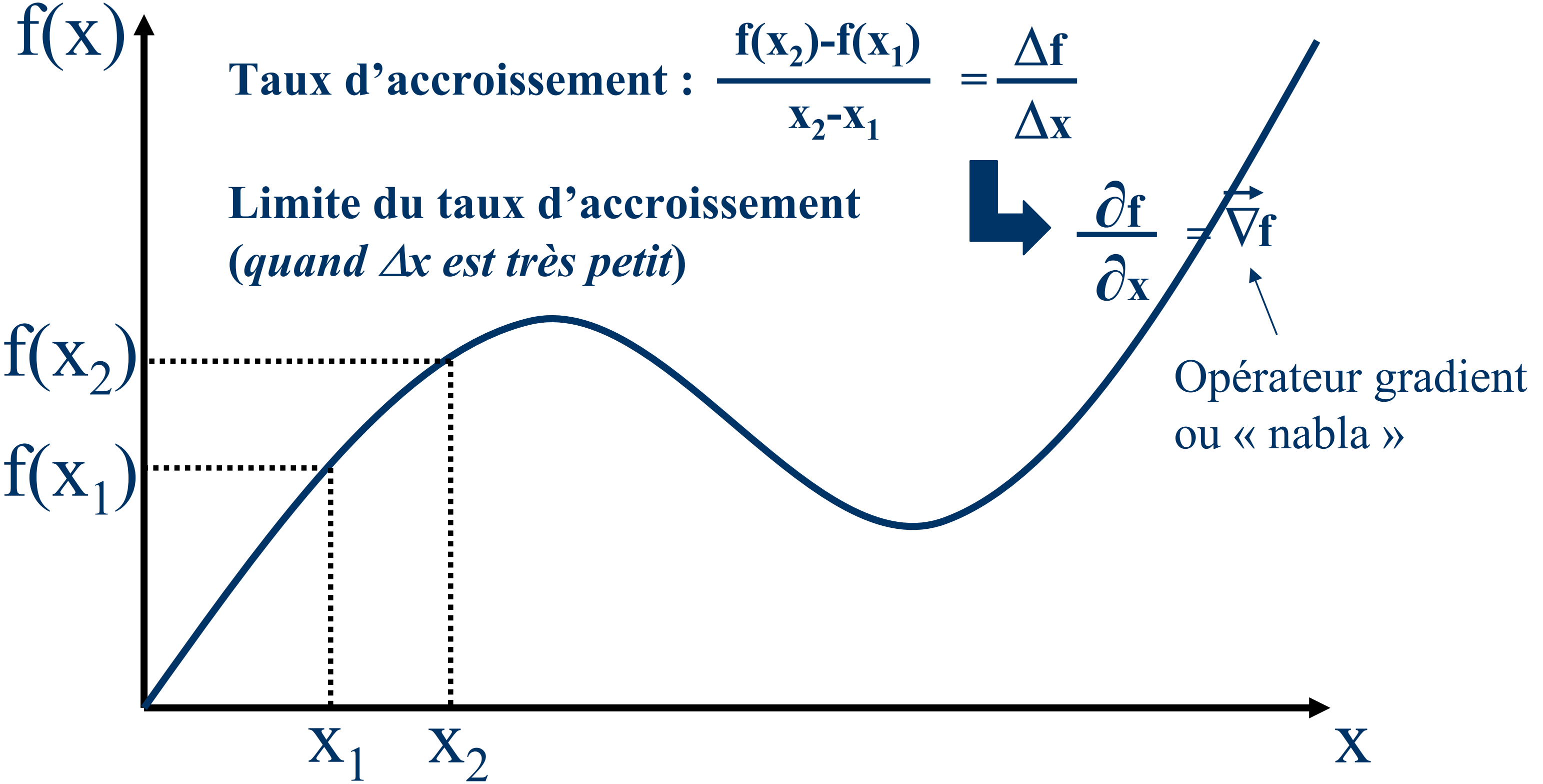
Rappels sur les opérateurs mathématiques

