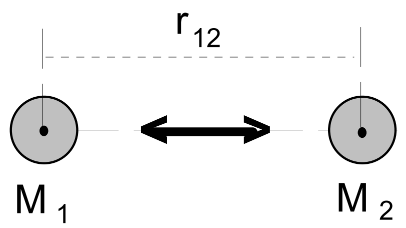
Force gravitationnelle

1/ attraction réciproque de deux masses



Les deux masses M_1 et M_2 s'attirent mutuellement avec une force F_{12} telle que :

$$\vec{F}_{12} = -G \frac{M_1 M_2}{r^2} \vec{u}_{12}$$

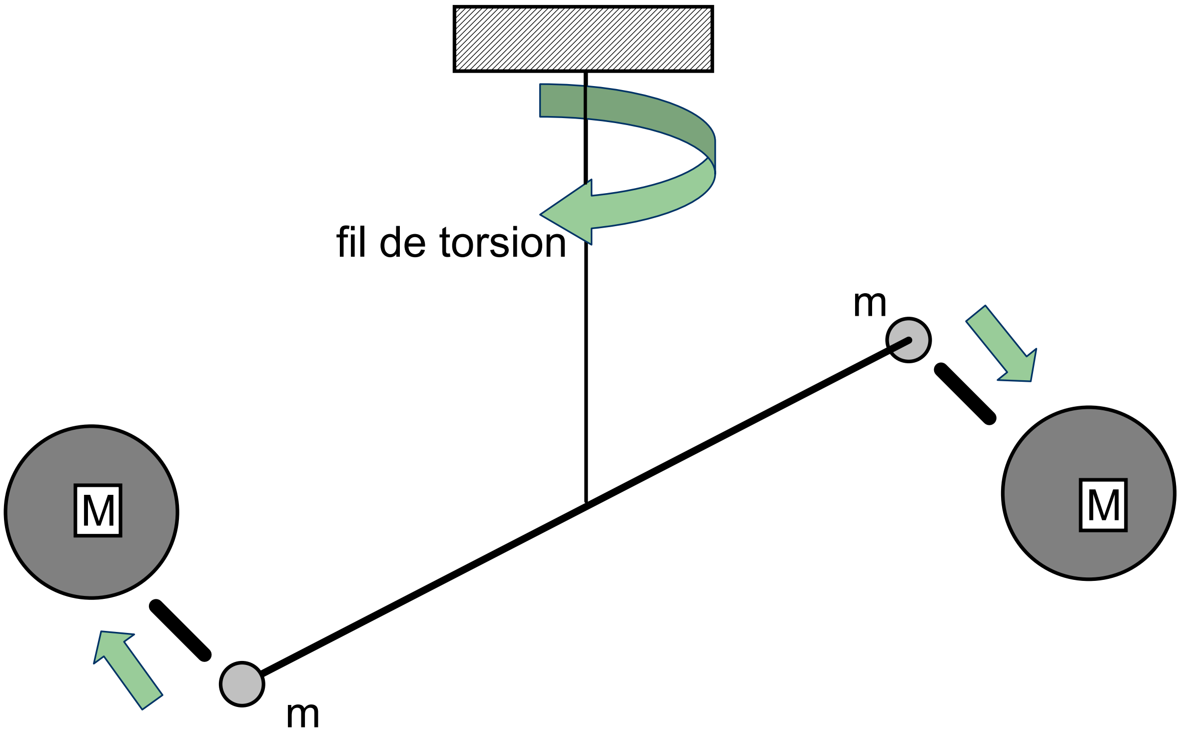
où G est la constante de gravitation universelle : $G = 6.674\ 10^{-11}$ S.I.

$[G] = [\text{force}] \,.\, [\text{longueur}]^2 / [\text{masse}]^2$

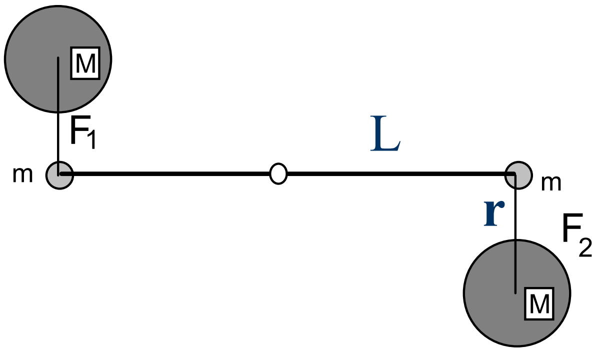
$= \text{kg.m.s}^{-2} \,.\, \text{m}^2 \,.\, \text{kg}^{-2}$

$= \text{m}^3 \,.\, \text{kg}^{-1} \,.\, \text{s}^{-2}$

Determination de G: experience de Cavendish



Determination de G: experience de Cavendish



chacune des grosses masses exerce une attraction sur la petite masse la plus proche (on néglige l'effet sur la petite masse la plus lointaine), et provoque une rotation du pendule.

les forces gravitationnelles F_1 et F_2 valent : $\mathbf{F_1 = F_2 = F = GMm/r^2}$ (où r est la distance entre la grosse et la petite masse.)

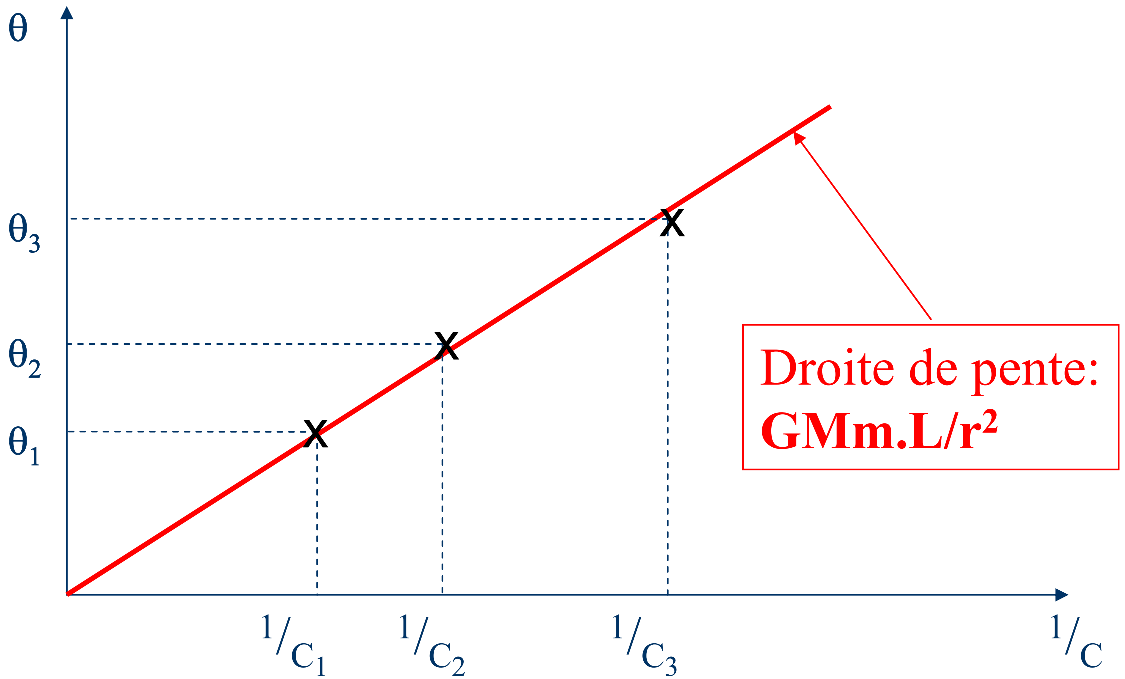
le couple gravitationnel vaut donc : $\mathbf{L.F = GMm.L/r^2}$

et le couple de torsion du pendule vaut : $\mathbf{C.\theta}$

à l'équilibre, les deux couples s'annulent : $\mathbf{GMm.L/r^2 = C.\theta}$ ce qui donne **G**.

