

CHAMP DE VITESSES - TECTONIQUE DES PLAQUES

SOMMAIRE

1/ Décomposition en harmoniques sphériques d'un champ vectoriel sur la sphère

- a) Ecriture d'un vecteur sur une sphère
- b) Décomposition en harmoniques sphériques
- c) Divergence et rotationnel du champ de vitesse horizontal
- d) Exemples

2/ Tectonique des plaques

- a) Champ de vitesses en surface
- b) Spectres : Poloidal-Toroidal et Divergence-Rotationnel
- c) Sources de la tectonique des plaques
- d) Corrélations

Encore des gradients et des rotationnels....

Tout champ vectoriel dont la divergence est nulle, peut s'écrire sous la forme :

$$\vec{V} = \vec{V}_T + \vec{V}_P = \text{rot}(\mathbf{T} \cdot \vec{r}) + \text{rot}(\text{rot}(\mathbf{P} \cdot \vec{r}))$$

En fait cela vient d'une relation plus générale : tout vecteur de l'espace réel peut s'écrire sous la forme :

$$\vec{V} = \alpha \vec{r} + \vec{V} \wedge \beta \vec{r} + \vec{V} \wedge \vec{V} \wedge \gamma \vec{r}$$

α , β , et γ , sont les composantes du vecteur \mathbf{V} sur la base orthogonale de trois vecteurs perpendiculaires entre eux : un vecteur quelconque, son gradient, et le gradient du gradient.

Encore des gradients et des rotationnels....

On obtient l'expression des composantes à partir du rotationnel en coordonnées sphériques:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{u} = \begin{bmatrix} \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \cdot u_\varphi) - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (u_\theta) \right] \vec{e}_r \\ \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (u_r) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot u_\varphi) \right] \vec{e}_\theta \\ \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot u_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_r) \right] \vec{e}_\varphi \end{bmatrix}$$

Encore des rotationnels....

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{u} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta u_\varphi) & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (u_\theta) \\ -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (u_r) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_\varphi) \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_r) \end{bmatrix} \vec{e}_r$$

Qui donne donc d'une part:

$$\text{rot}(\mathbf{T} \cdot \vec{r}) = \begin{bmatrix} 0 \cdot \vec{e}_r \\ \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{r}) \right] \vec{e}_\theta \\ \left[-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{r}) \right] \vec{e}_\varphi \end{bmatrix}$$

Encore des rotationnels....

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{u} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta u_\varphi) & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (u_\theta) \\ -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (u_r) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_\varphi) \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_r) \end{bmatrix} \vec{e}_r$$

Et d'autre part:

$$\text{rot}(\text{P.r}) = \begin{bmatrix} 0 \cdot \vec{e}_r \\ \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\text{P.r}) \right] \vec{e}_\theta \\ \left[-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\text{P.r}) \right] \vec{e}_\varphi \end{bmatrix} \quad \text{rot}(\text{rot}(\text{P.r})) = \begin{bmatrix} \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial (\text{P.r})}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 (\text{P.r})}{\partial \varphi^2} \\ 0 + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial (\text{P.r})}{\partial \theta} \right) \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial (\text{P.r})}{\partial \varphi} \right) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{r^2} \text{L}^2(\text{P.r}) \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (\text{P.r})}{\partial r} \right) \\ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (\text{P.r})}{\partial r} \right) \end{bmatrix}$$

Encore des rotationnels....

$$\vec{v} \wedge \vec{u} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta u_\varphi) & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (u_\theta) \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (u_r) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_\varphi) \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_r) \end{bmatrix} \vec{e}_r$$

Et donc, en sommant les deux parts:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} L^2(\mathbf{P}) \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \mathbf{P}) \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\mathbf{T}) \\ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \mathbf{P}) \right) - \frac{\partial}{\partial \theta} (\mathbf{T}) \end{bmatrix}$$

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} L^2(\mathbf{P}) \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \mathbf{P}) \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\mathbf{T}) \\ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \mathbf{P}) \right) - \frac{\partial}{\partial \theta} (\mathbf{T}) \end{bmatrix}$$

Si pas de
composante en r

Avec: $\mathbf{S} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \mathbf{P})$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \varphi}$$

C'est fini....

Tectonique des plaques = champ essentiellement horizontal

$$\boxed{V_{\theta} = \frac{\partial P}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \quad \text{et} \quad V_{\varphi} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial P}{\partial \varphi} - \frac{\partial T}{\partial \theta}}$$

En négligeant la composante radiale

En faisant l'amalgame (abusif) entre S et P, puisqu'il n'y a pas de dépendance en r.....

P et **T** sont des champs scalaires, fonction de θ et φ

P est le champ **POLOÏDAL**

T est le champ **TOROÏDAL**

$$V_\theta = \frac{\partial P}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \quad \text{et} \quad V_\varphi = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial P}{\partial \varphi} - \frac{\partial T}{\partial \theta}$$

Un peu d'harmoniques sphériques....

$$V_\theta(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l \left[P_l^m \frac{\partial}{\partial \theta} (Y_l^m(\theta, \varphi)) + T_l^m \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (Y_l^m(\theta, \varphi)) \right]$$

$$V_\varphi(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l \left[-T_l^m \frac{\partial}{\partial \theta} (Y_l^m(\theta, \varphi)) + P_l^m \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (Y_l^m(\theta, \varphi)) \right]$$

P_l^m et T_l^m sont les coefficients de la décomposition des champs, sur la base des dérivées premières des harmoniques sphériques

$$\vec{V}_\theta = \frac{\partial P}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \Gamma}{\partial \varphi} \quad \text{et} \quad \vec{V}_\varphi = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial P}{\partial \varphi} - \frac{\partial \Gamma}{\partial \theta}$$

Encore des calculs...divergence. $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \cdot u_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (u_\varphi)$

$$\text{div}_h(\vec{V}) = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \cdot V_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (V_\varphi)$$