1/ Gradient d'une fonction (f) à une dimension (x)

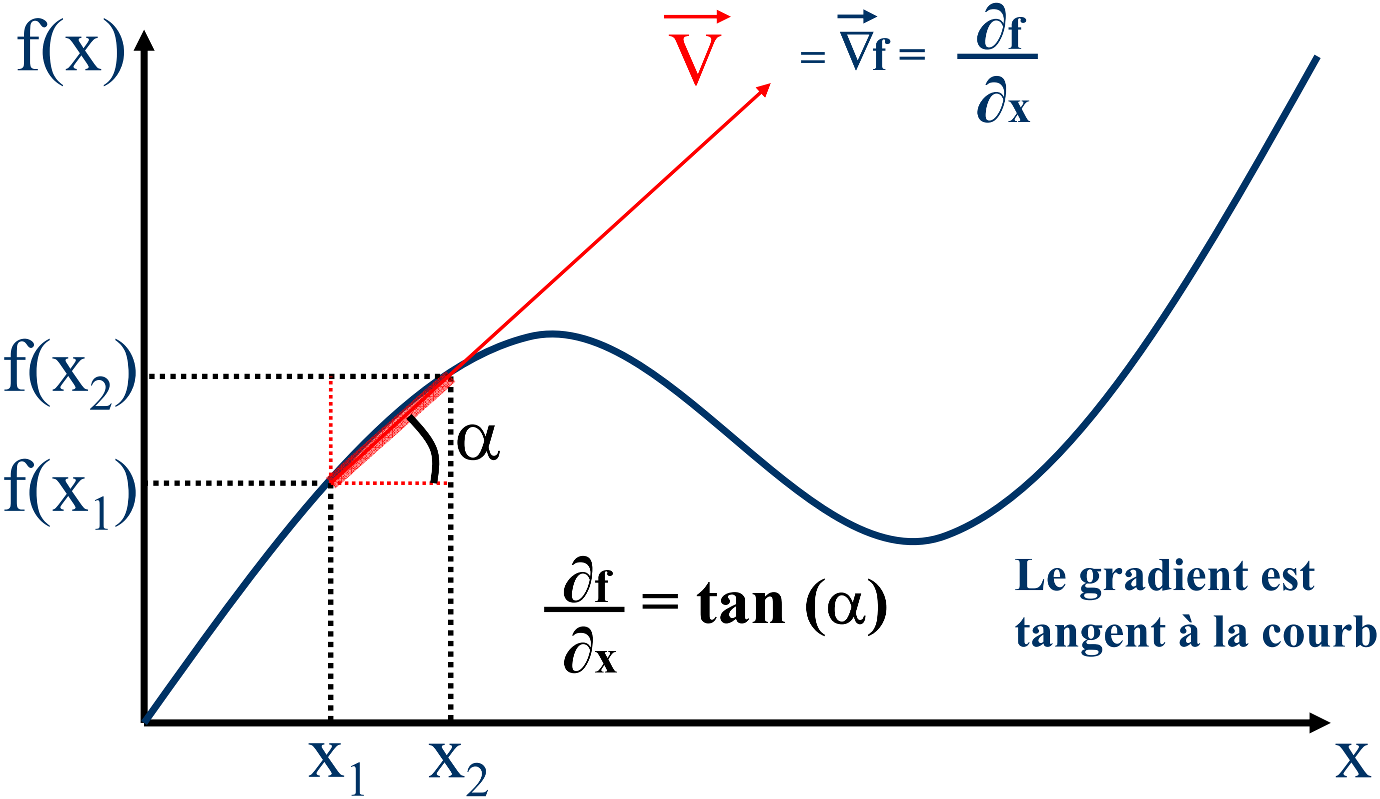
Taux d'accroissement : $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$