$GMm.L/r^2 = C.\theta$

Determination de G: experience de Cavendish



experience de Cavendish : la pesée de la Terre

Une fois G connue, on en déduit la masse et la densité de la Terre. Sachant que la force d'attraction à la surface vaut environ **F = 10 m/s2** (valeur donnée par la mesure de la vitesse de la chute des corps), on peut poser :

$$F = \frac{GM_{Terre}}{R_{Terre}^2}$$

avec $\mathbf{R_{Terre}}$ = 6400 km, on trouve : $\mathbf{M_{Terre} = 6\ 10^{24}\ kg}$

et : $\boldsymbol{\rho_{Terre} = 5500\ kg/m^3}$

$$F = \frac{GM_{Terre}}{R^2_{Terre}}$$

experience de Cavendish : la pesée de la Terre

Cavendish obtint de très bons résultats (en 1798!).

$$G_{Cavendish} = 6,754\ 10^{-11}\ N\ m^2\ kg^{-2}$$

$$G_{reel} = 6,674\ 10^{-11}\ N\ m^2\ kg^{-2}$$

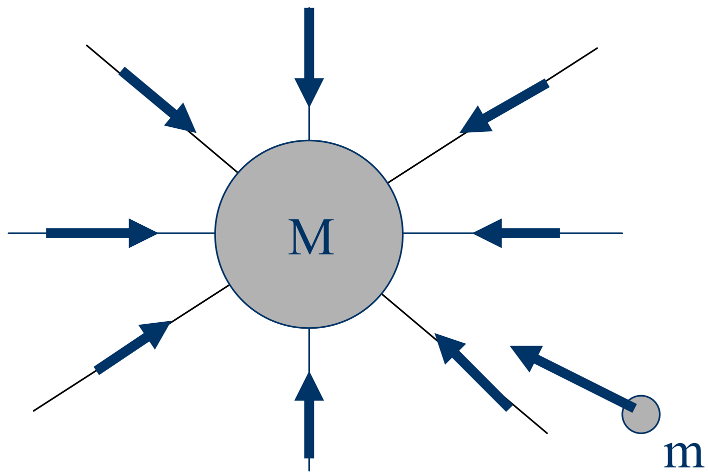
$$M_{Cavendish} = 5.980\ 10^{24}\ kg$$

$$M_{reel} = 5.974\ 10^{24}\ kg$$

$$d_{Cavendish} = 5.48\ g\ cm^{-3}$$

$$d_{reel} = 5.54\ g\ cm^{-3}$$

Champ de gravité créé par une masse



Une masse **M** placée dans l'espace va créer un « champ de gravité » qui va occuper tout l'espace

$$\vec{g}(x,y,z) = \vec{g}(r,\theta,\varphi) \qquad \left(= GM/r^2 \text{ dans ce cas particulier} \right)$$

Dans le champ de gravité (**g**) ainsi créé, toute particule de matière de masse **m**, placée dans ce champ, subira une force de gravitation **F = m g**

Potentiel de gravité

le rotationnel du champ de gravité est nul :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{u} = \begin{bmatrix} \left[\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta . u_\varphi) - \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\varphi}(u_\theta) \right] \vec{e}_r \\ \left[\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\varphi}(u_r) - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(r.u_\varphi) \right] \vec{e}_\theta \\ \left[\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(r.u_\theta) - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial\theta}(u_r) \right] \vec{e}_\varphi \end{bmatrix}$$

avec

$$\vec{g} = \begin{bmatrix} \dfrac{GM}{r^2}.\vec{e}_r \\ 0.\vec{e}_\theta \\ 0.\vec{e}_\varphi \end{bmatrix} \qquad \text{(fonction de r uniquement)}$$

on obtient aisément

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{g} = \vec{0}$$

Potentiel de gravité

Or, le rotationnel du gradient d'un champ est toujours nul (relation fondamentale des opérateurs n° 4).

$$rot(grad V) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial V}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial y} = 0 \\ \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} = 0 \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} = 0 \end{bmatrix}$$

donc il existe un champ scalaire V tel que : $\vec{g} = -grad(V)$

Alors, le rotationnel de g sera alors automatiquement nul: par construction. On dit que g dérive d'un potentiel, et que V est le potentiel de gravité.

Dans le cas simple précédent où g vaut GM/r2, il est évident que le potentiel V vaut : GM/r

Potentiel de gravité

D'autre part, la divergence du champ de gravité est nulle :

$$\vec{\nabla}.\vec{u} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 u_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta . u_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}(u_\varphi)$$

Et là encore, seule le composante de g selon r est non nulle, et vaut $g_r = GM/r^2$.

On a donc :

$$\vec{\nabla}.\vec{u} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \frac{GM}{r^2}) + 0 + 0 = 0$$

On a donc bien : div (g) = 0 ⇔ div(grad(V)) = 0 ⇔ Laplacien (V) = 0

Le potentiel de gravité est donc un champ scalaire à Laplacien nul.
On pourra donc l'exprimer sur la base des harmoniques sphériques !!!

Développement en harmoniques sphériques

Le potentiel de gravité terrestre observé peut donc s'écrire sur la base des harmoniques sphériques :

$$Y_l^m(r,\theta,\varphi) = (a_l^m r^l + b_l^m r^{-(l+1)}) P_l^m(\cos\theta) e^{im\varphi}$$

à l'évidence, le potentiel ne peut pas devenir infini quand r devient très grand (et que l'on s'éloigne de la source). Le seul polynome en r qui ait un sens physique est donc celui qui décroit avec r, c'est à dire le polynome en $1/r^{(l+1)}$. Le potentiel s'écrit donc :

$$\begin{aligned}
V(r,\theta,\varphi) &= \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{l} V_{l,m}.Y_l^m(r,\theta,\varphi) \\
&= \sum_{l=0}^{+\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{l+1} \sum_{m=-l}^{l} V'_{l,m}.Y_l^m(\theta,\varphi) \\
&= \frac{GM}{r}\left[1 + \sum_{l=1}^{+\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{l} \sum_{m=-l}^{l} V''_{l,m}.Y_l^m(\theta,\varphi)\right]
\end{aligned}$$

$$V(r,\theta,\varphi) = \frac{GM}{r}\left[1+\sum_{l=1}^{+\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^{l}\sum_{m=-l}^{l}V''_{l,m}.Y_l^m(\theta,\varphi)\right]$$

- Au premier ordre (*l*=0), on retrouve bien le potentiel sphérique V = GM/r. Les termes suivants représentent donc des *perturbations* par rapport à ce potentiel simple qui serait celui d'une planète à symétrie sphérique.

- La dépendance radiale du potentiel de gravité est donnée par le terme en $(R/r)^{l+1}$ qui indique que plus on s'éloigne de la source du champ, plus les ondulations à courtes longueur d'onde sont lissées. On retrouve donc un potentiel sphérique si on s'éloigne suffisamment de la planète (r >> R).

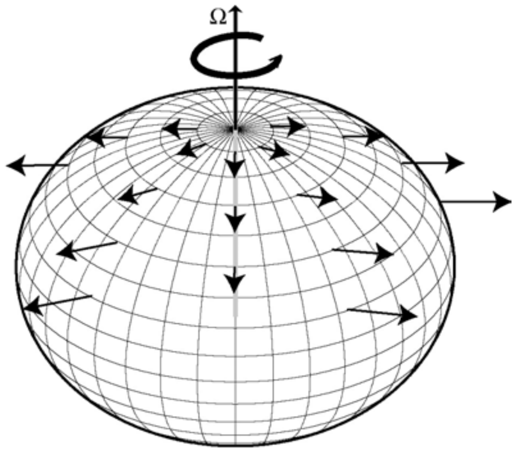
- Le choix comme référentiel de description d'un repère dont l'origine est le centre de masse de la planète, permet d'annuler les termes de degré l=1, qui correspondent à un décalage du centre du potentiel (centre de masse) suivant chacun des trois axes.

Potentiel hydrostatique

Newton et **Huygens** introduisent les notions de gravités et d'accélération centrifuge :

$$g = {}^{GM}/_{R^2} \quad \text{and} \quad F = R\,\Omega^2$$

=> une sphère molle en rotation doit s'aplatir aux pôles



la force centrifuge due à la rotation Ω, vaut sur l'équateur : $F_c = R\omega^2$

la force de gravité vaut : $F_g = GM/R^2$

Le rapport des deux forces vaut donc : $\alpha = F_c/F_g = R^3\omega^2/GM$

L'aplatissement théorique, c'est à dire la différence des rayons équatorial et polaire rapportée au rayon moyen, est de l'ordre de α.
pour la Terre on trouve $\alpha \sim 1/290$, qui correspond à un aplatissement ~20 km.

