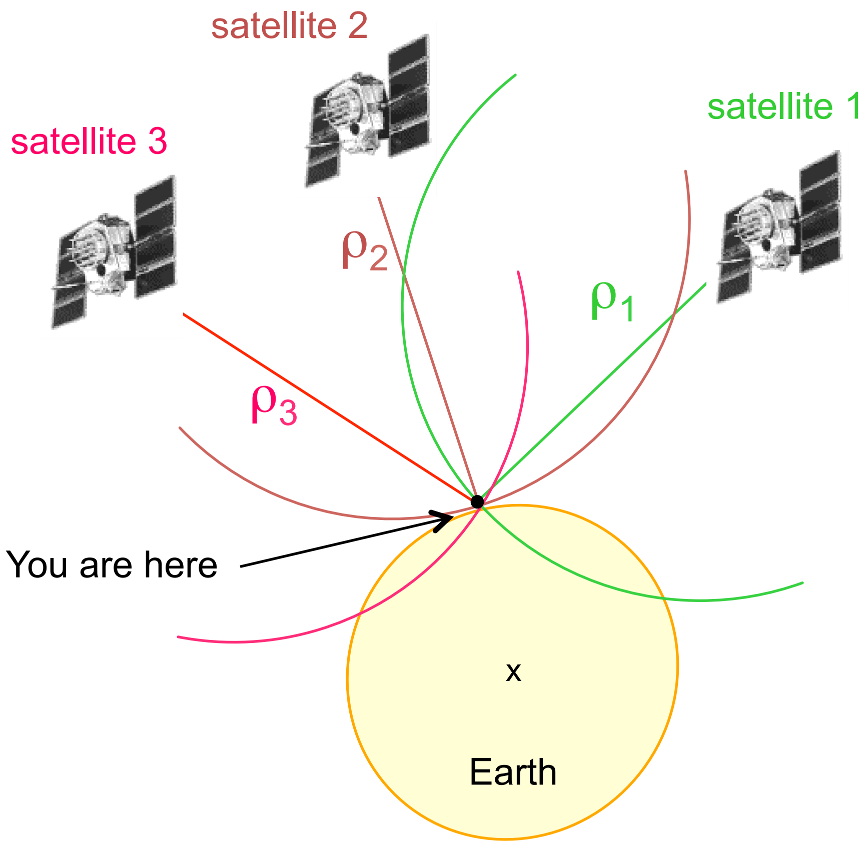
- Méthodes modernes de géolocalisation: satellitaires
- Besoins:
  - Mètres: navigation
  - Centimètres: foncier
  - Millimètres: géophysique
- Global Positioning System (GPS) et autres systèmes équivalents = GNSS
- Faciles d’utilisation, grande diversité d’utilisateurs, large fourchette de précisions

Principes de base



- Satellite 1 émet un signal au temps t_{e1}
- Récepteur au sol reçoit le signal au temps t_r
- La mesure de distance ρ_1 au satellite 1 est:
  - $\rho_1 = (t_r - t_{e1})$ x vitesse de la lumière
  - Position est donc sur une sphère centrée sur le satellite 1, de rayon $\rho 1$
- 3 satellites => intersection de 3 sphères

Principes de base



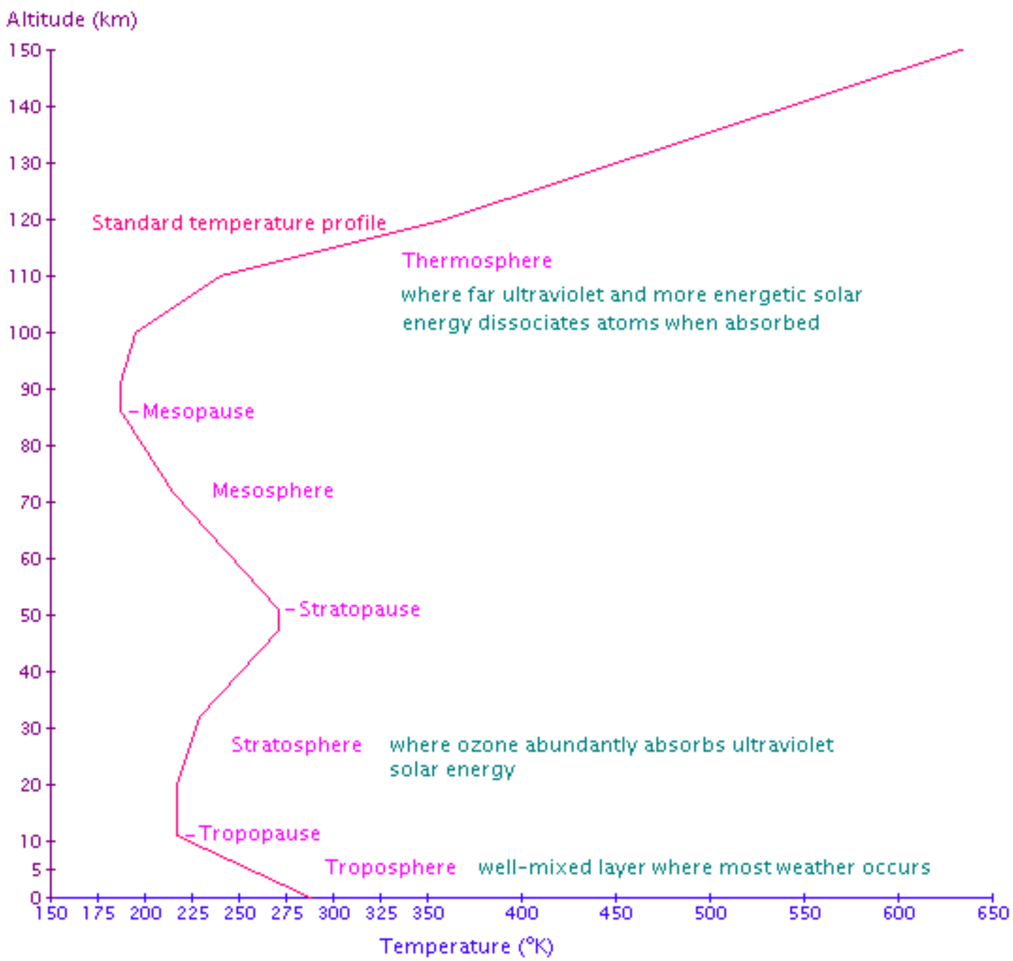
- Le modèle mathématique est donc simple:

$$\rho_r^s = \sqrt{(X^S - X_R)^2 + (Y^S - Y_R)^2 + (Z^S - Z_R)^2}$$

  - Etant donné les positions *(X^S, Y^S, Z^S)* de satellites dans un référentiel lié à la Terre…
  - …on peut calculer la position du récepteur *(X_R, Y_{rR} X_R)* si au moins 3 satellites sont visibles simultanément.
- Problème: les horloges des récepteurs sont:
  - Médiocres
  - Non synchronisées avec celles des satellites
- Conséquences:
  - Mesure de distance affectée d'une erreur $\delta t = t_r - t_s$
  - Mesures = pseudo-distances:

$$R_r^s = \rho_r^s + c\delta t_r$$

Principes de base



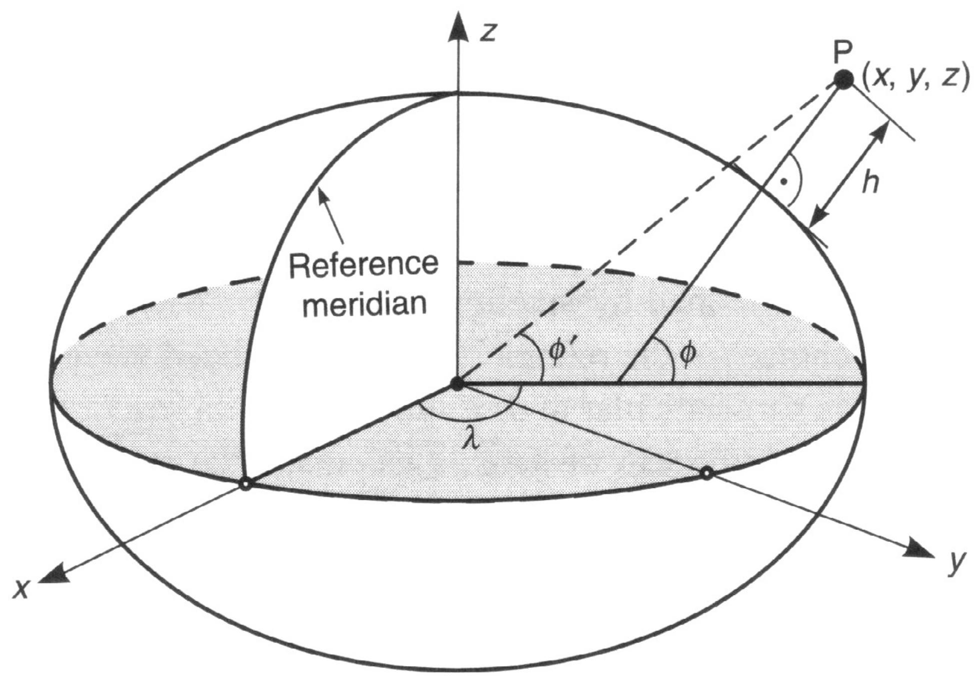
- Un signal en bande L (1.2 et 1.6 GHz)
- Problème: réfraction lors de la propagation dans l'atmosphère
  - Courbure: négligeable
  - Ralentissement
- Ralentissement:
  - Troposphère: fonction de P, T, H – quelques mètres
  - Ionosphère: fonction de la densité électronique – jusqu'à plusieurs dizaines de mètres
- Un modèle (plus) complet est donc:

$$R_r^s = \rho_r^s + c\delta t_r + I_r^s + T_r^s + \ldots$$

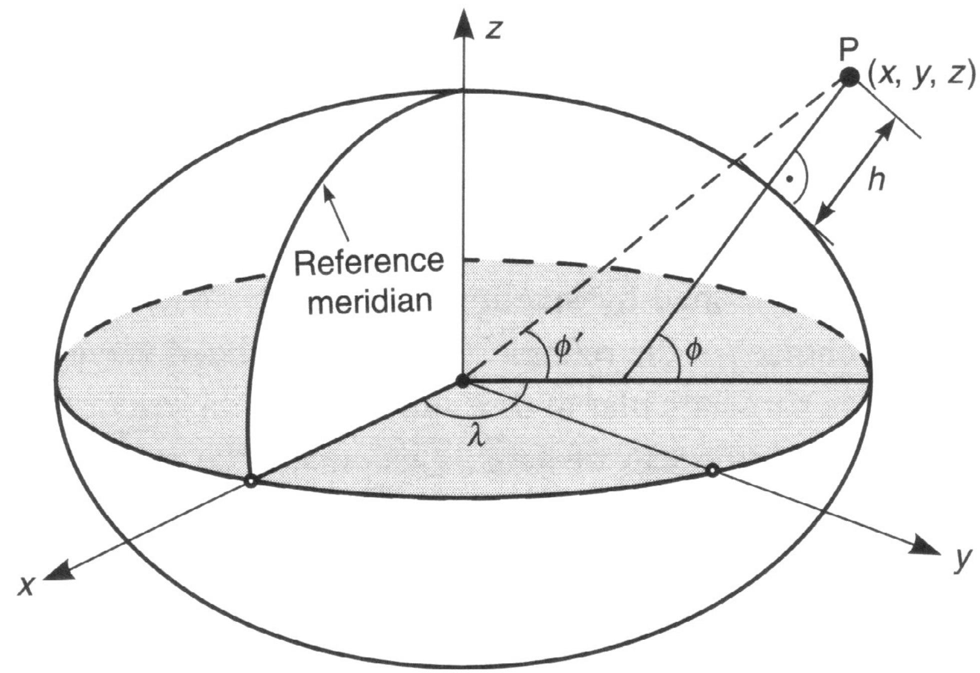
  - T = délai troposphérique
  - I = délai ionosphérique
  - +… = autres sources de bruit

Coordonnées ellipsoïdales

- Puisque la Terre a (approximativement) la forme d'un ellipsoïde, il est pratique de décrire des positions à sa surface par leur latitude, longitude, et hauteur = coordonnées ellipsoïdales:
  - Méridien principal = origine des longitudes
  - Equateur = origine des latitudes
  - Latitude géodésique ϕ = angle entre le plan équatorial plane et la direction normale à l'ellipsoide
  - Longitude géodésique λ = angle avec le méridien de référence dans le plan équatorial
  - Hauteur h = distance a l'ellipsoide dans une direction normale à l'ellipsoide
- Autres coordonnées:
  - Latitude géocentrique ϕ'



Coordonnées cartésiennes



- Autre système de coordonnées possible, plus simple:
  - Origine = centre de masse de la Terre
  - 3 axes orthogonaux X, Y, Z
  - Z = axe de rotation de la Terre
  - Plan (X,Z) = contient le méridien principal
  - Plan (X,Y) = coïncide avec le plan équatorial
  - Unité = mètre
  - Lié à la Terre (tourne avec lui)
- Transformations mathématiques de géodésiques à cartésiennes ~triviales.