Partie
horizontale de
la divergence

$$= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \sum_{l,m} P_l^m \frac{\partial Y}{\partial \theta} + \sum_{l,m} T_l^m \frac{\partial Y}{\partial \varphi} \right)$$

$$+ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sum_{l,m} -T_l^m \frac{\partial Y}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \sum_{l,m} P_l^m \frac{\partial Y}{\partial \varphi} \right)$$

$$= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sum_{l,m} P_l^m Y \right) \right) \sum + \frac{1}{r \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left(\sum_{l,m} P_l^m Y \right)$$

$$= -\frac{1}{r} L^2 \left(\sum_{l,m} P_l^m Y \right)$$

$$= \sum_{l,m} -P_l^m \frac{l(l+1)}{r} Y_l^m(\theta, \varphi)$$



Divergence ~ Poloidal

$$V_\theta = \frac{\partial P}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \quad \text{et} \quad V_\varphi = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial P}{\partial \varphi} - \frac{\partial T}{\partial \theta}$$

Encore des calculs....rotationnel

$$\vec{V} \wedge \vec{u} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \cdot u_\varphi) - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (u_\theta) \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (u_r) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot u_\varphi) \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot u_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_r) \end{bmatrix} \begin{matrix} \vec{e}_r \\ \vec{e}_\theta \\ \vec{e}_\varphi \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} \text{rot}_r \vec{V} &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \cdot V_\varphi) - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (V_\theta) \\ &= \sum_{l,m} Y_l^m \frac{l(l+1)}{r} Y_l^m(\theta, \varphi) \end{aligned}$$

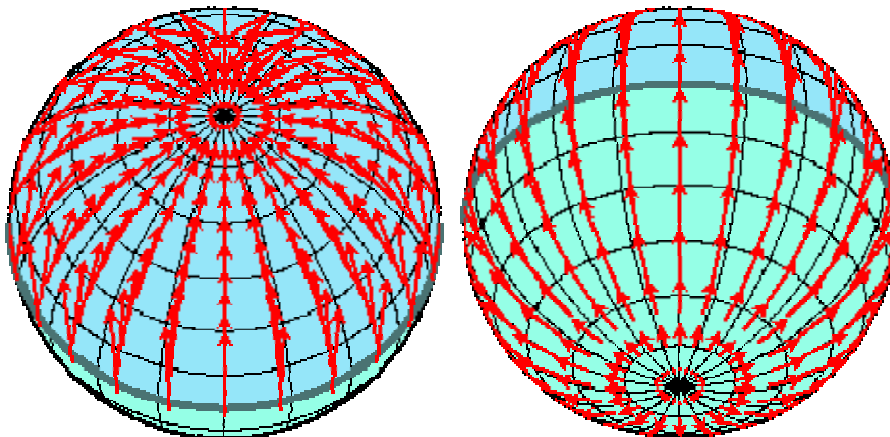
Partie radiale
du rotationnel



Rotationnel ~ Toroidal

Exemples....

Un champ purement poloidal est purement divergent.



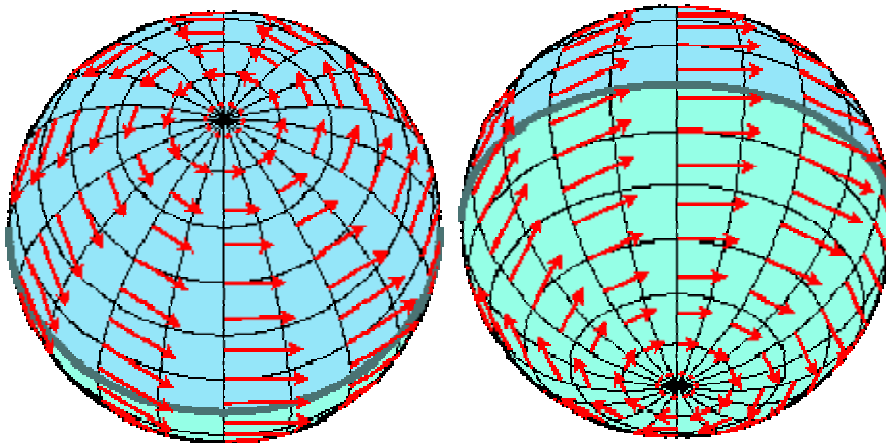
Le nombre de sources et de puits est égal au degré.

$L=1 \Rightarrow 1$ source et 1 puits aux antipode

coefficients du champ V		
	poloidal	toroidal
$l=0 \ m=0$	0	0
$l=1 \ m=0$	1	0
$l=1 \ m=1$	0	0
$l=2 \ m=0$	0	0
$l=2 \ m=1$	0	0
$l=2 \ m=2$	0	0
$l=3 \ m=0$	0	0
$l=3 \ m=1$	0	0
$l=3 \ m=2$	0	0
$l=3 \ m=3$	0	0

Exemples....

Un champ purement toroidal est une simple rotation.