Développement Ylm du Potentiel hydrostatique

Il est facile de réaliser que l'hypothèse d'un aplatissement aux pôles conduit à proposer pour la Terre un potentiel de forme simple et symétrique:

En effet, la symétrie des forces agissantes (symétrie cylindrique) implique que la variation du potentiel ne peut être que :

- **latitudinale (seule la latitude joue) => $m = 0$**
- **symétrique par rapport à l'équateur => l pair**

On obtient donc un potentiel dit « hydrostatique » :

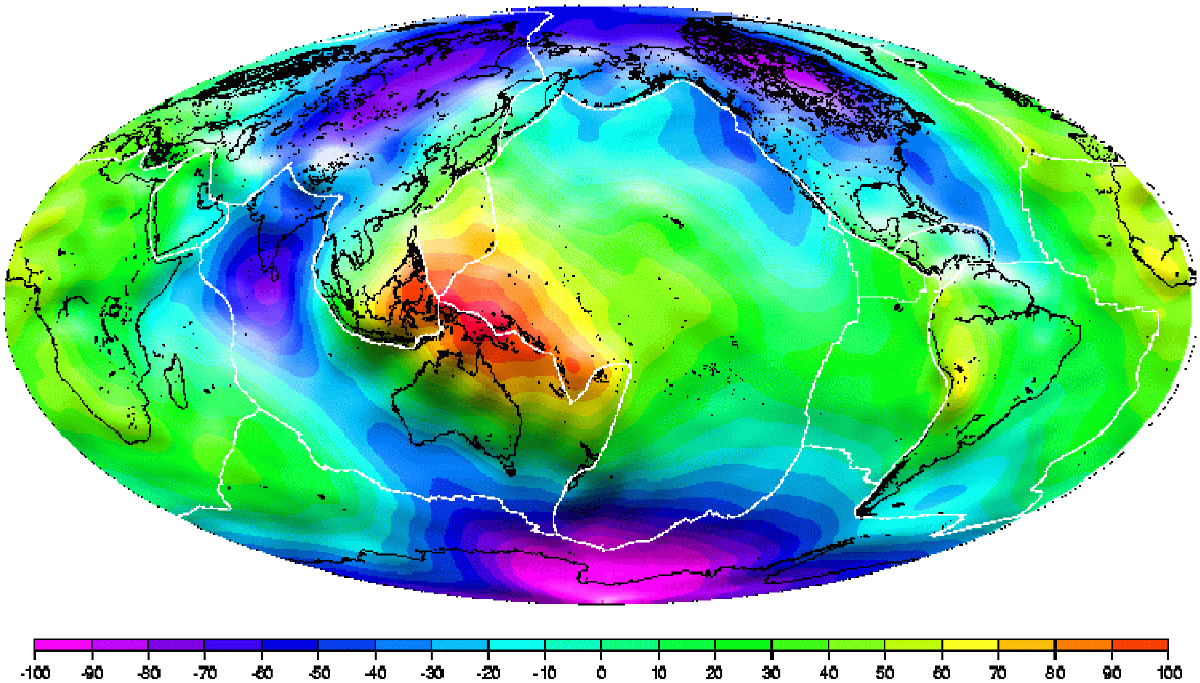
$$V_H(r,\theta,\varphi) = \frac{GM}{r}\left[1 + \sum_{l.pair}^{+\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^l V_{l,0}.Y_l^0(\theta,\varphi)\right]$$

$$V(r,\theta,\phi) = \sum K_{l,m} .f(r).\ P_{l,m}(\cos\theta)\ .\ e^{im\phi}$$

Potentiel du champ de gravité -> Géoide

- Si la Terre était une sphère homogène en rotation, alors sa forme serait celle d'un ellipsoïde, et **de même celle du potentiel de gravité**.
- Les termes de degrés plus grands que 2 sont des **perturbations** qui s'ajoutent à cet ellipsoïde.
- Le potentiel généré par une sphère en rotation (qui devient un ellipsoïde) est appelé **potentiel hydrostatique**. (*Cela parce que si une planète était entièrement liquide, alors la surface de cette planète suivrait exactement cet ellipsoïde.)*
- De fait, la **surface des océans** (liquide) suit exactement le potentiel de gravité. Plus exactement une surface sur laquelle la gravité est constante : une **équipotentielle de gravité**. On nomme cette surface le **Géoïde**.
- Le Géoïde hydrostatique est la surface que les océans suivraient si la Terre n'était qu'une sphère **homogène** en rotation.
- Le **Géoïde non-hydrostatique** est ce qu'il reste une fois que cet effet est pris en compte.(*il serait nul si la Terre était une simple sphère homogène en rotation*).

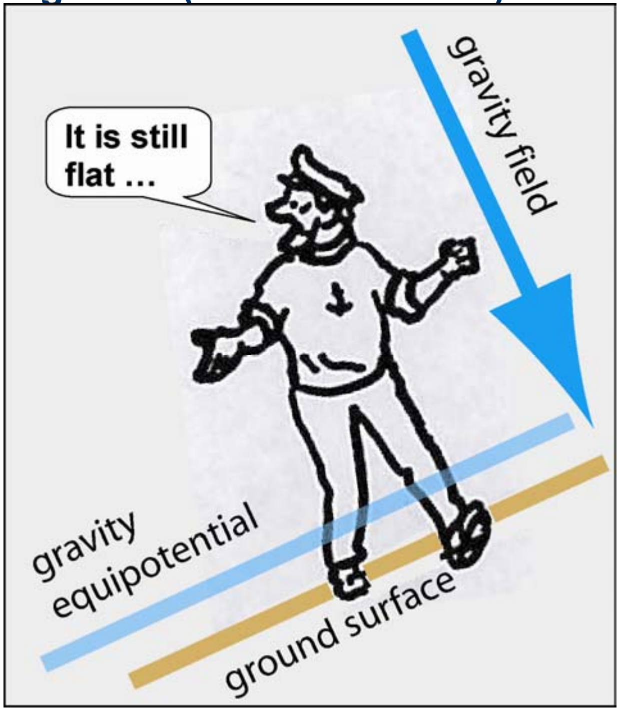
Géoïde : **Géoïde Non-hydrostatique, modèle GEM-T1**

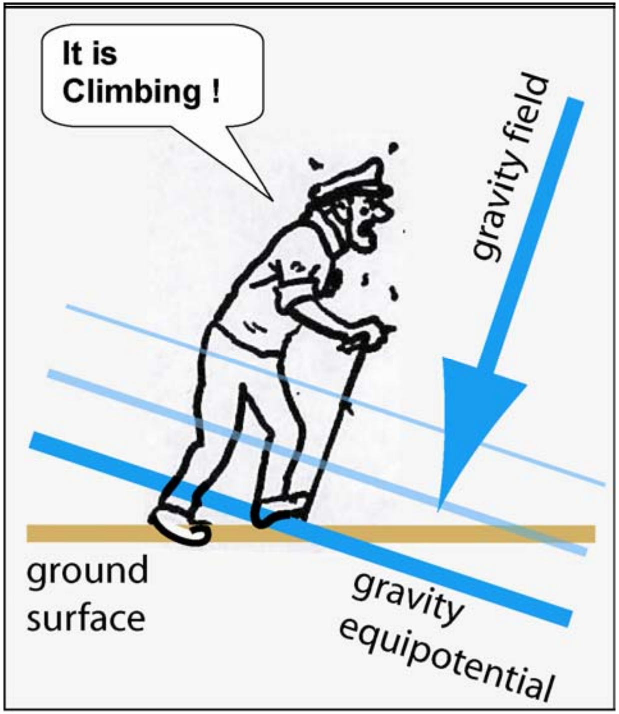


Les creux sont en bleu, les bosses en rouge. Le Géoïde ondule de +/- ~100 m. Sa forme est celle d'une balle de Tennis.

Géoïde : Définition de l'altitude

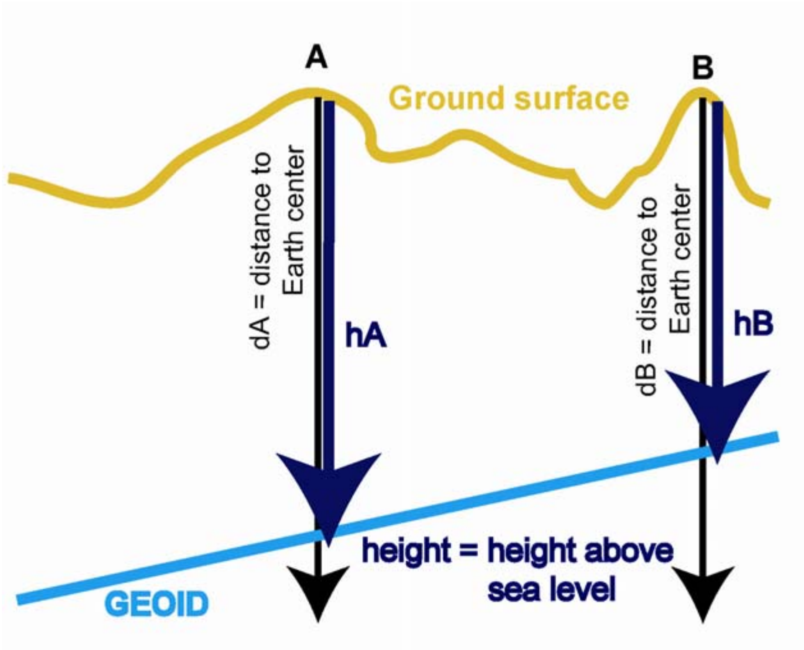
L'altitude (la hauteur) **n'est pas** un concept purement géométrique (i.e. la distance d'un point à un autre). Elle est définie **par rapport au potentiel de gravité (donc au Géoïde)**





Geoid : Definition of altitude

Altitude (height) **is not** a purely geometrical concept (i.e. distance from one point to the other) it is **defined with respect to the gravity potential**.



2 points **A** and **B** at ground level

One might think their altitude is d_A and d_B

But it is not !!!!