Limite du taux d'accroissement (*quand Δx est très petit*) $\Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x} = \vec{\nabla} f$



Rappels sur les opérateurs mathématiques

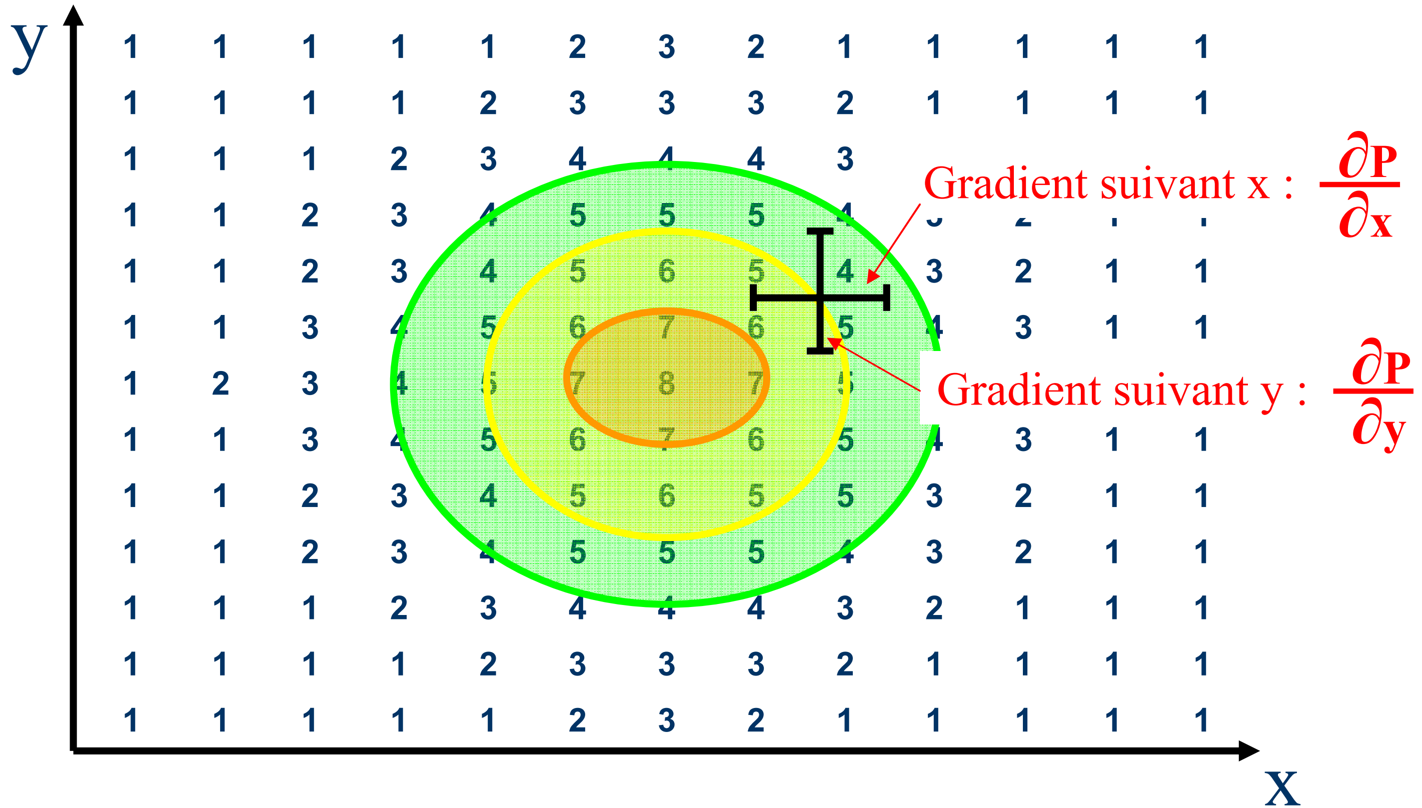
le gradient est aussi un vecteur



Le gradient est tangent à la courbe !!