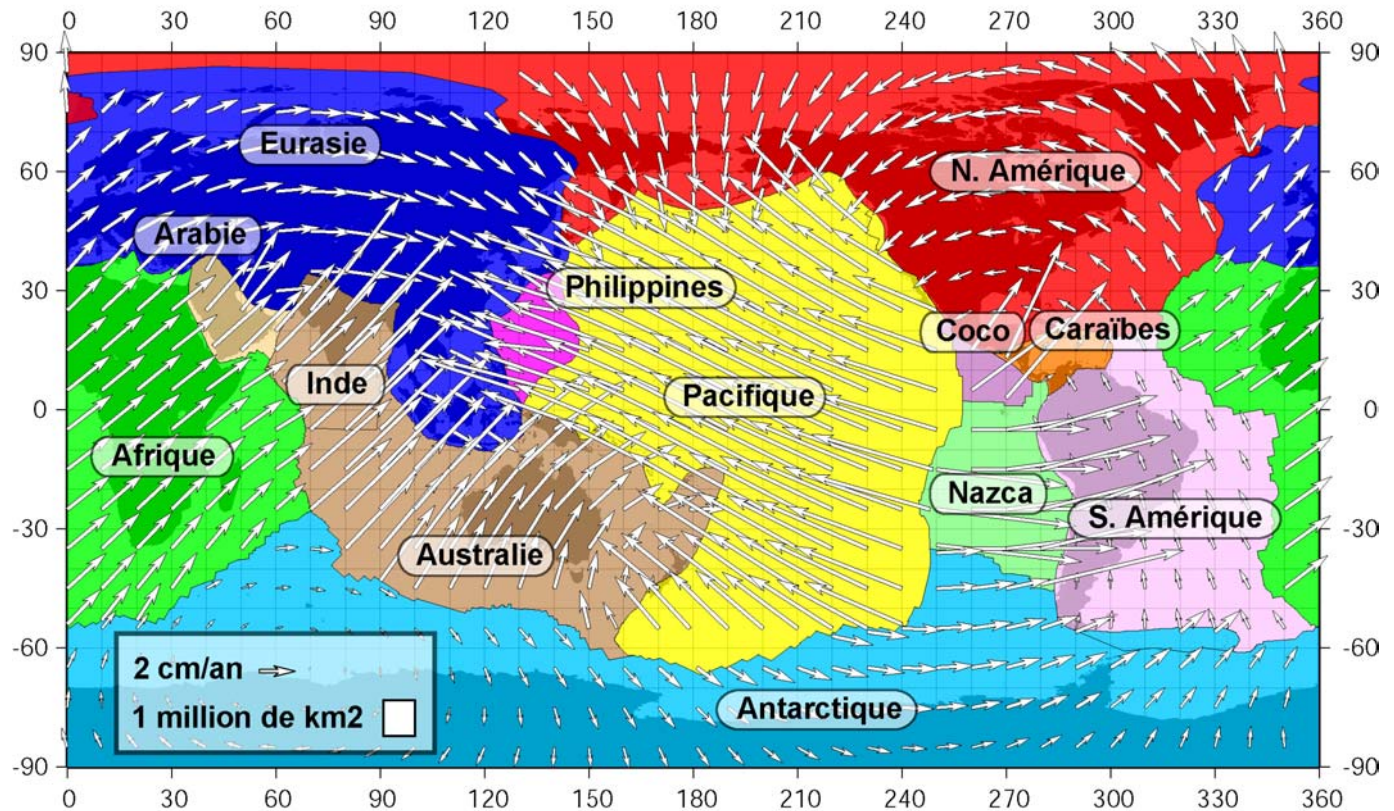


Le nombre d'axes de rotation est égal au degré.

$L=1 \Rightarrow$ toute la sphère tourne

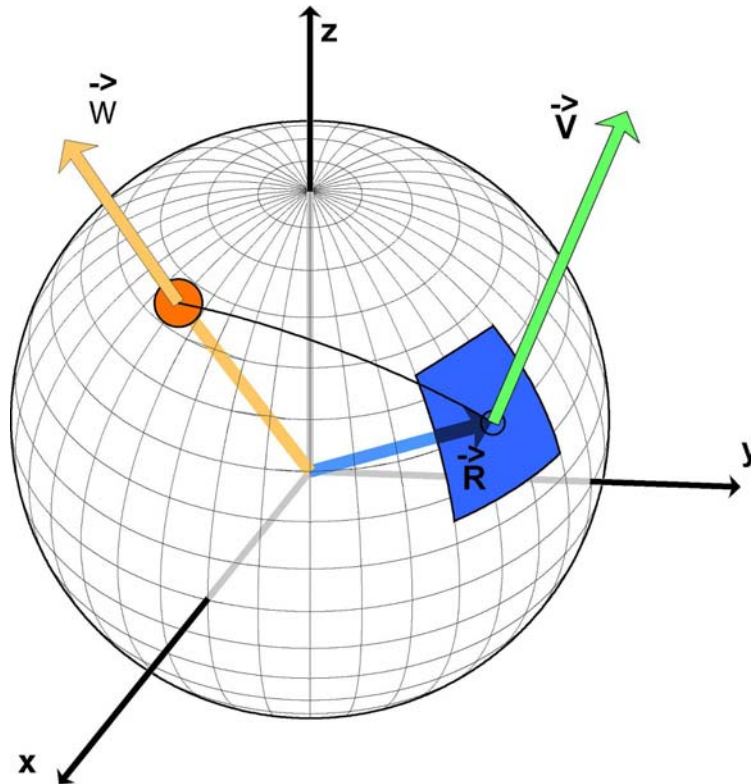
coefficients du champ V		
	poloidal	toroidal
$l=0 \ m=0$	0	0
$l=1 \ m=0$	0	1
$l=1 \ m=1$	0	0
$l=2 \ m=0$	0	0
$l=2 \ m=1$	0	0
$l=2 \ m=2$	0	0
$l=3 \ m=0$	0	0
$l=3 \ m=1$	0	0
$l=3 \ m=2$	0	0
$l=3 \ m=3$	0	0

La tectonique des plaques



Parenthèse 1/4 : pole de rotation

translation sur une sphère



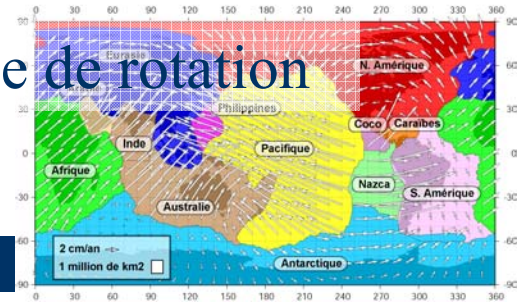
$$\vec{V} = \vec{R} \wedge \vec{\Omega}$$

Sur une sphère, toute translation à la surface est en fait une rotation autour d'un axe qui traverse la Terre en passant par son centre.