The altitude is the distance to the **geoid (**i.e. the **sea level) :** **h_A** and **h_B**

If the Geoid is not flat (i.e. at the same distance from the center of the Earth at A and B), **then the altitude changes**

$$G(\theta,\phi) = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{l} K_{l,m} \cdot P_{l,m}(\cos\theta) \cdot e^{im\phi}$$

Geoid : Spectral contains

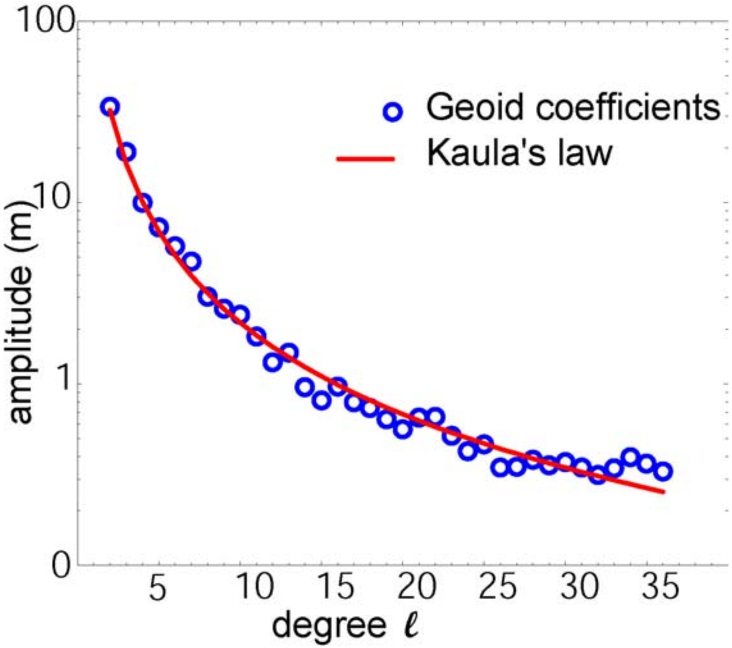
Spectrum of a field = amplitude of coefficients at a given degree l of the spherical harmonic decomposition

$$S_l = \sqrt{\sum_{m=-l}^{l} (K_{l,m})^2}$$

The spectrum of the Geoid obeys a power law :

$$S_l \sim {}^{1}/_{l^2}$$

It is called **Kaula's law**



$$V(\theta,\phi) = \sum_{l=0}^{+\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{l} \sum_{m=-l}^{l} K_{l,m} \cdot P_{l,m}(\cos\theta) \cdot e^{im\phi}$$

Altitude dependent spectral contains :

The potential **V** at altitude r-R is attenuated by a coefficient :

$$\left({}^{R}/_{r}\right)^{l}$$

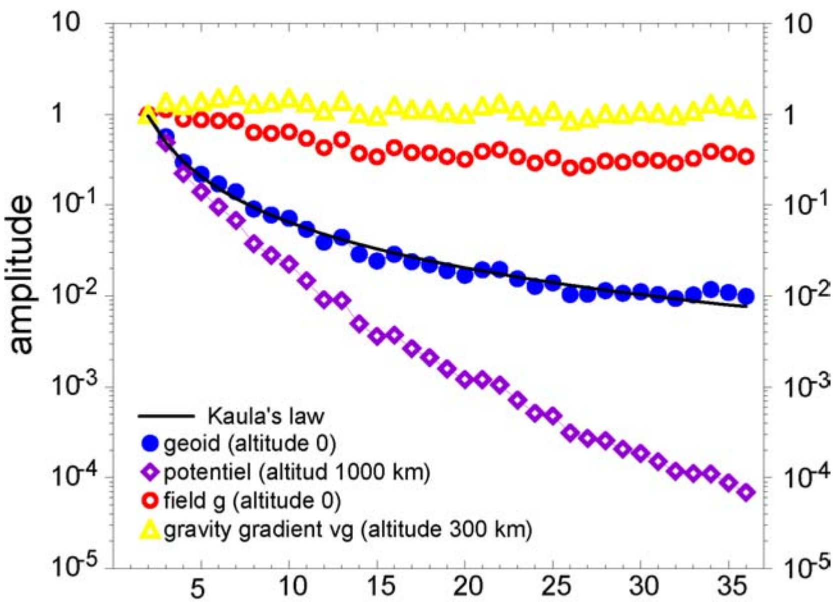
The gravity field **g** is the derivative of the gravity potential :

$$g = {}^{\partial V}/_{\partial r}$$

$$\Rightarrow \quad g_l \sim V_l \times l$$

The gradient of the gravity field ∇**g** is the 2nd derivative of the gravity potential :

$$\Rightarrow \quad \nabla g_l \sim V_l \times l^2$$



Correlation coefficients

Correlation between 2 fields (A and B) =

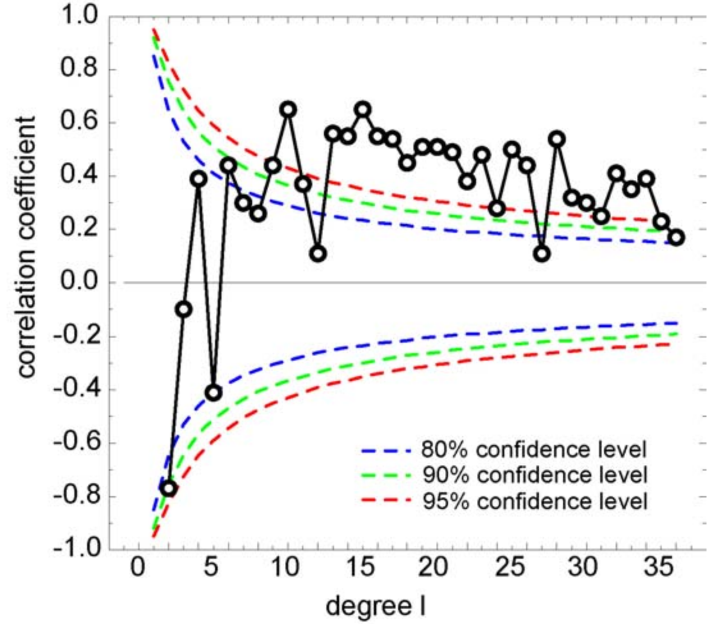
amplitude of cross products of coefficients at a given degree l of the spherical harmonic decomposition

$$C_l = \frac{\sum_{m=-l}^{l} (A_{l,m} \cdot B_{l,m})}{\sqrt{\sum_{m=-l}^{l} (A_{l,m})^2 \sum_{m=-l}^{l} (B_{l,m})^2}}$$

The value of C represent the probability that the field are correlated :