$$\tan\lambda = y/x$$

$$p = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$N = \frac{a}{\left(1 - e^2 \sin^2\phi\right)^{1/2}}$$

$$h = \frac{p}{\cos\phi} - N$$

$$\tan\phi = \frac{z}{p}\left(1 - e^2 \frac{N}{N+h}\right)$$

$$N = \frac{a}{\left(1 - e^2 \sin^2\phi\right)^{1/2}}$$

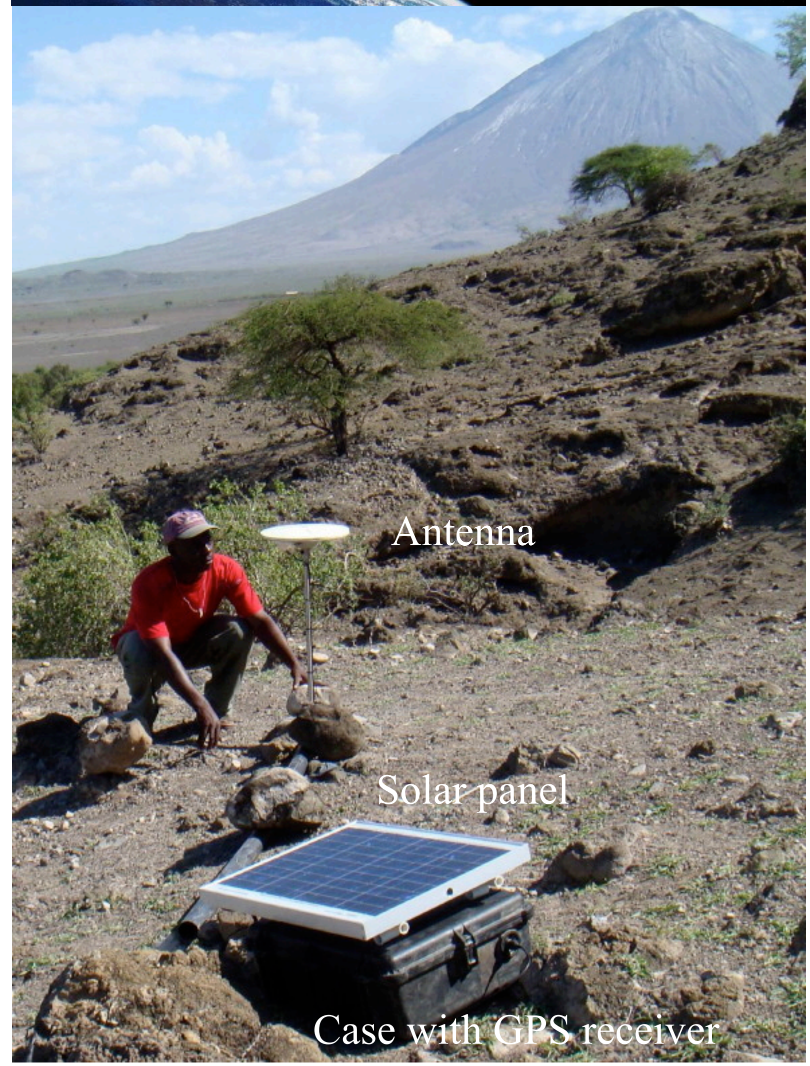
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (N+h)\cos\phi\cos\lambda \\ (N+h)\cos\phi\sin\lambda \\ \left(N\left(1-e^2\right)+h\right)\sin\phi \end{bmatrix}$$

Du signal GNSS à une position

- Que font les satellites?
  - Emettent un signal radio vers la Terre au temps t_e
  - Le signal radio contient:
    - L'identification du satellite
    - La position du satellite
- Que font les récepteurs GPS?
  - Mesurent le temps de réception t_r
  - Décodent le signal reçu:
    - Déterminent t_e
    - Lisent les éphémérides des satellites
  - Calculent les pseudodistances R_r^s
  - Calculent leurs positions à partir d'un moins 4 pseudodistances simultanées.

$$R_r^s = \sqrt{(X^S - X_R)^2 + (Y^S - Y_R)^2 + (Z^S - Z_R)^2}$$

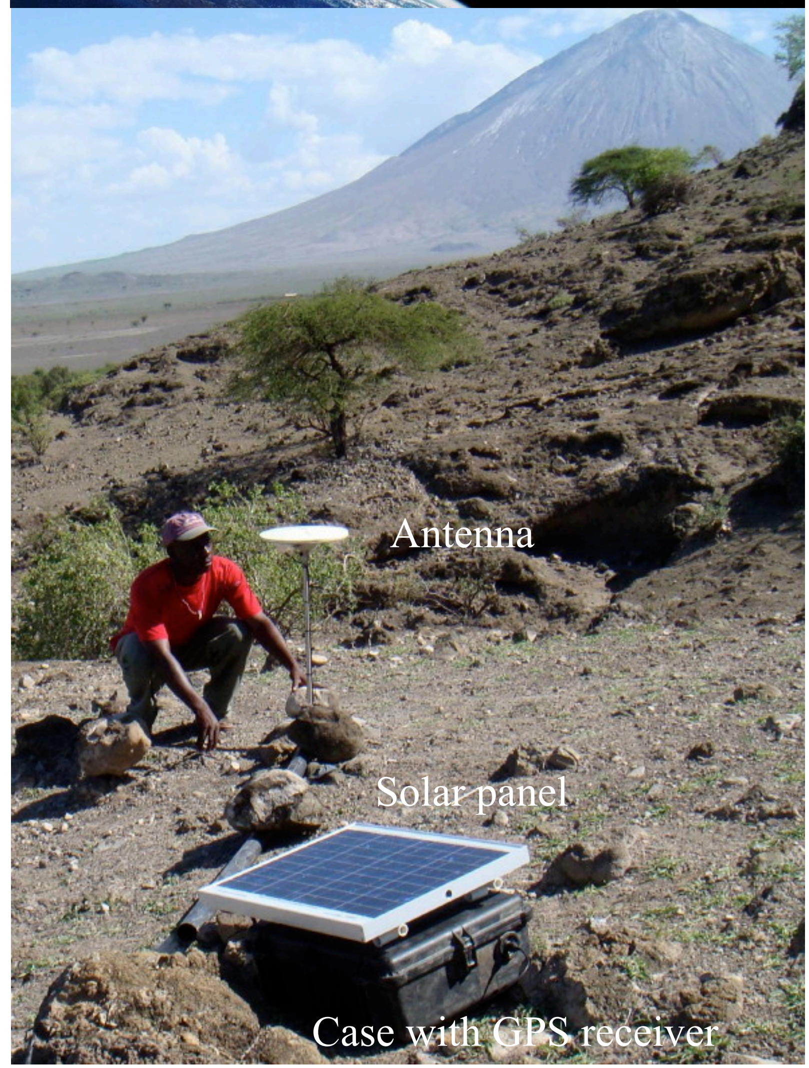
$$+ c\delta t_r + I_r^s + T_r^s + \ldots$$