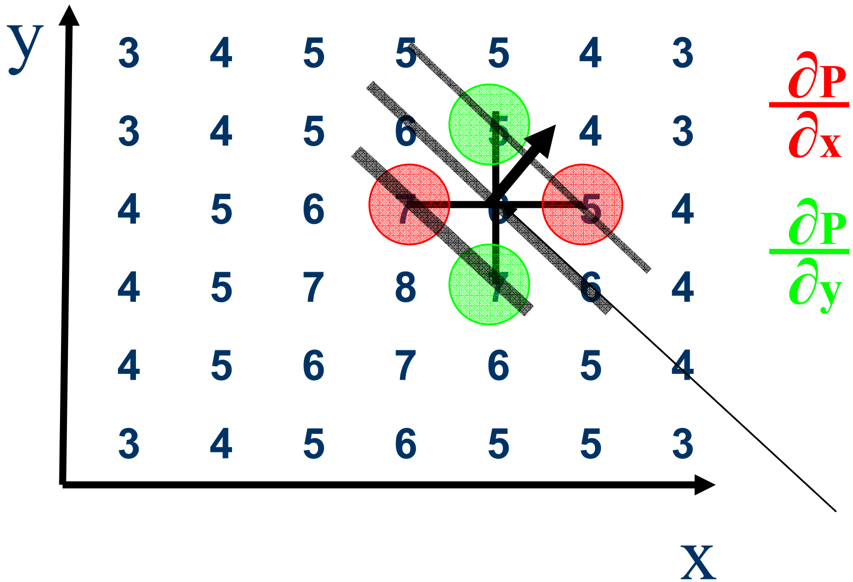
Rappels sur les opérateurs mathématiques

2/ Gradient d’un champ (P) à deux dimensions (x,y)



Rappels sur les opérateurs mathématiques

2/ Gradient d'un champ (P) à deux dimensions (x,y)



$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{5-7}{2} = -1$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{5-7}{2} = -1$$

$$\vec{\nabla} P = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial P}{\partial x} \\ \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 \\ \\ -1 \end{vmatrix}$$

Le gradient est perpendiculaire aux courbes de niveau !

Rappels sur les opérateurs mathématiques

3/ divergence

La divergence d'un champ est le produit scalaire du champ et de l'opérateur "nabla"

$$\vec{\nabla}(\vec{u}) = \vec{\nabla} \bullet \vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

La divergence est un scalaire !!!

Rappels sur les opérateurs mathématiques

4/ rotationnel

Le rotationnel d'un champ est le <u>produit vectoriel</u> du champ et de l'opérateur "nabla"

$$\vec{\nabla}(\vec{u}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{u} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & u_x \\ \dfrac{\partial}{\partial y} & u_y \\ \dfrac{\partial}{\partial z} & u_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u_z}{\partial y} - \dfrac{\partial u_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u_x}{\partial z} - \dfrac{\partial u_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u_y}{\partial x} - \dfrac{\partial u_x}{\partial y} \end{vmatrix}$$

Le rotationnel est un <u>vecteur</u> !!!

Rappels sur les opérateurs mathématiques

5/ Laplacien scalaire

$$\Delta P = \vec{\nabla}^2 P = \vec{\nabla} \bullet \left(\vec{\nabla} P \right) = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2}$$

6/ Laplacien vectoriel

$$\vec{\Delta}\, \vec{u} = \vec{\nabla}^2 \vec{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \end{bmatrix}$$

Rappels sur les opérateurs mathématiques

Relations impossibles : grad(rot), rot(div), rot(Laplacien scalaire)