Le lieu où l'axe "perce" à la surface est appelé le **pole de rotation**

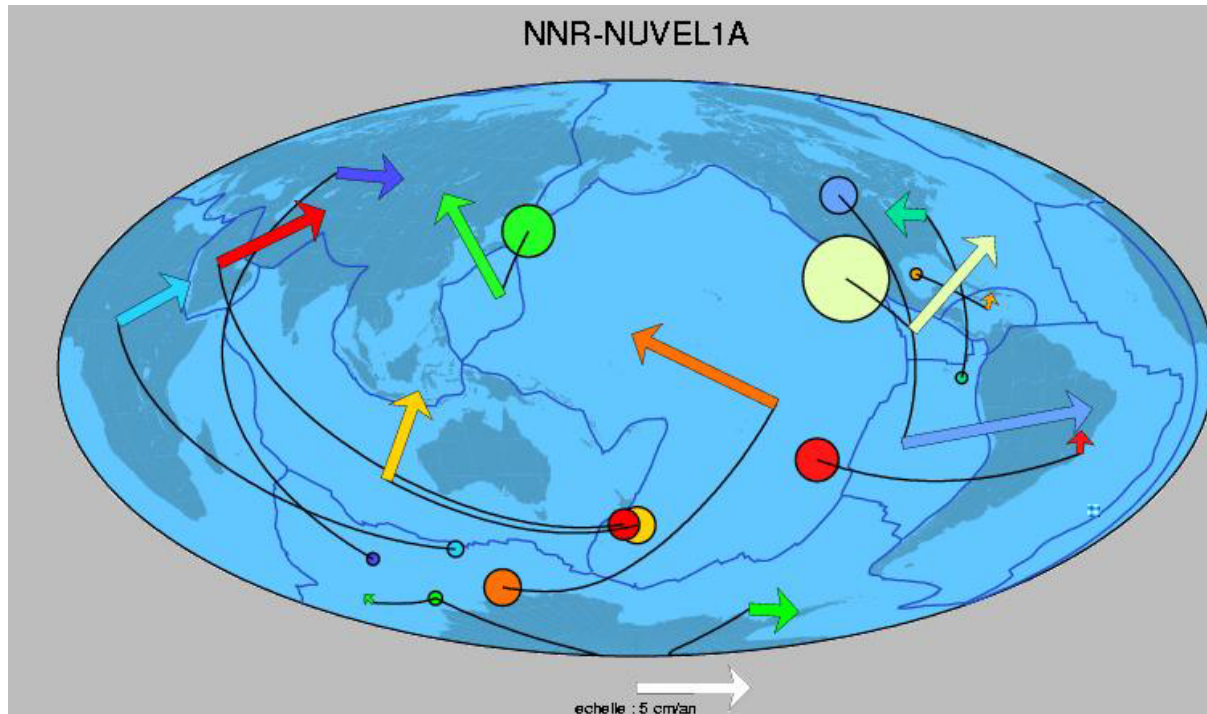
L'amplitude de Ω 
Est la **vitesse de rotation**

La tectonique des plaques



Plaque	Pole de rotation		
	Latitude	Longitude	vitesse (°/Ma)
1 PACIFIQUE	-63.0	107.4	0.64
2 EURASIE	50.6	-112.4	0.23
3 AFRIQUE	50.6	-74.0	0.29
4 ANTARCTIQUE	63.0	-115.9	0.24
5 INDE-AUSTR.	45.5	0.4	0.54
6 AMERIQUE NORD	-2.5	-86.0	0.21
7 AMERIQUE SUD	-25.4	-124.6	0.11
8 NAZCA	47.8	-100.2	0.74
9 PHILIPPINE	-39.0	-36.7	0.90
10 ARABIE	45.2	-4.4	0.54
11 COCO	24.5	-115.8	1.50
12 CARAIBE	25.0	-93.1	0.21