Du signal GNSS à une position

$$R_r^s = \sqrt{(X^S - X_R)^2 + (Y^S - Y_R)^2 + (Z^S - Z_R)^2}$$
$$+ c\delta t_r + I_r^s + T_r^s + \ldots$$

- Les satellites
  - Principales caractéristiques
  - Détermination des orbites
- Les récepteurs
  - Observables
  - Des observables à une position
- Sources d’erreur et mitigation
  - Propagation du signal
  - Autres…
- Applications
  - Scientifiques
  - Autres



Orbite képlérienne

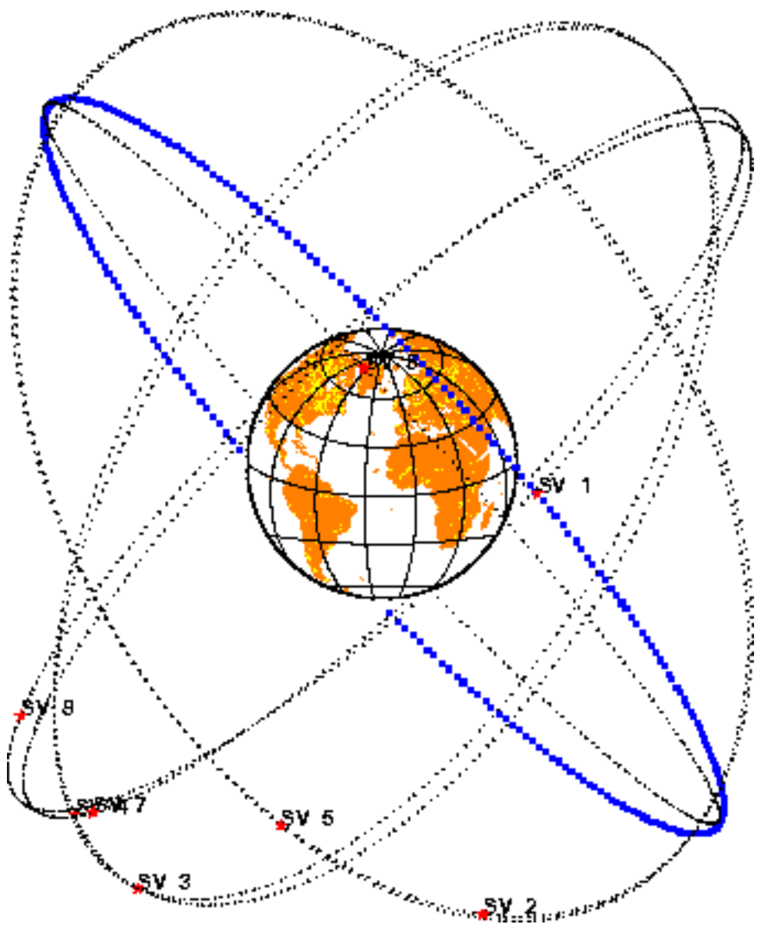


Fig. T. Herring (MIT)

GPS orbit, inertial frame

- Orbites des satellites suivent une trajectoire elliptique:
  - Dans un référentiel inertiel
  - En présence d'une force gravitationnelle centrale
- Troisième loi de Kepler (période²/ a^3=const.) relie la vitesse angulaire moyenne n à la période de révolution P:

$$n = \frac{2\pi}{P} = \sqrt{\frac{GM_E}{a^3}}$$

M_E = masse de la Terre, GM_E = 3,986,005x10⁸ m³s⁻²

- Semi grand axe a = 26 560 km pour les satellites GPS, donc:
  - Période orbitale = 12 heures sidérales (= 11h28mn UT), v=3.87 km/s
  - Répétition de la positions des satellites GPS par rapport à la Terre?
  - Eccentricité < 0.02 => orbites quasi-circulaires

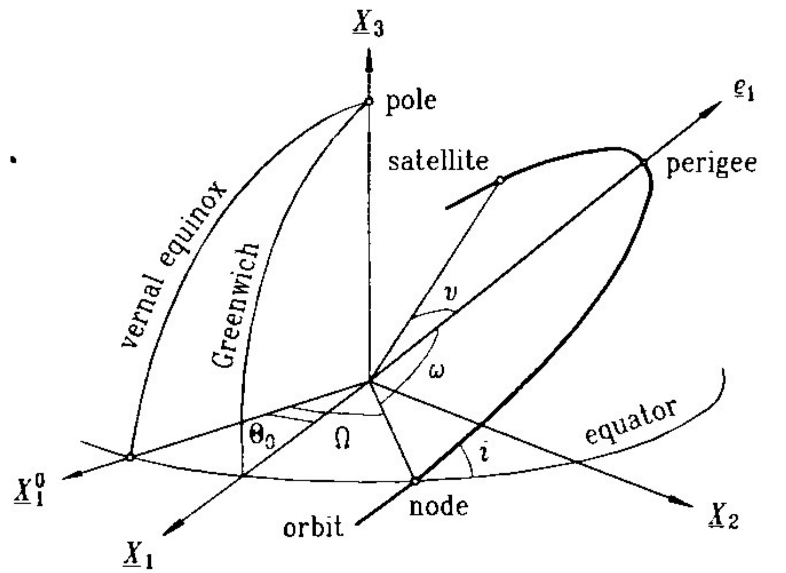
Orbite képlérienne

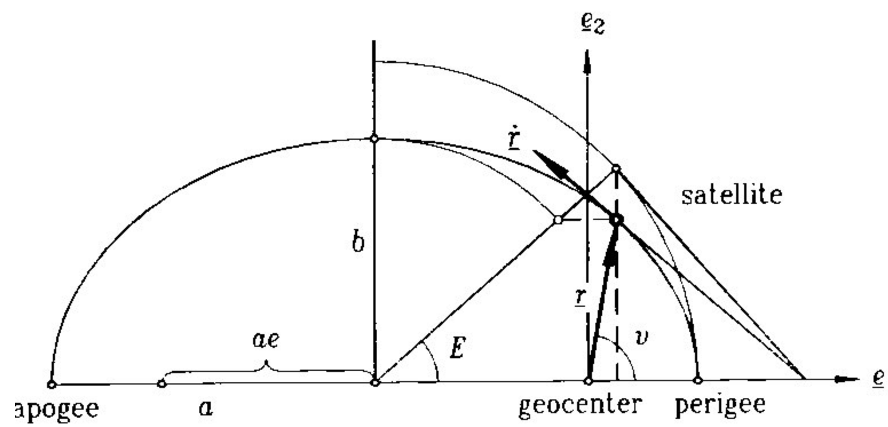
- Le calcul de l'orbite se fait dans le plan orbital (e_1,e_2)
- 3 rotations (Ω,i,ω) permettent de passer à un repère géocentrique inertiel (X^0_1, X_2, X_3)
- Une rotation supplémentaire de Θ_o (heure sidérale) permet de passer au repère géocentrique lie a la Terre (X_1, X_2, X_3)

$$\vec{\rho} = R\vec{r}$$

$$R = R_3\{\Theta_o\}R_3\{-\Omega\}R_1\{-i\}R_3\{-\omega\}$$

- Il faut donc connaître l'orientation et la rotation de la Terre, qui varient en fonction du temps.