Relations fondamentales : div(grad) = Laplacien

div(rot) = 0

rot(rot) = grad(div) - Laplacien

Rappels sur les opérateurs mathématiques

Ecoulement purement divergent : div($\vec{u}$) # 0 et rot($\vec{u}$) = 0

Possible si u_x est une fonction de x uniquement,

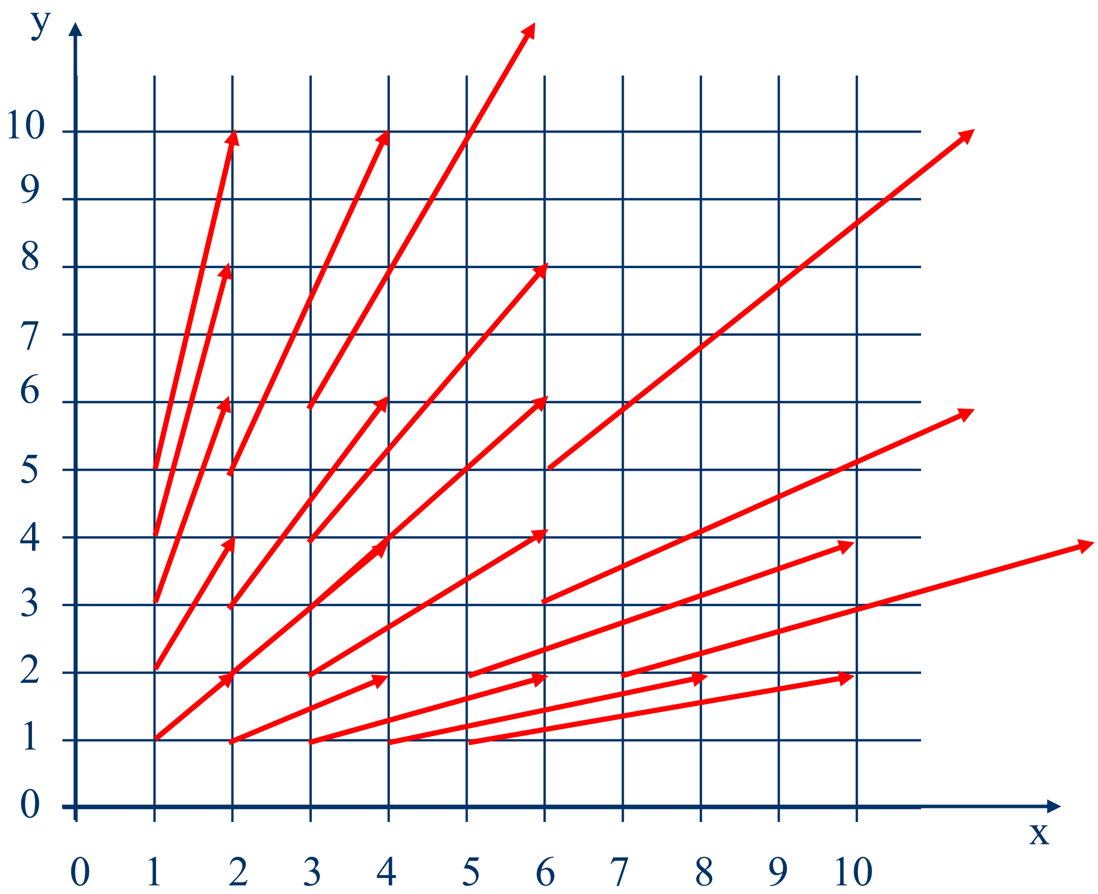
et u_y est une fonction de y uniquement

Alors : $$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \# 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} = 0$$

Exemple : $U_x = x$ et $U_y = y$

Ecoulement divergent $U_x = x$ et $U_y = y$

Rappels sur les opérateurs mathématiques



Rappels sur les opérateurs mathématiques

Ecoulement purement rotationnel : $\mathrm{div}(\vec{u}) = 0$ et $\mathrm{rot}(\vec{u}) \# 0$