La tectonique des plaques

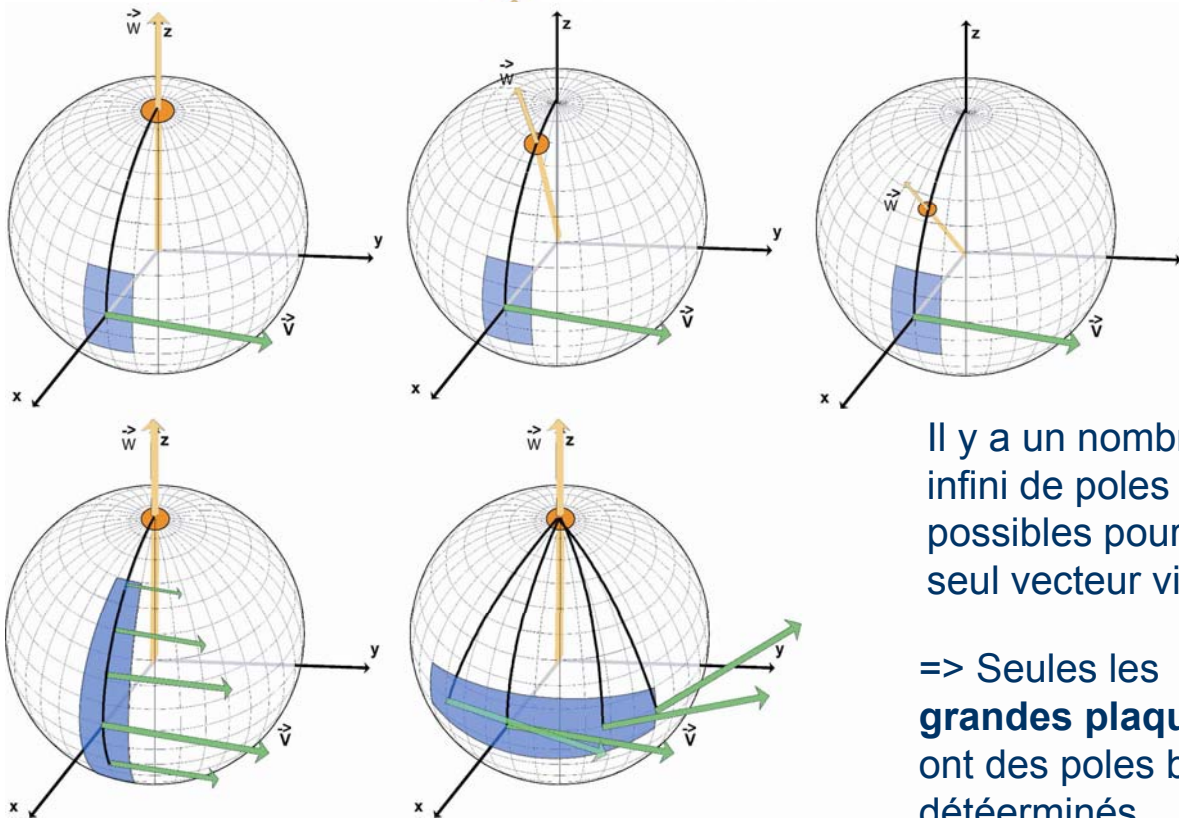


NB1 : en tout point, la vitesse calculée est perpendiculaire à la direction vers la position du pôle.

NB2 : certaines plaques « se translatent » d'autres « tournent » sur elle-même : leur pôle est tout simplement loin ou proche !