Ω = longitude du noeud ascendant
ω = argument du périgée
i = inclinaison

v = anomalie vraie
M = anomalie moyenne
E = anomalie excentrique

Mouvement képlérien

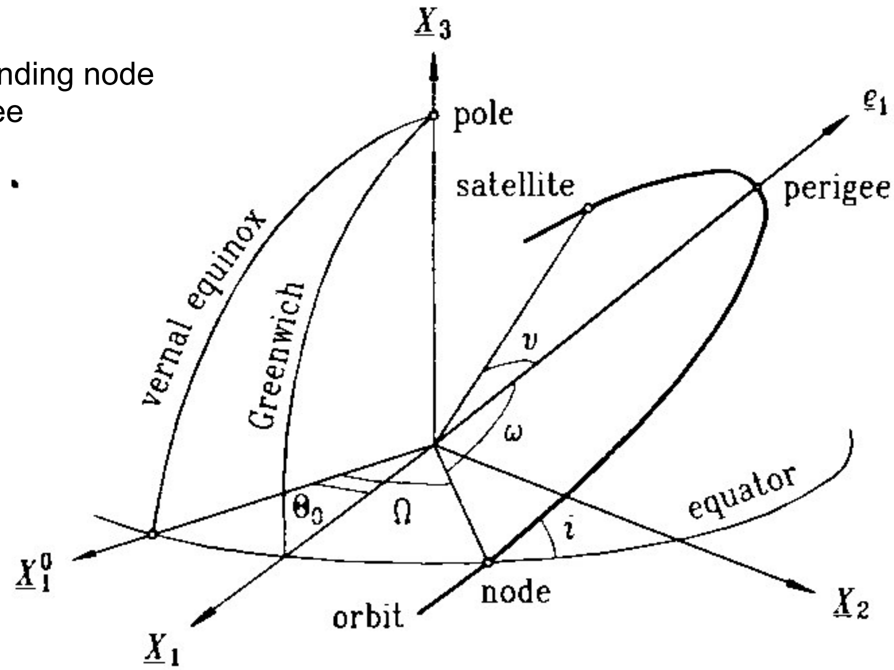
In the **Earth centered inertial system** ($X_1^0, X_2^0{=}X_2, X^O_3{=}X_3$), ρ relates to *r* through the combination of 3 rotations:

$$\vec{\rho} = R\vec{r}$$
$$R = R_3\{-\Omega\}R_1\{-i\}R_3\{-\omega\}$$

$$R = \begin{bmatrix} \cos\Omega\cos\omega - \sin\Omega\sin\omega\cos i & -\cos\Omega\sin\omega - \sin\Omega\cos\omega\cos i & \sin\Omega\sin i \\ \sin\Omega\cos\omega + \cos\Omega\sin\omega\cos i & -\sin\Omega\sin\omega + \cos\Omega\cos\omega\cos i & -\cos\Omega\sin i \\ \sin\omega\sin i & \cos\omega\cos i & \cos i \end{bmatrix}$$

[think of what it takes for (e_1, e_2, e_3) to align with (X_1^0,X_2,X_3)]

Ω = ascension of ascending node
ω = argument of perigee
i = inclination
v = true anomaly



Orbite képlérienne

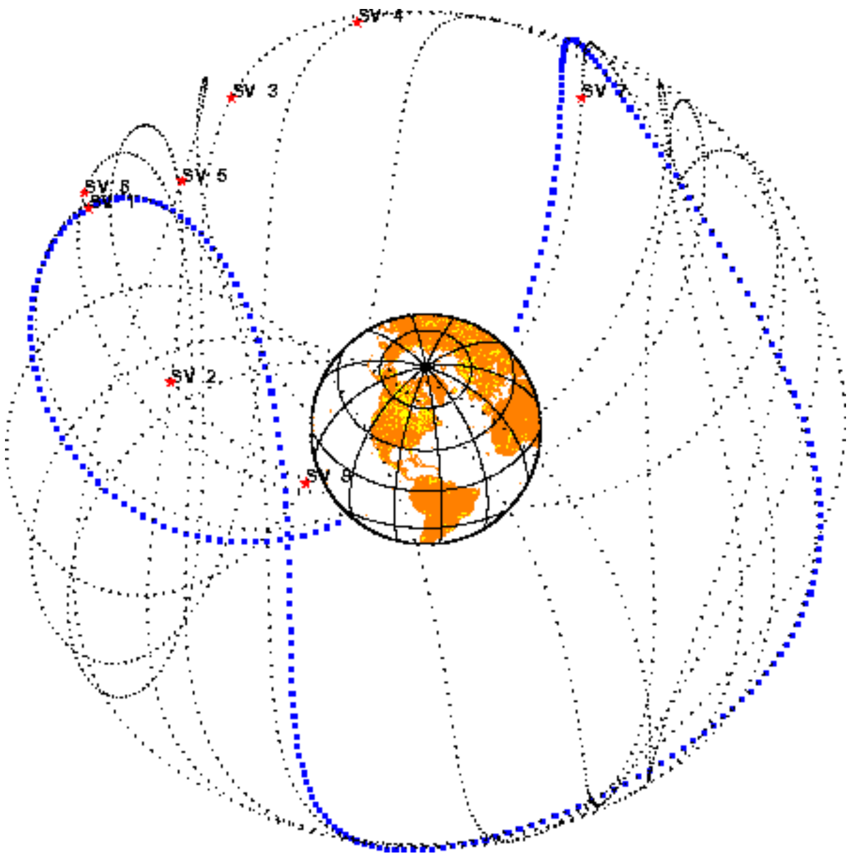


Fig. T. Herring (MIT)