- **0** means no correlation
- **1** means high correlation

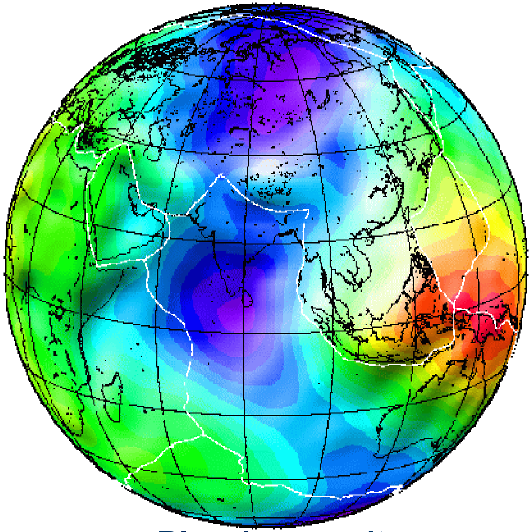
Correl. Geoid / surface topography



- No correlation for long wavelength
- High correlation for short wavelength

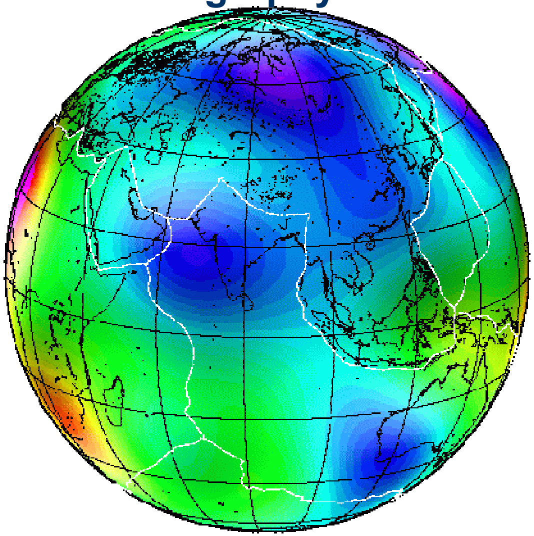
Origin of the Geoid : density anomalies

Geoid over India



Blue=low gravity
Red = high gravity

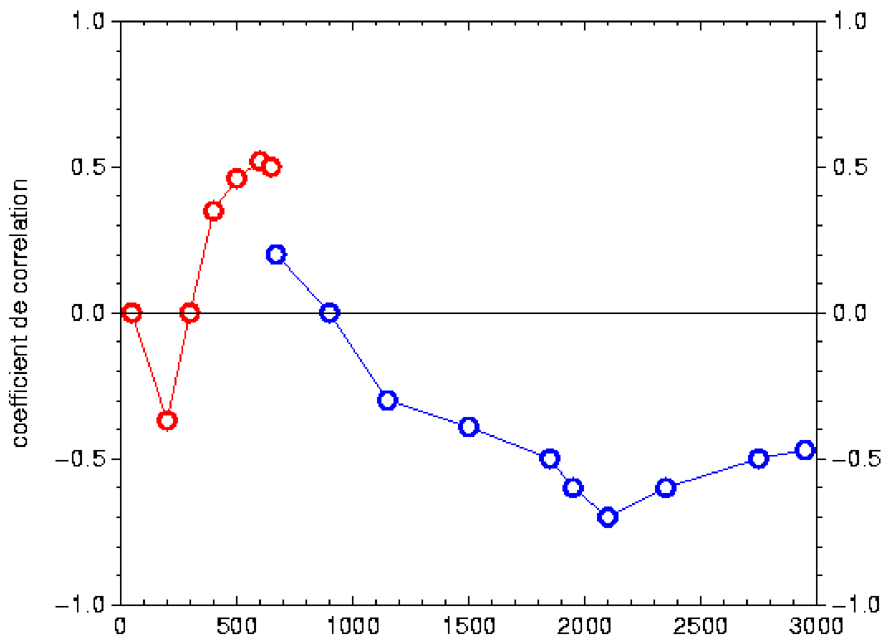
Seismic tomography in the mantle



Blue="cold"="more dense"
Red = "hot" = "less dense"

It is very clear that long wavelength Geoid lows are associated to cold and dense material in the mantle ???????

Corrélation Géoïde – Tomographie sismique

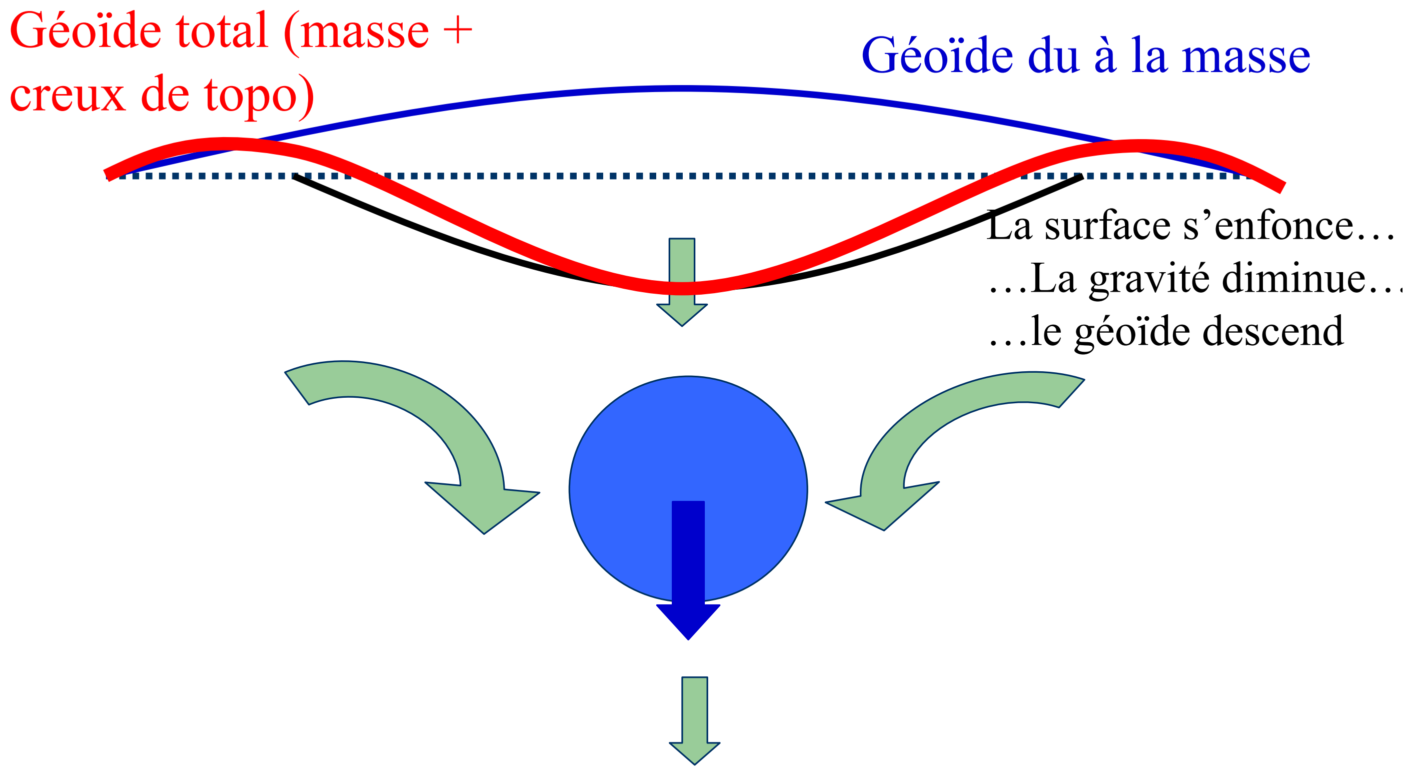


corrélation totale (sommé sur tous les degrés *l*) entre le géoïde observé et le géoïde synthétique calculé à partir des anomalies de densité dans le mateau à une profondeur donnée.

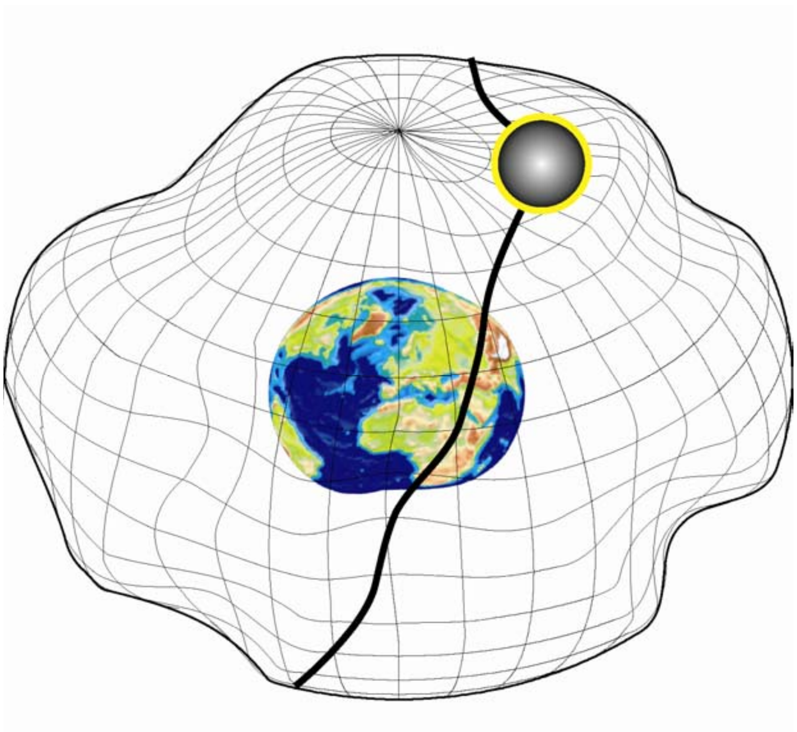
Il y a corrélation significative à deux profondeurs :
positive à moyenne profondeur (700 km)
négative à grande profondeur (2000 - 2500 km)

Il apparait clairement que ce sont les anomalies de densité situées dans le manteau inférieur qui sont à l'origine des ondulations du Géoide. Il existe aussi une petite zone où il y a corrélation : la base du manteau inférieur. A cet endroit, l'effet décrit plus d'aspiration de la surface vers le bas ne joue plus : la masse est "posé sur le plancher" au lieu d'etre "suspendue au plafond".

Explication : Géoïde généré par une masse



Measurement of the Geoid : spatial geodesy



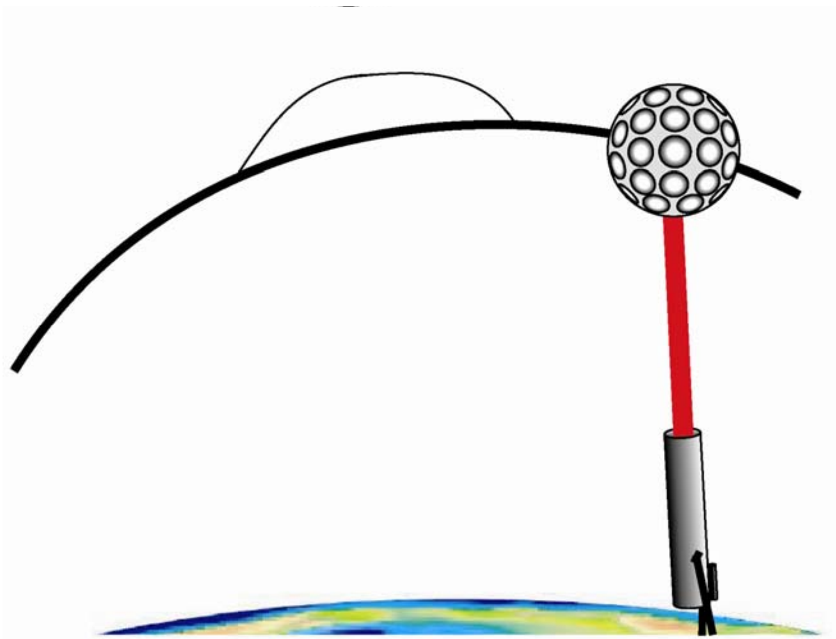
A satellite orbiting around the Earth will be sensitive to gravity: Its motion is such that the rotation force exactly equilibrates the gravity forces.