Parenthèse 4/4 : pole de rotation

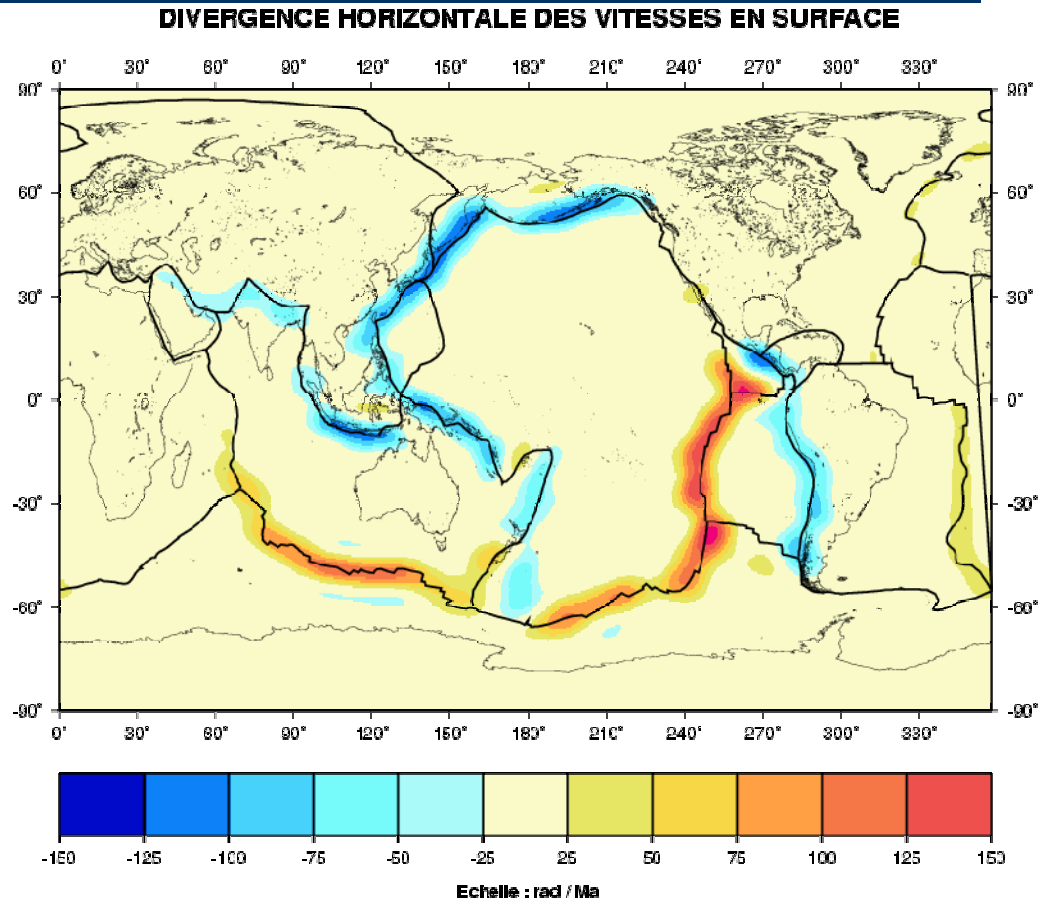
Trouver un pole



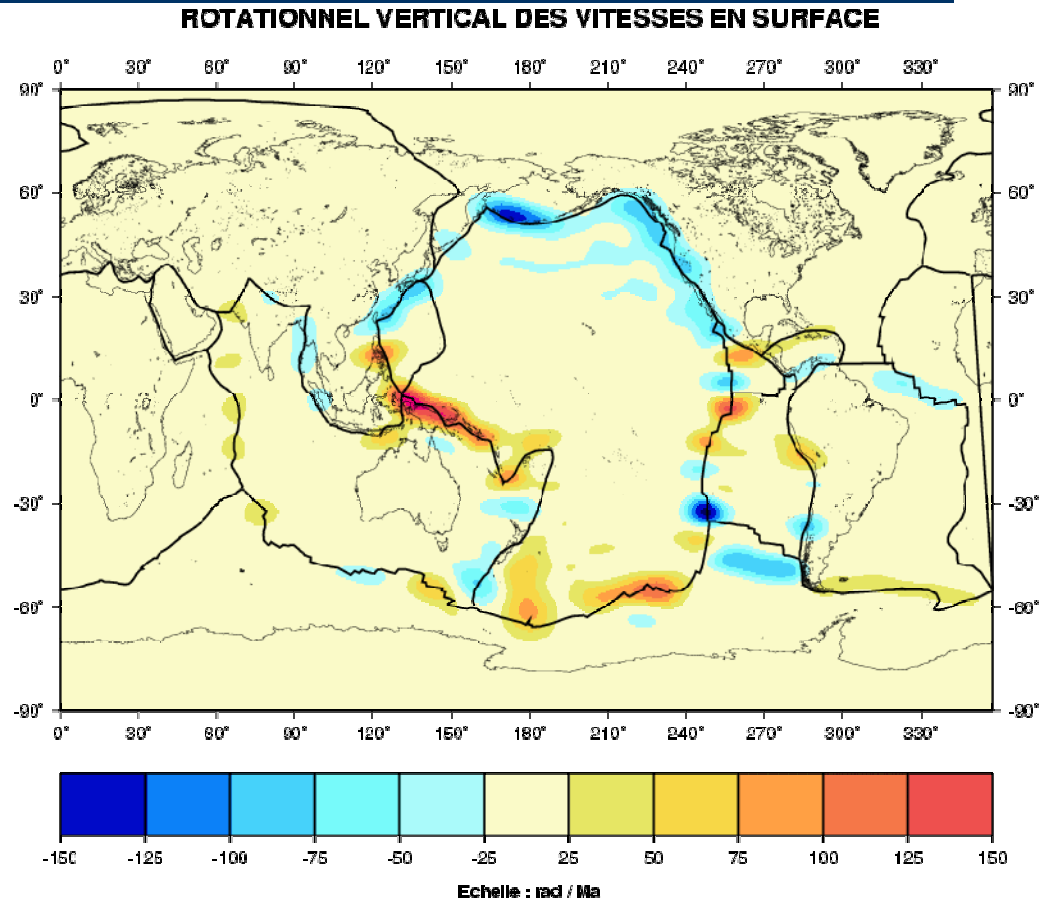
Il y a un nombre infini de poles possibles pour un seul vecteur vitesse

=> Seules les **grandes plaques** ont des poles bien déterminés.

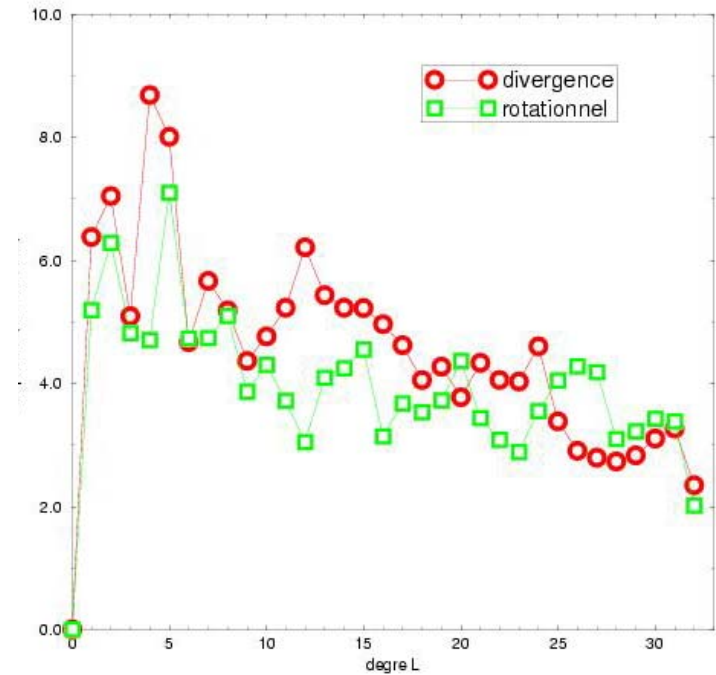
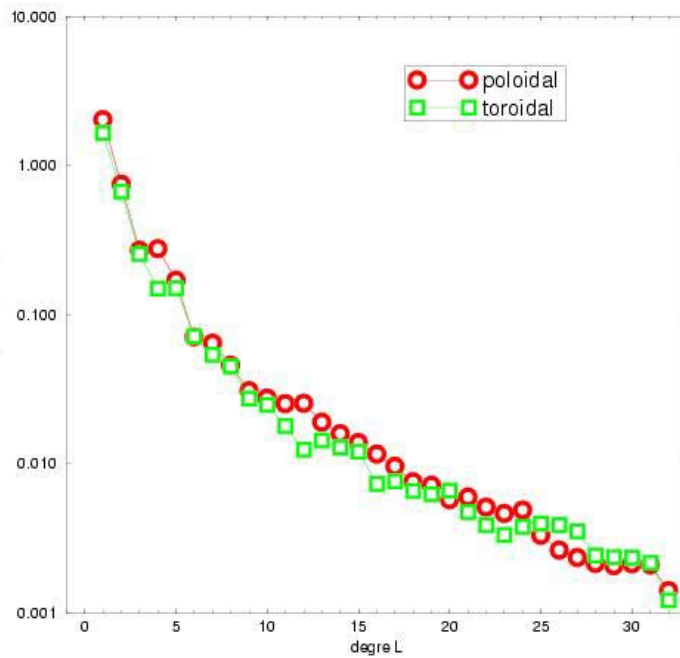
Poloidal de la tectonique des plaques



Toroidal de la tectonique des plaques



Spectres....