Orbite GPS, repère lié à la Terre

1. Signal GPS contient les paramètres orbitaux *M, e, a,* Ω, *i,* ω , *n*
2. Les paramètres orbitaux sont utilisés pour calculer l'orbite dans un repère inertiel
3. L'orbite est ensuite transformée dans un repère lié à la terre
4. Petite difficulté: en toute rigueur les transformation de repère inertiel à terrestre doivent prendre en compte les irrégularités de la rotation de la Terre.
5. Important de prendre en compte les perturbations gravitationnelles et la pression de radiation solaire (coefficients inclus dans le signal GPS)

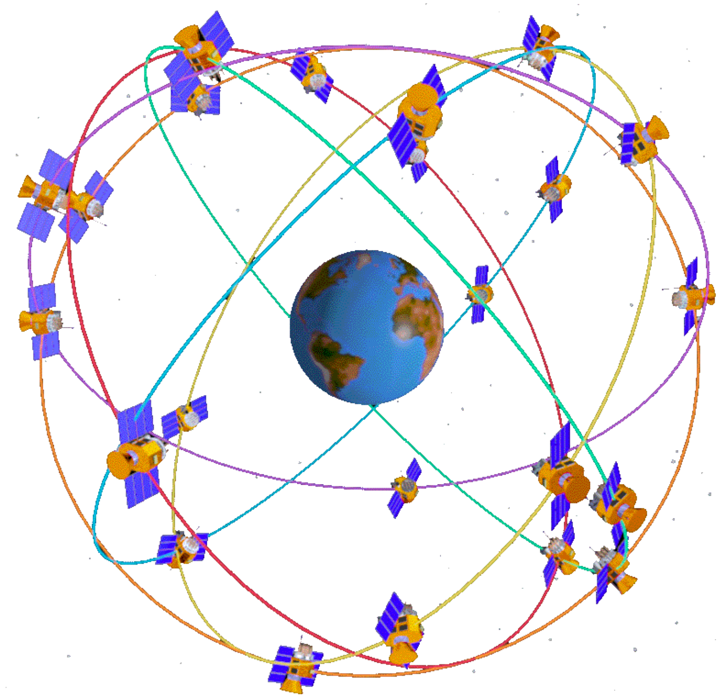
Perturbations de l'orbite

- Gravitationnelles:
  - Aplatissement (J_2)
  - Satellites GPS ~20 000 km => seulement quelques termes du potentiel de gravité sont nécessaires
  - Troisième corps: nécessite de connaitre les éphémérides lunaires et solaires
  - Marées: effet négligeable

- Non-gravitationnelles:
  - Pression de radiation solaire: impact des photons émis par le soleil – modélisé
  - Manœuvres

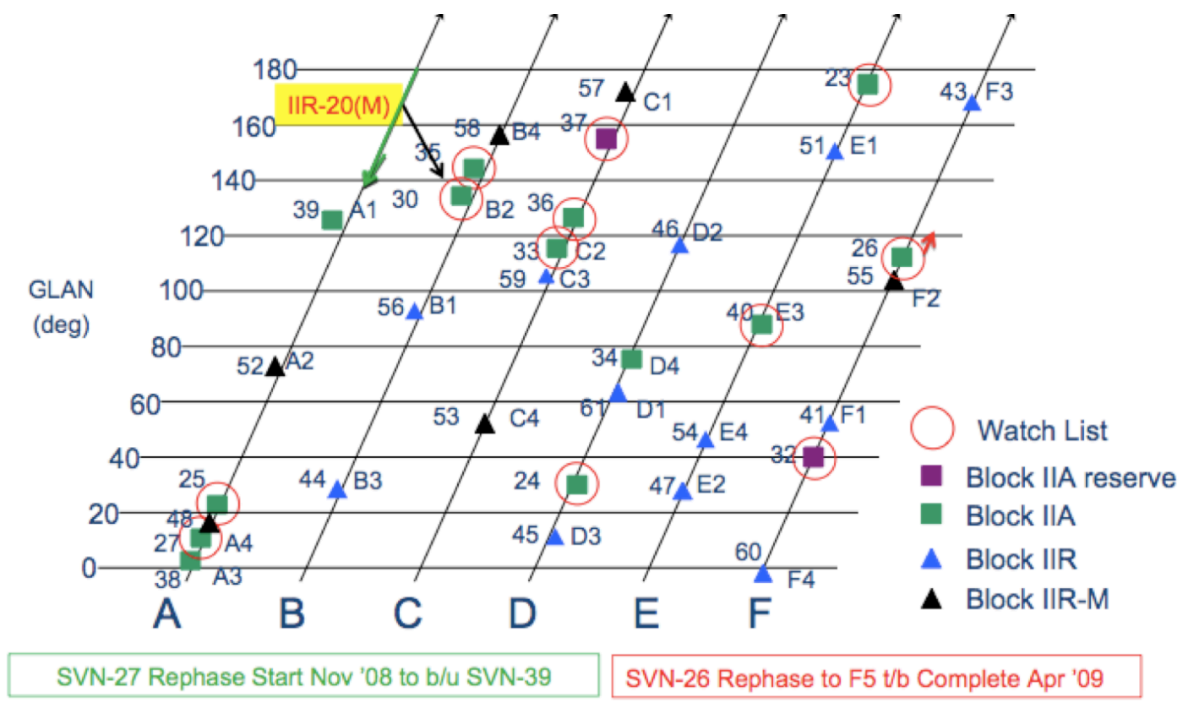
Terme	Acceleration (m/sec^2)	Perturbation (après 2 jours)
Central	0.6	-
J_2	$5x10^{-5}$	14 km
Other gravity harmonics	$3x10^{-7}$	0.1-1.5 km
Third body (moon, sun)	$5x10^{-6}$	1-3 km
Earth tides	10^{-9}	0.5-1 m
Ocean tides	10^{-10}	0-2 m
Drag	~0	-
Solar radiation	10^{-7}	0.1-0.8 km
Albedo radiation	10^{-9}	1-1.5 m