If the gravity is stronger (i.e. the gravity potential higher), then the satellite will have to orbit a little bit farther away from the earth (to increase the rotation force, and remain in equilibrium)

Conclusion : an orbiting satellite will follow <u>exactly</u> the Gravity potential !

measuring the satellite orbit will give us the gravity potential (i.e. the Geoid)

SLR : Satellite Laser Ranging



A High power laser fires on the satellite

The impulse comes back, so the travel time is measured.

Given the speed of light (**C**), one can compute the distance from laser station to satellite :

$$\mathbf{L = \Delta t \times C}$$

Measuring distances along the orbit give the shape of this orbit, I.E., the shape of the gravity potential

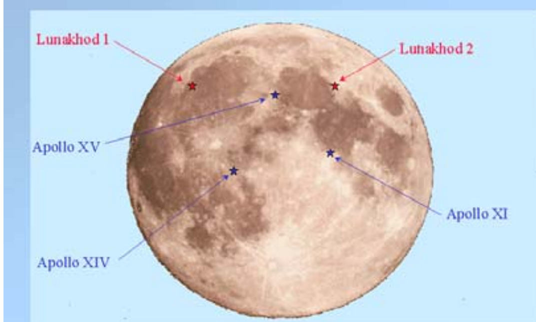
SLR : Satellite Laser Ranging

MOBLAS7 in South Africa

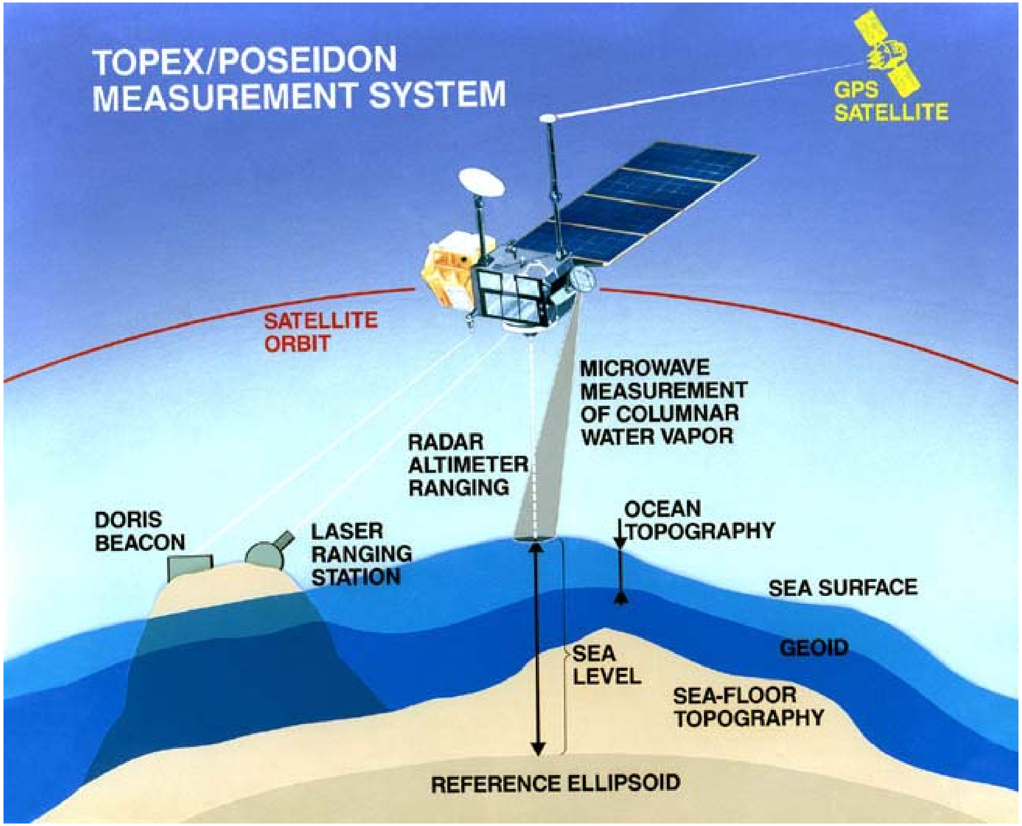
Lunar laser in France

SLUM in France

Laser reflectors on the Moon



Satellite altimetry : principle



A satellite radar measures the distance between the satellite and the surface of the sea

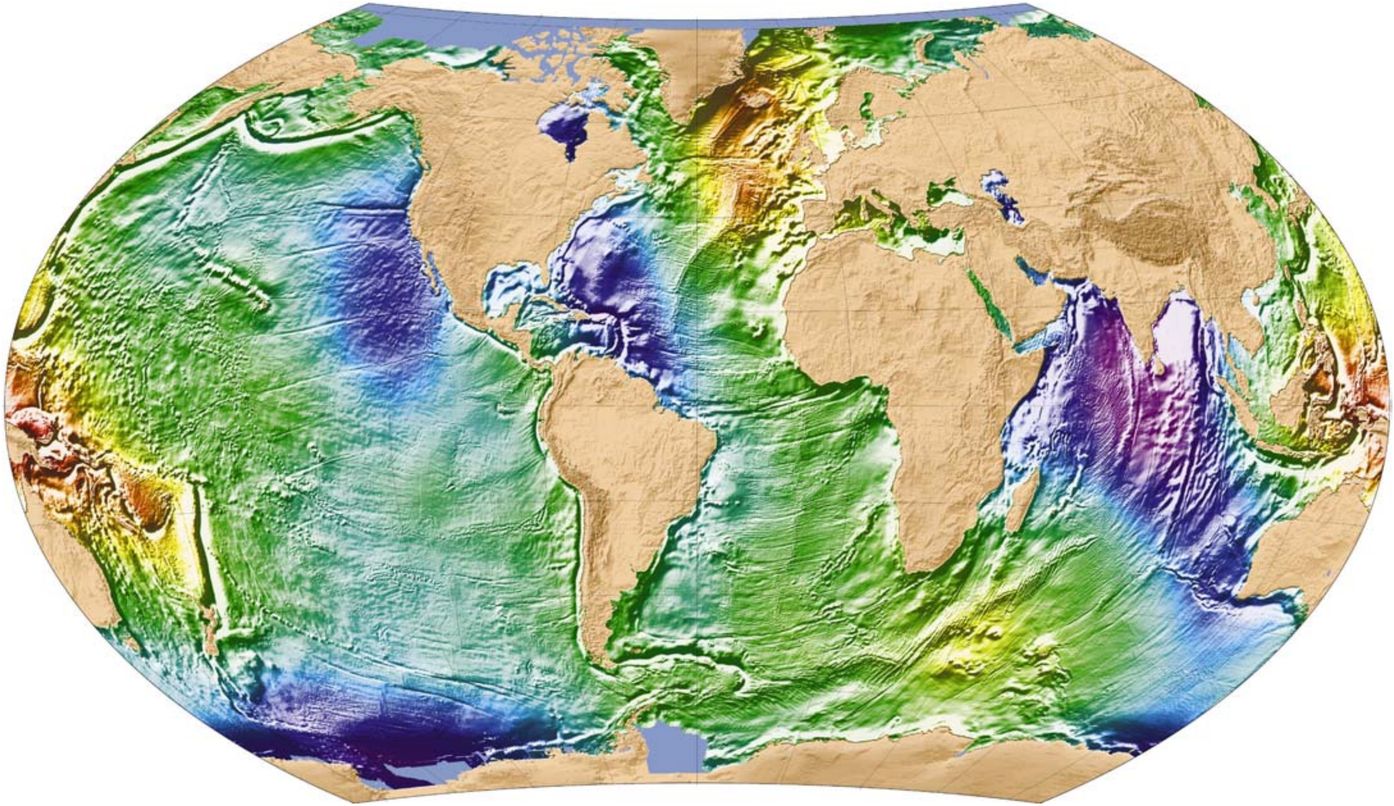
In average (not considering waves, tides and oceanic currents) **the sea surface is the Geoid**

ds = distance satellite to center of Earth

h = distance satellite to sea surface (measured)