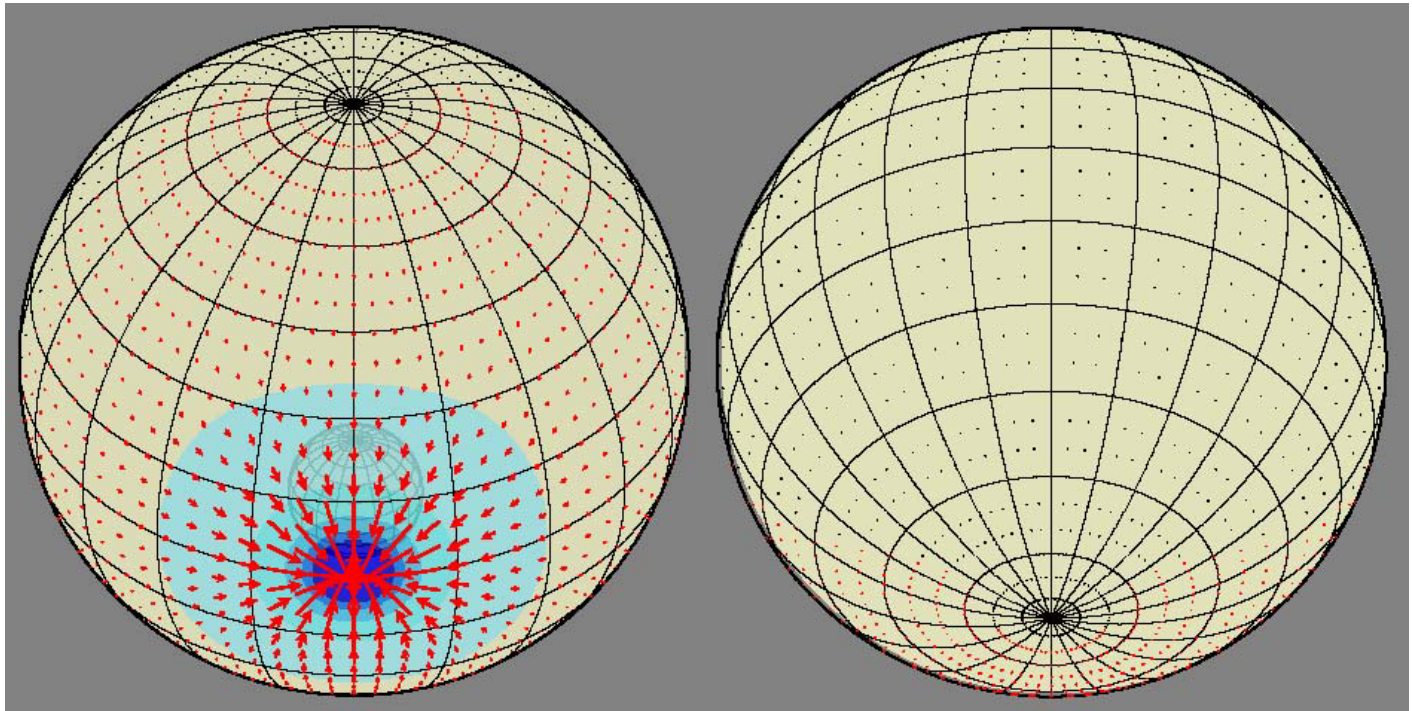
Un petit pic d'énergie dans les degrés 4-5

Equipartition de l'énergie entre poloidal et toroidal

Taille des plaques et longueur d'onde caractéristique

plaque	Surface x 10 ⁶ km ²	Taille caractéristique x 10 ³ km	Degré caractéristique
Pacifique	110	12	3
Amérique	102	11	3
Afrique	79	10	4
Eurasie	70	9	4
Inde	61	9	4
Antarctique	60	9	4
Nazca	17	5	7
Philippines	6	3	13
Arabie	5	3	13
Caraibes	3	2	19
Coco	3	2	19