La constellation GPS

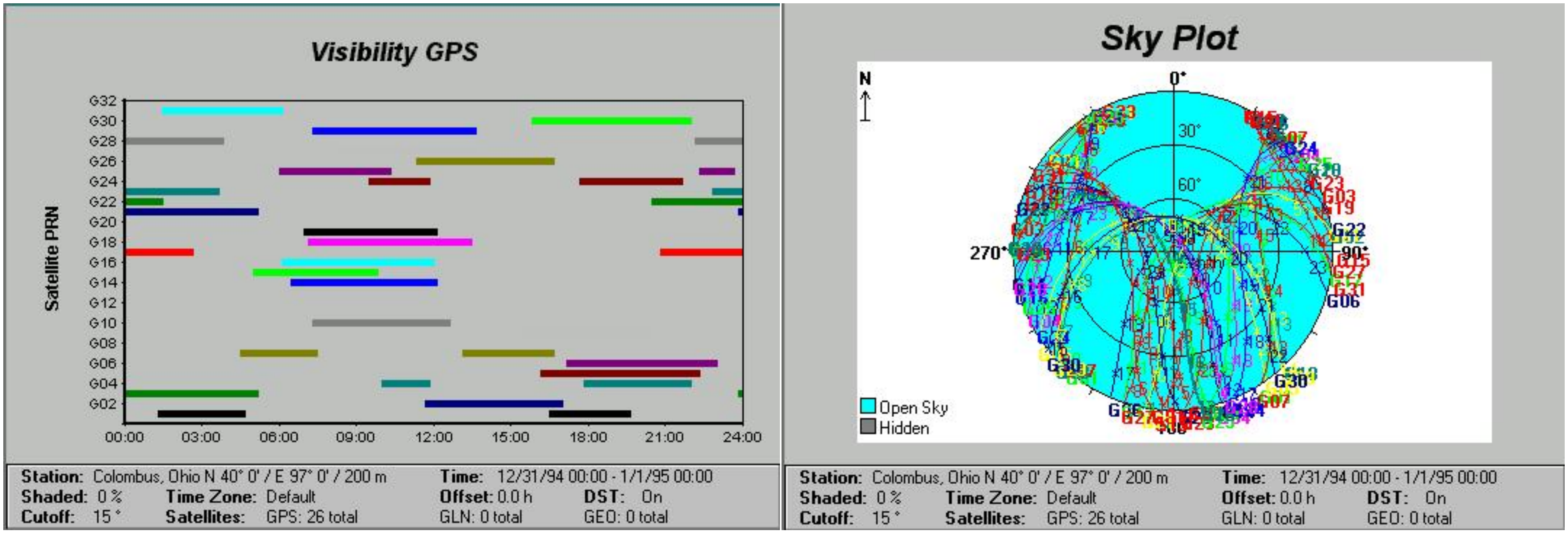


- Caractéristiques des orbites
  - Semi grand axe = 26,400 km
  - Eccentricité < 0.02 => orbites quasi-circulaires
  - Période = 12 heures sidérales => la constellation se répète chaque 24 heures – 4 minutes
  - 6 plan orbitaux, 4-6 satellites par plan
  - Inclinaison = 55.5 degrés

- Constellation complète (depuis mars 1994) = 24 satellites (actuellement 30)



La constellation GPS

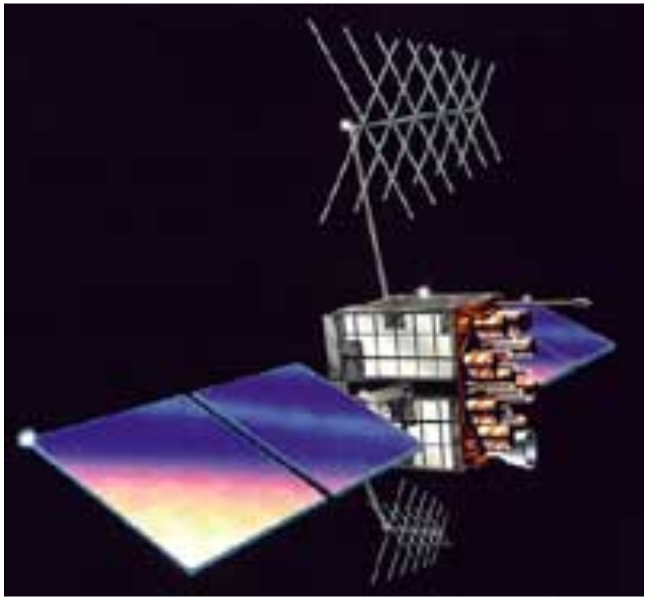


Graphiques montrant les satellites visibles dans l'Ohio le 12 décembre 1994

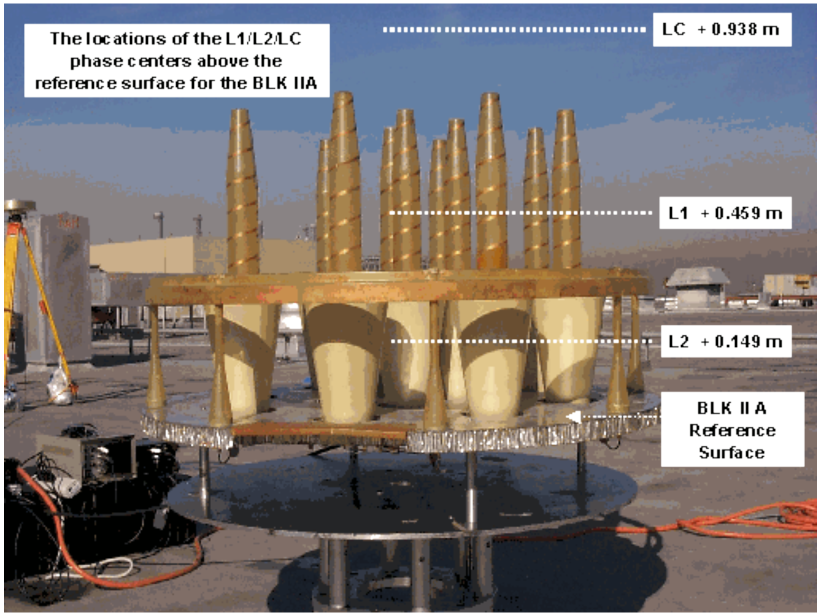
- Les satellites sont visibles jusqu'à 6 heures d'affilée chacun
- 6-12 satellites toujours visible simultanément, fonction de:
  - La géométrie de la constellation
  - La position de l'utilisateur
  - Obstructions: arbres, « canyons urbains », etc.

Les satellites GPS

- Alimentation solaire
- Communiquent avec des stations de contrôle au sol
- Contiennent deux horloges atomiques (Rb ou Ce) – synchronisées entre tous les satellites
- Pointent leur antenne vers la terre (angle solide ~45 degrés)
- Émettent deux signaux de navigation en bande L:
  - 1575.42 MHz (L1)
  - 1227.60 MHz (L2)
  - Centre de phase ne coïncide pas avec centre de gravite du satellite…