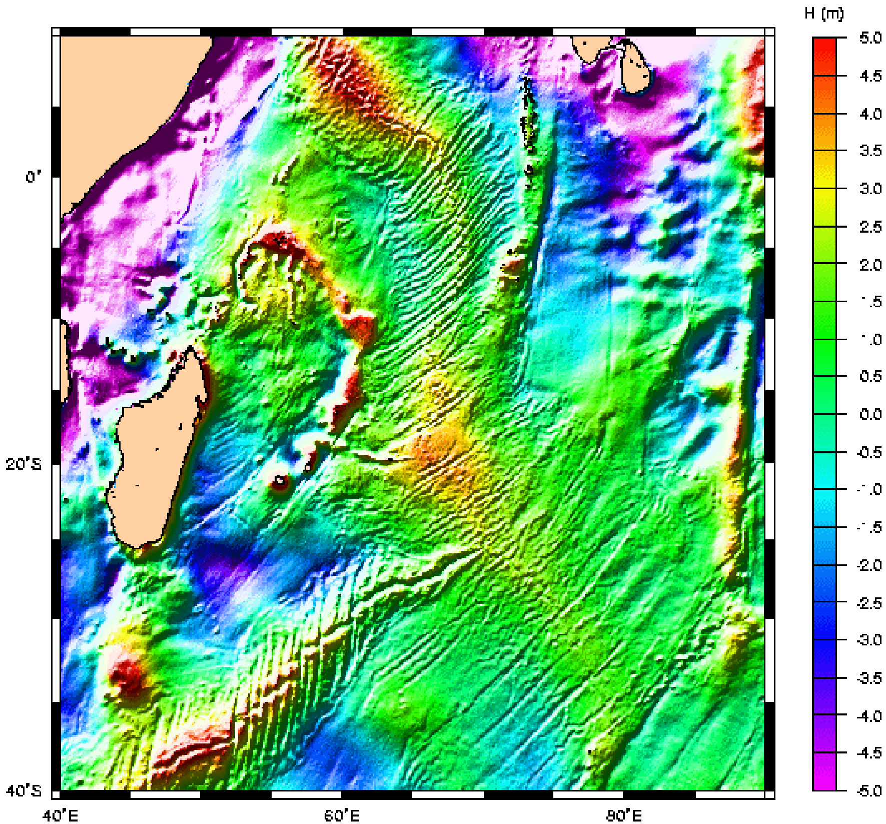
Geoid = ds-h

Satellite altimetry



The result is a high resolution map of the Geoid on 70% of the earth surface

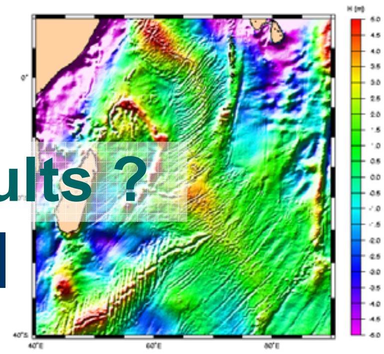
Satellite altimetry

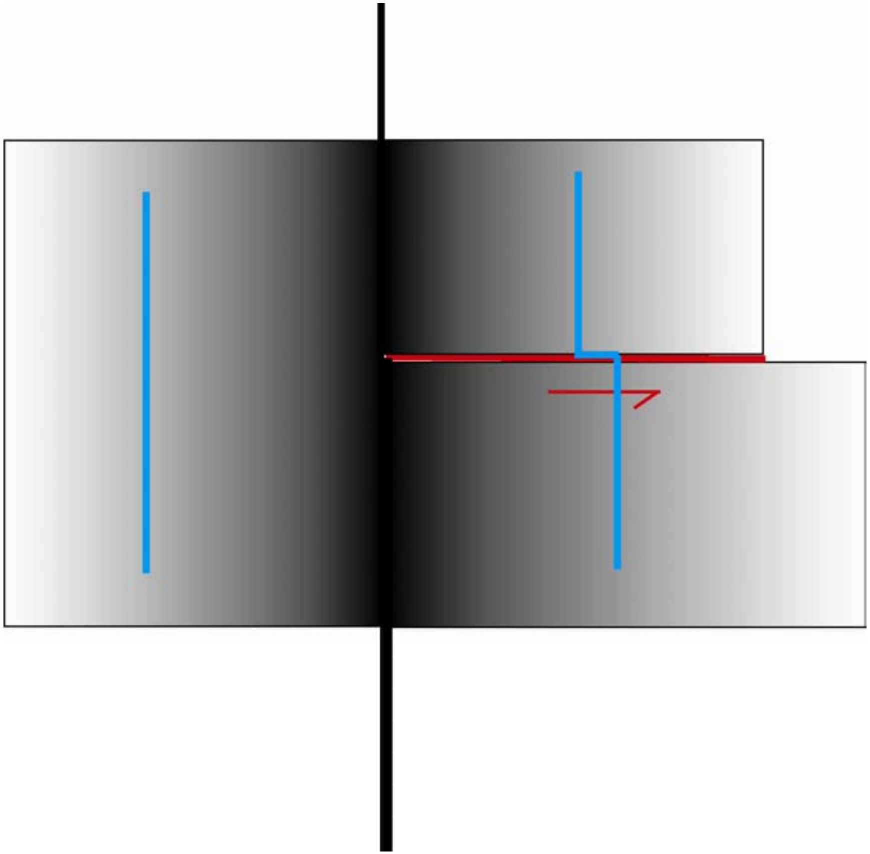


A zoom of the oceanic Geoid shows that we see in detail **short wavelength** gravity anomalies

These come from density anomalies at the surface of the sea bottom. They are **ridges**, **sea mounts**, **transform faults**, etc…

Why a gravity jump at transform faults ?

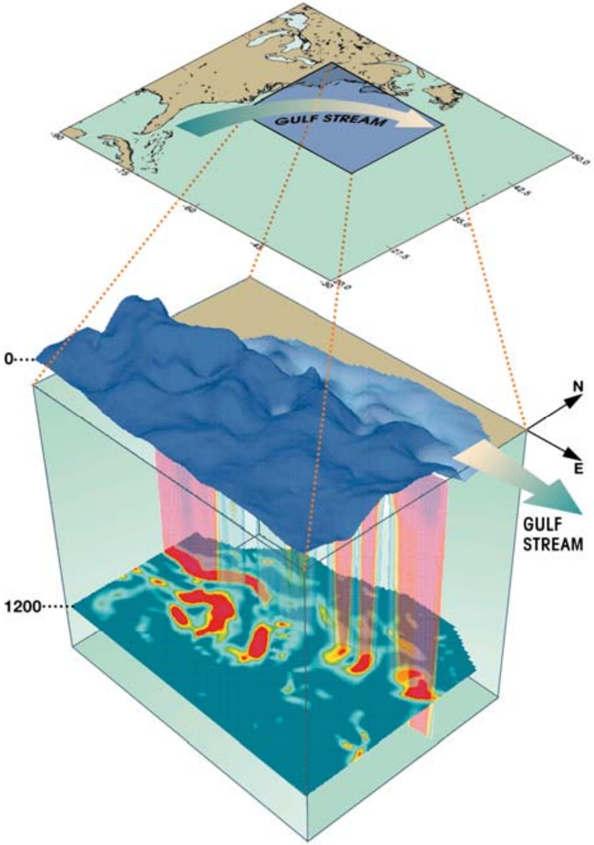




Transform faults shift plate slabs, perpendicularly to the ridge.