Possible si u_x est une fonction de y uniquement,

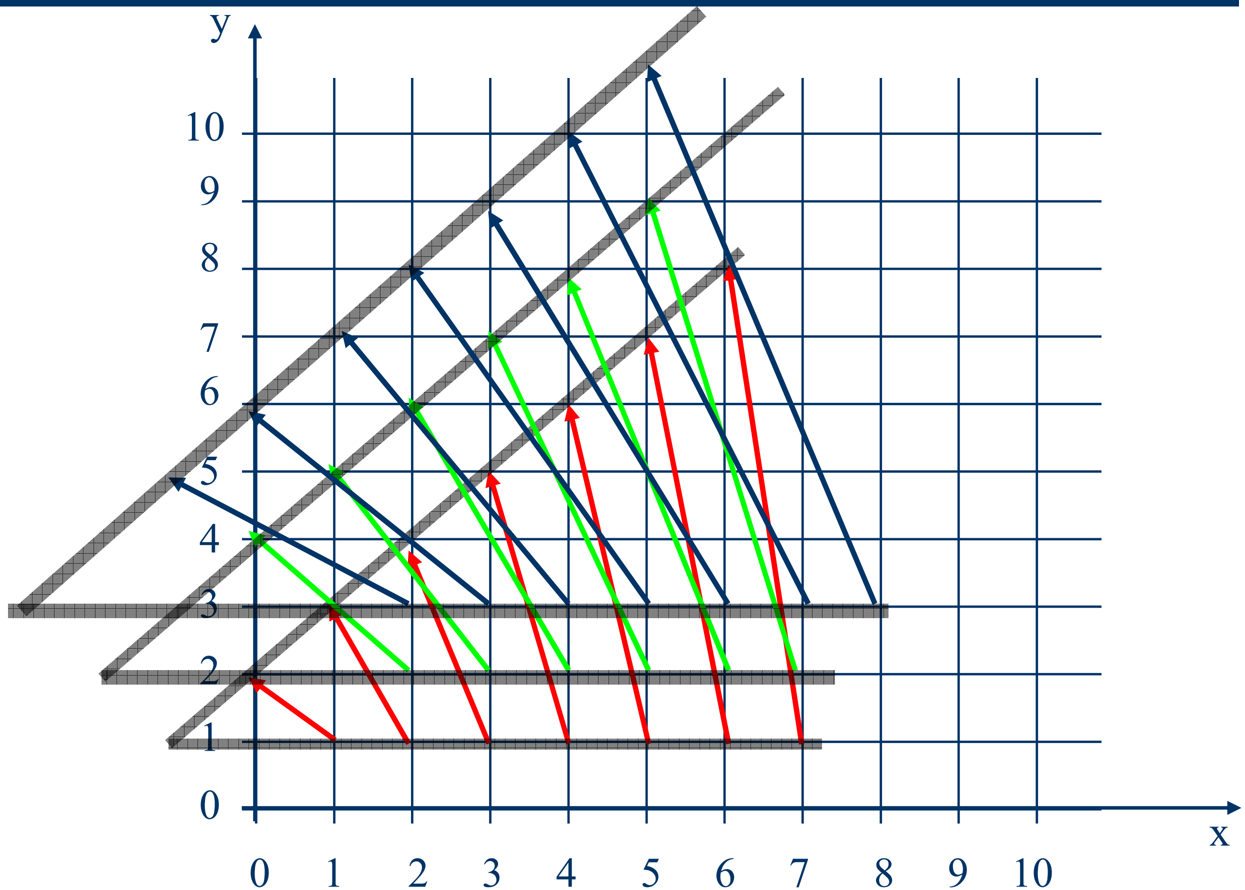
et u_y est une fonction de x uniquement

Alors : $$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \# 0$$

Exemple : $U_x = -y$ et $U_y = x$

Ecoulement rotationnel $U_x = -y$ et $U_y = x$

Rappels sur les opérateurs mathématiques



L'angle dont les droites tournent est l'amplitude de la rotation, c-à-d la norme du vecteur rotationnel