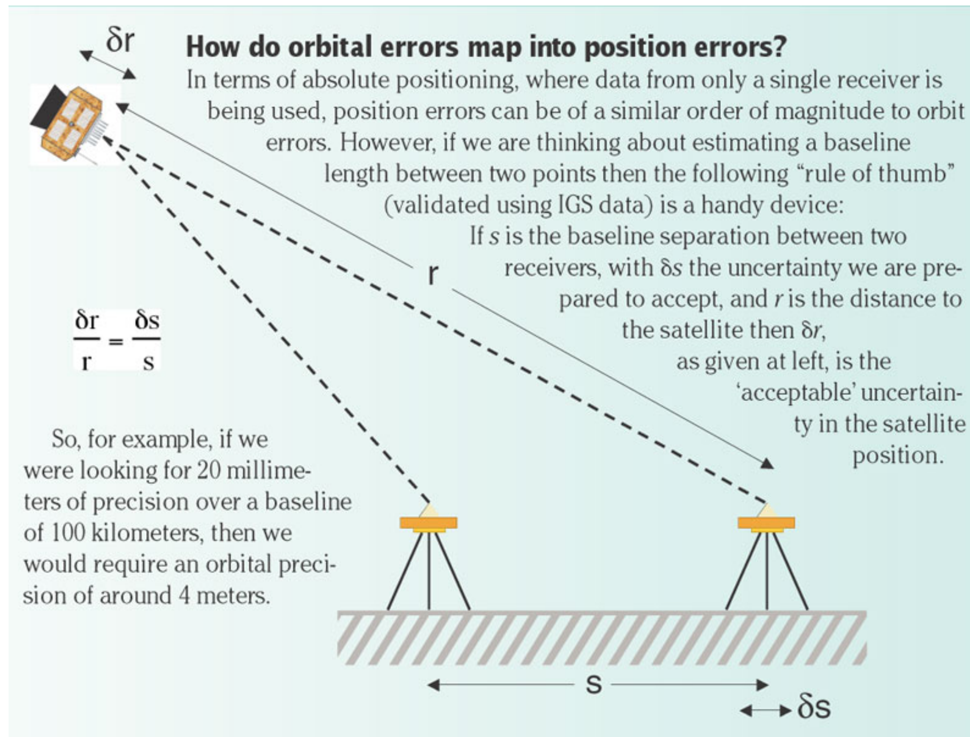


Block IIR satellite



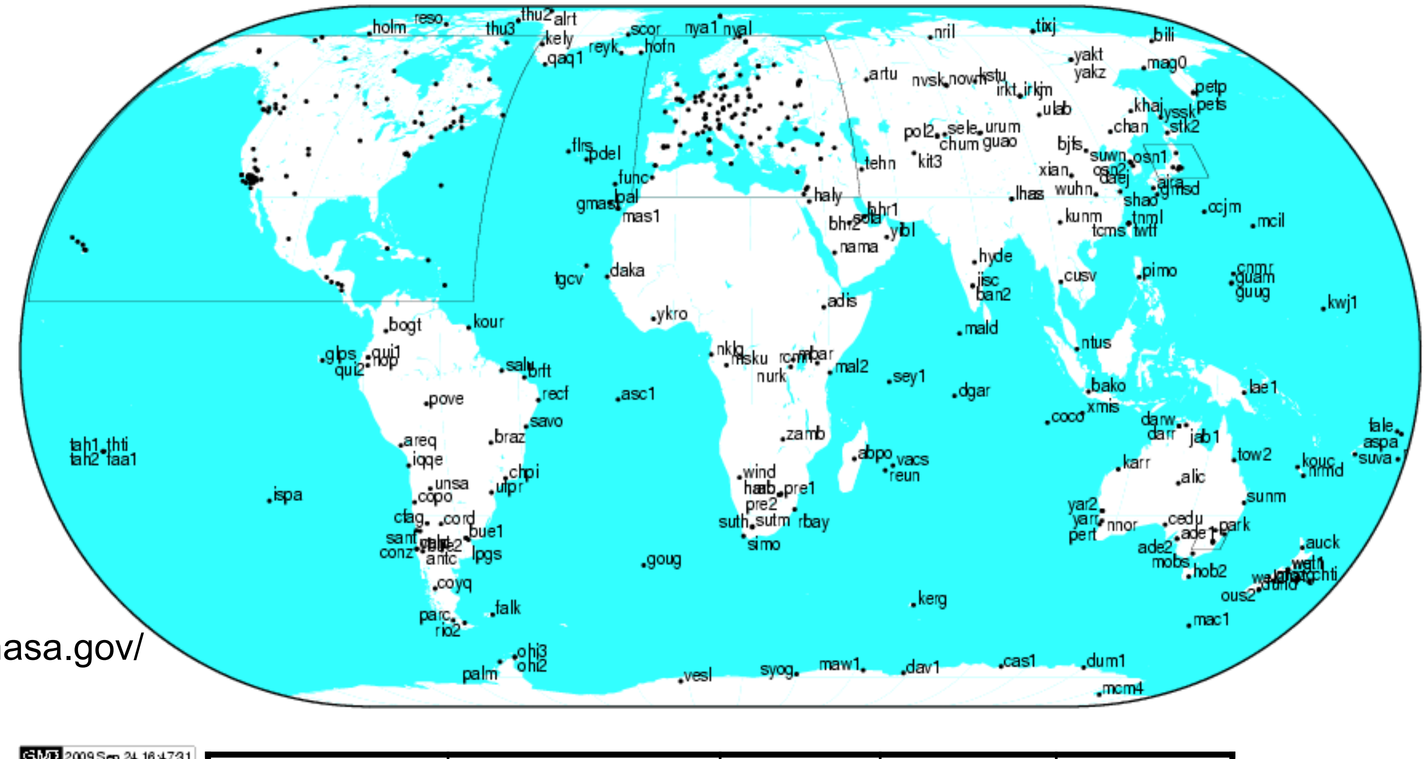
Précision des orbites GPS

- Précision des orbites émises:
  - ~ 10 m, peut être dégrade à 300 m par USDoD
  - $\delta s/s = \delta r/r$ => si δr = 200 m (r = 20000 km), alors:
    - s = 100 km => δs = 1 m, pas suffisant pour des applications géophysiques
    - s = 1 km => δs = 1 cm, suffisant pour un géomètre
  - Insuffisant pour les applications géophysiques
- Pour les applications scientifiques nécessitant une précision sub-centimétrique:
  - Précision < 10 cm: impact < 0.5 mm pour une ligne de base de 100 km
  - Orbites indépendantes du DoD



For a given satellite orbit error, δr, the error in the estimated baseline vector length, δs, in relative GPS positioning, is roughly proportional to the ratio of baseline length to the distance to the satellite.

IGS: The International GNSS Service for Geodynamics



http://igscb.jpl.nasa.gov/

Orbits Type	Accuracy/clock accuracy	Latency	Updates	Sample interval
Broadcast	~260 cm/~7 ns	Real-time		daily
Final	< 5 cm/0.1 ns	14 days	Weekly	15 min
Rapid	5 cm/0.2 ns	17 hours	Daily	15 min
Predicted (ultra-rapid)	~10 cm/~7 ns	Real-time	Twice daily	15 min