Density & gravity change abruptly (jump) on either sides of the transform fault

Satellite altimetry

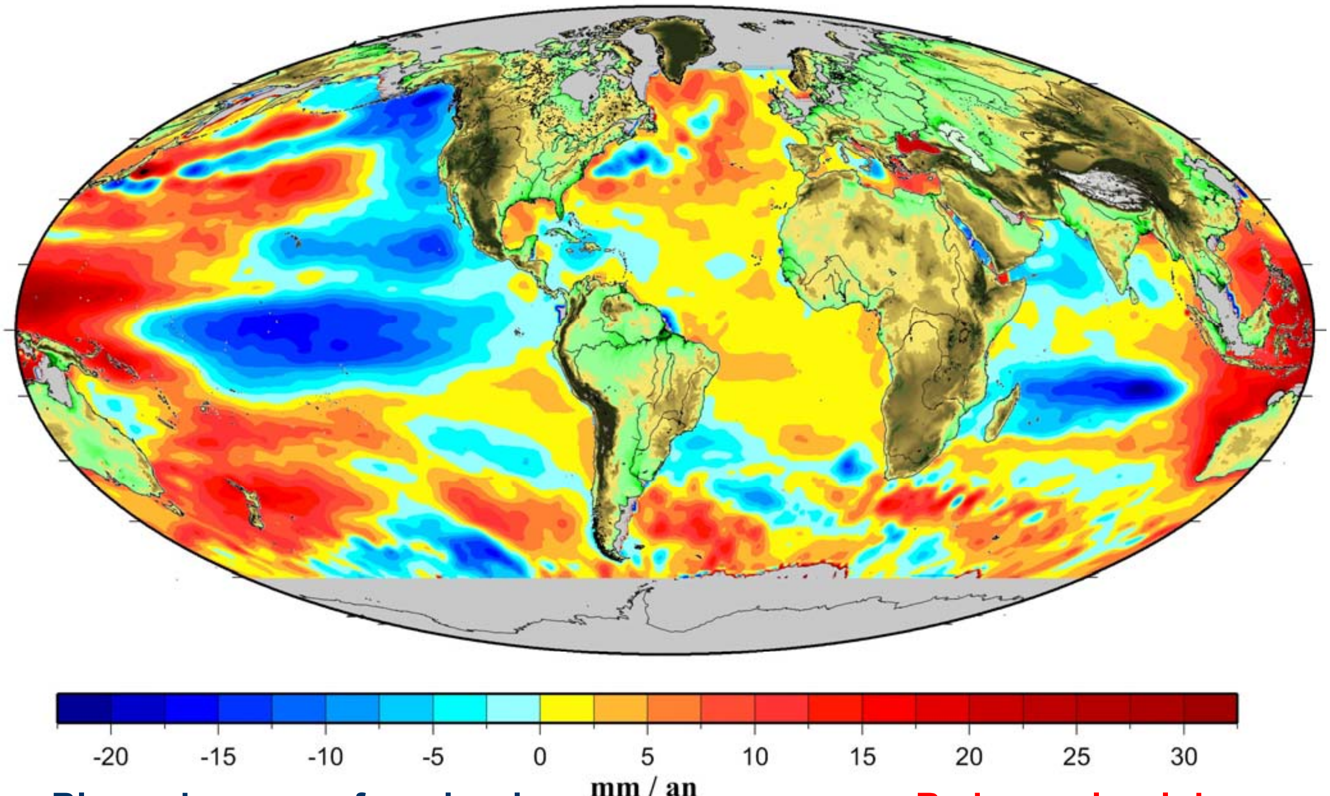


An anomaly of the sea surface can also be related to **water anomaly**

The precision of current altimeter allow to map swells of no more than **10 cm.**

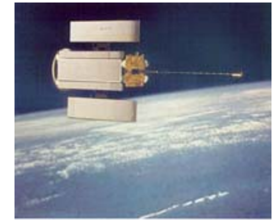
Doing this, we can trace oceanic currents like the **Gulf Stream**

Satellite altimetry: Sea level variation

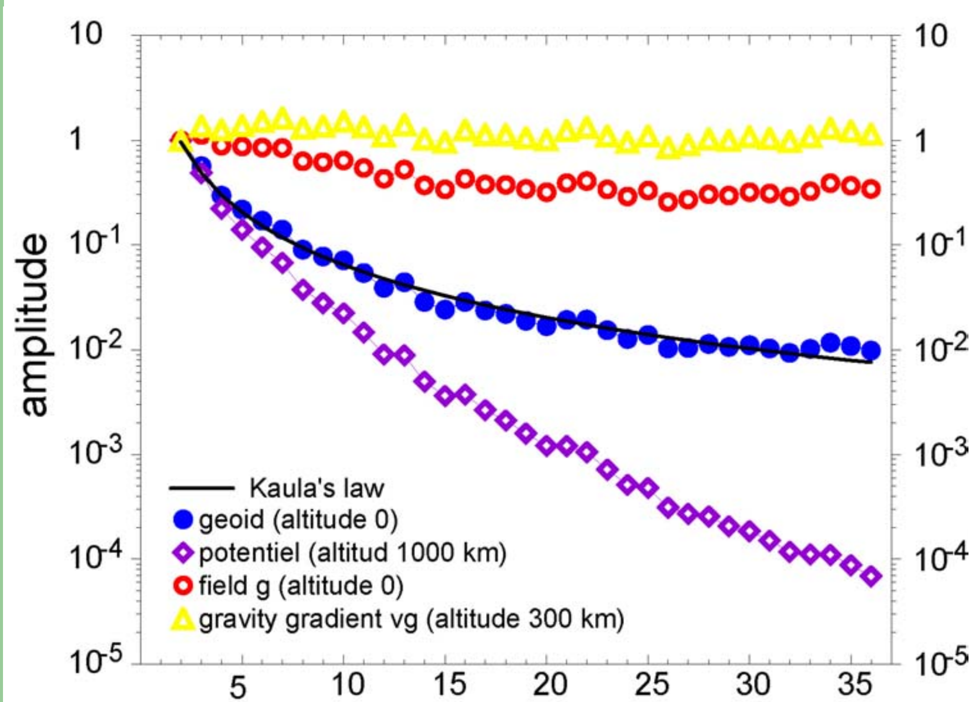


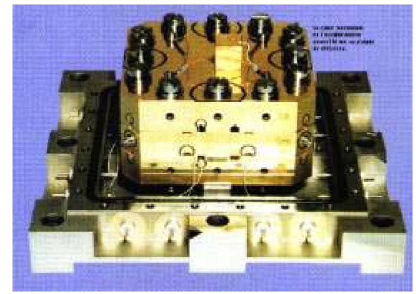
Blue = decrease of sea level

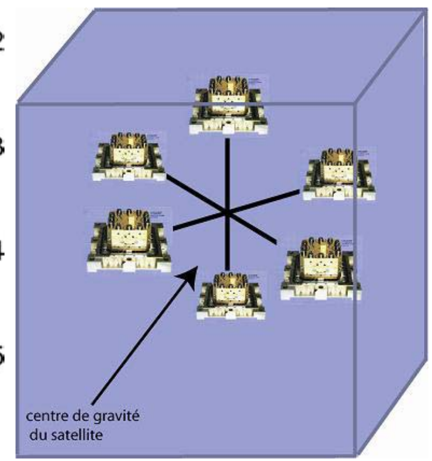
Red = sea level rise



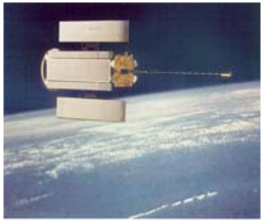
Satellite gradiometry

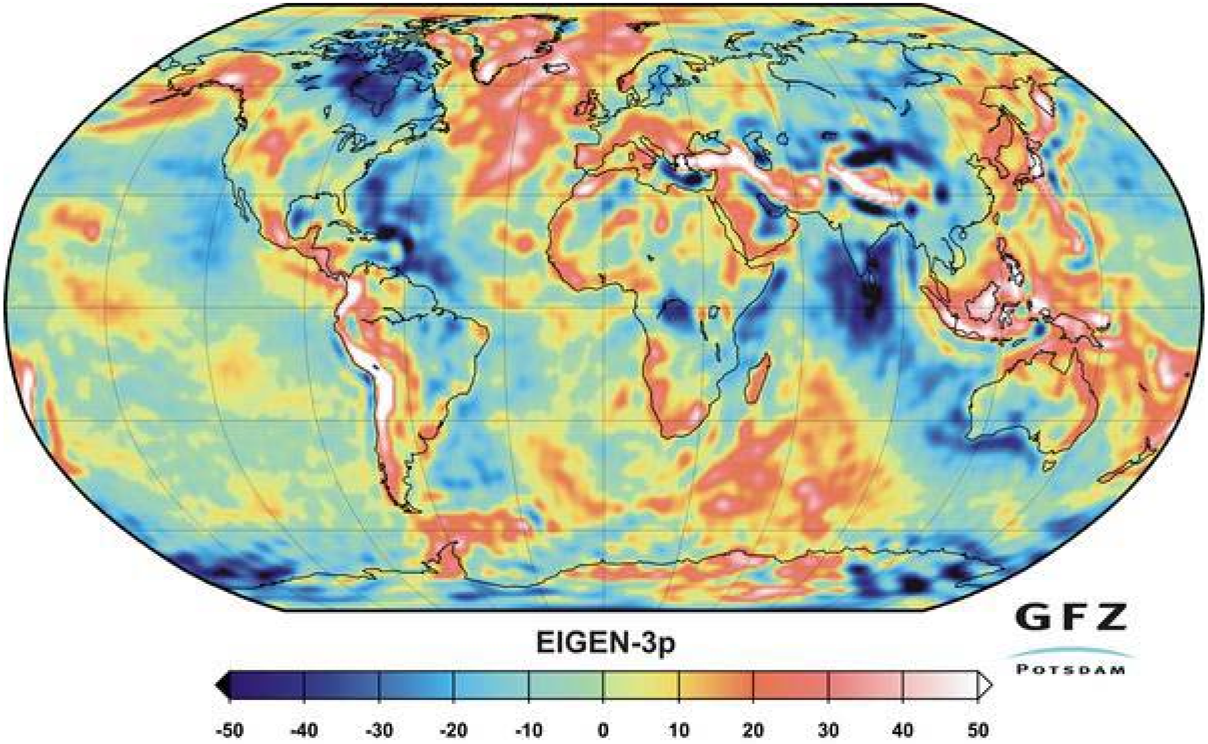






Satellite gradiometry





GFZ
POTSDAM