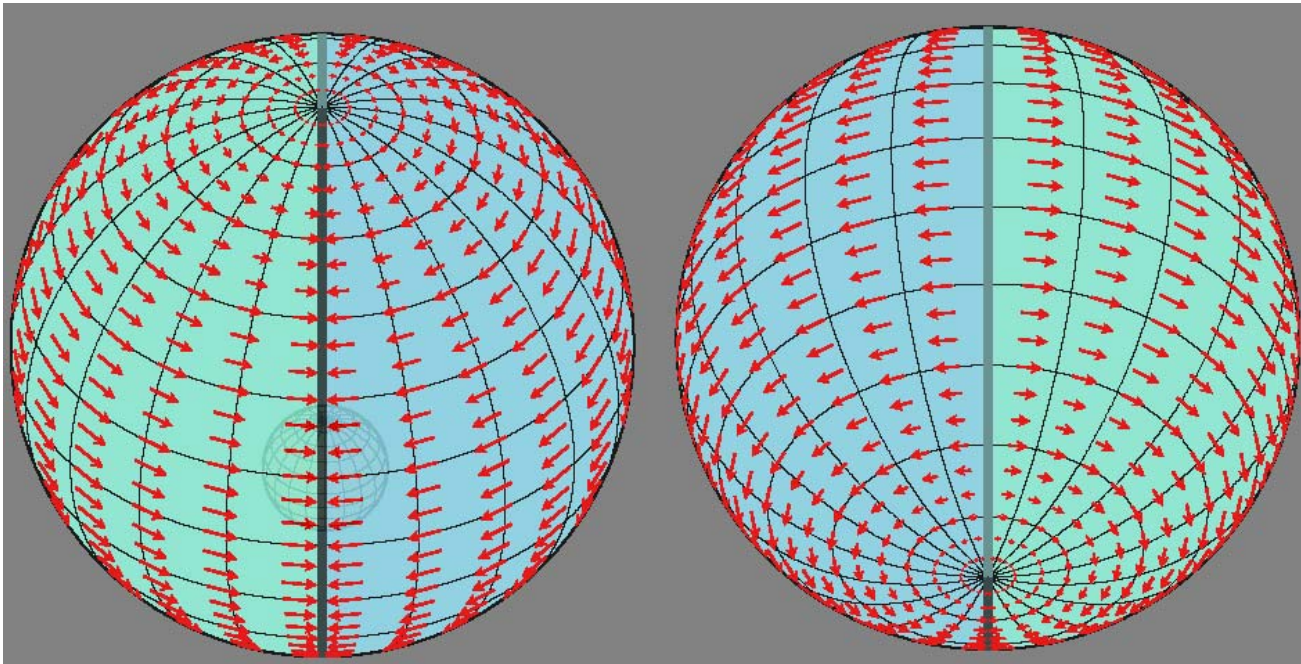
Source de la tectonique des plaques



Une anomalie de densité qui s'enfonce crée un champ purement poloidal

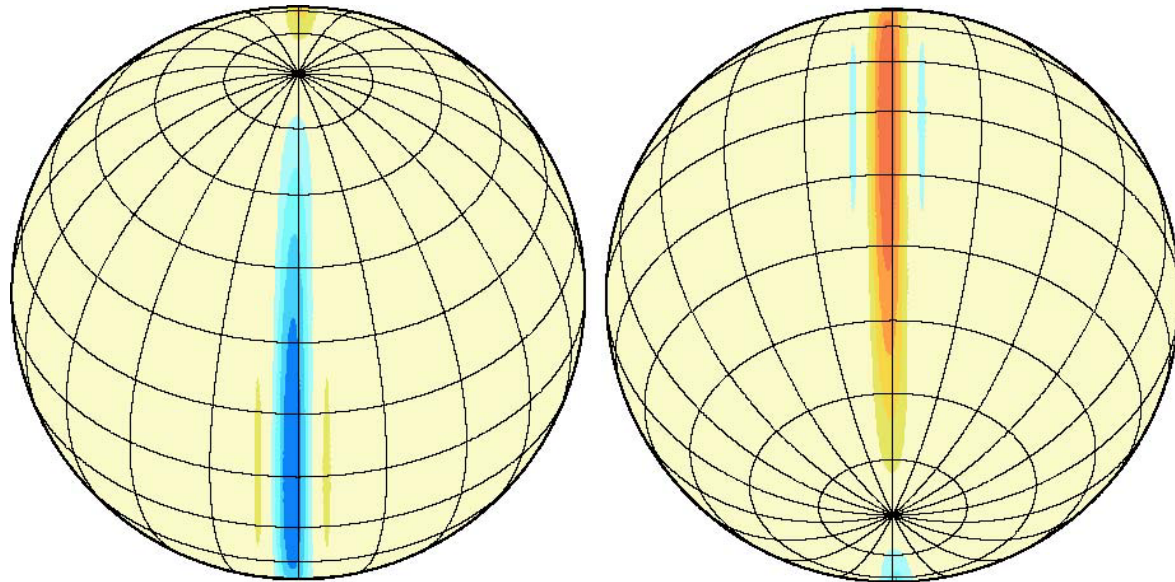
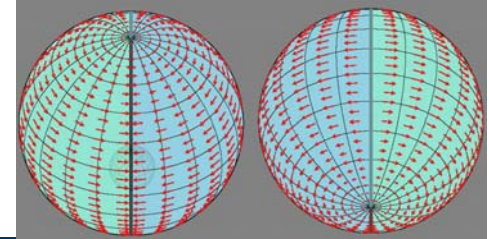
Sans plaque: pas de toroidal/rotationnel

Source de la tectonique des plaques



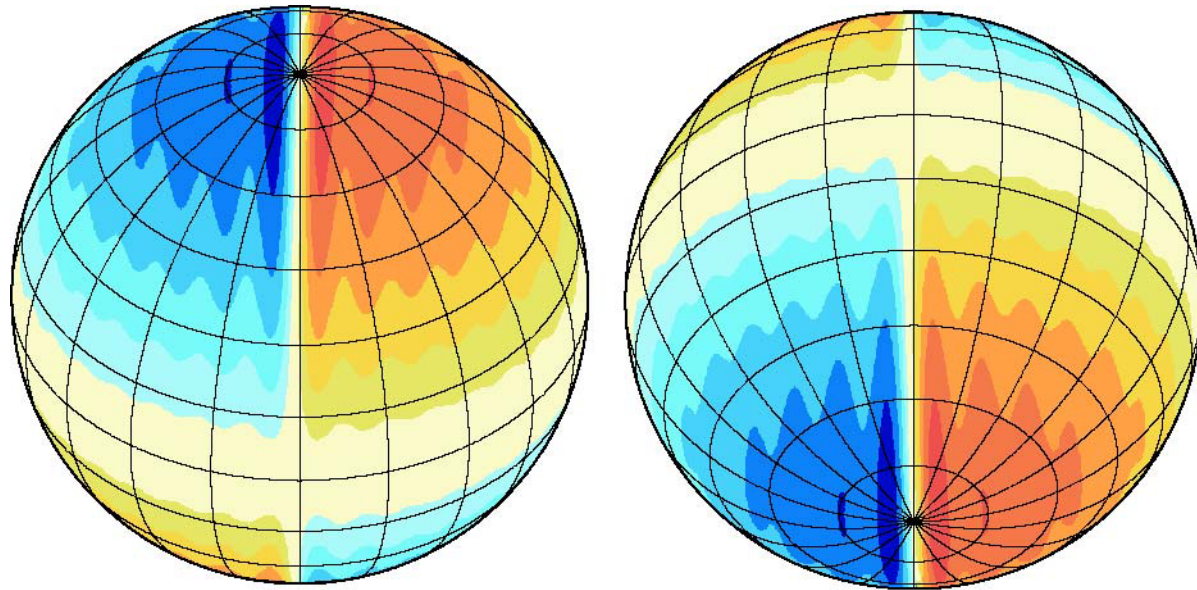
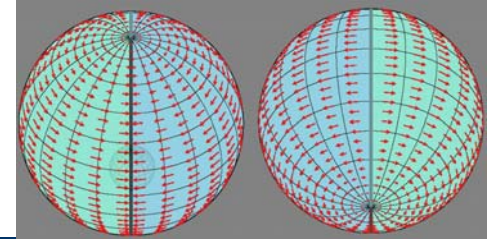
Une anomalie de densité qui s'enfonce **sous des plaques** crée un champ dans lequel il y a du toroidal (à cause de la rigidité des plaques)

Source de la tectonique des plaques



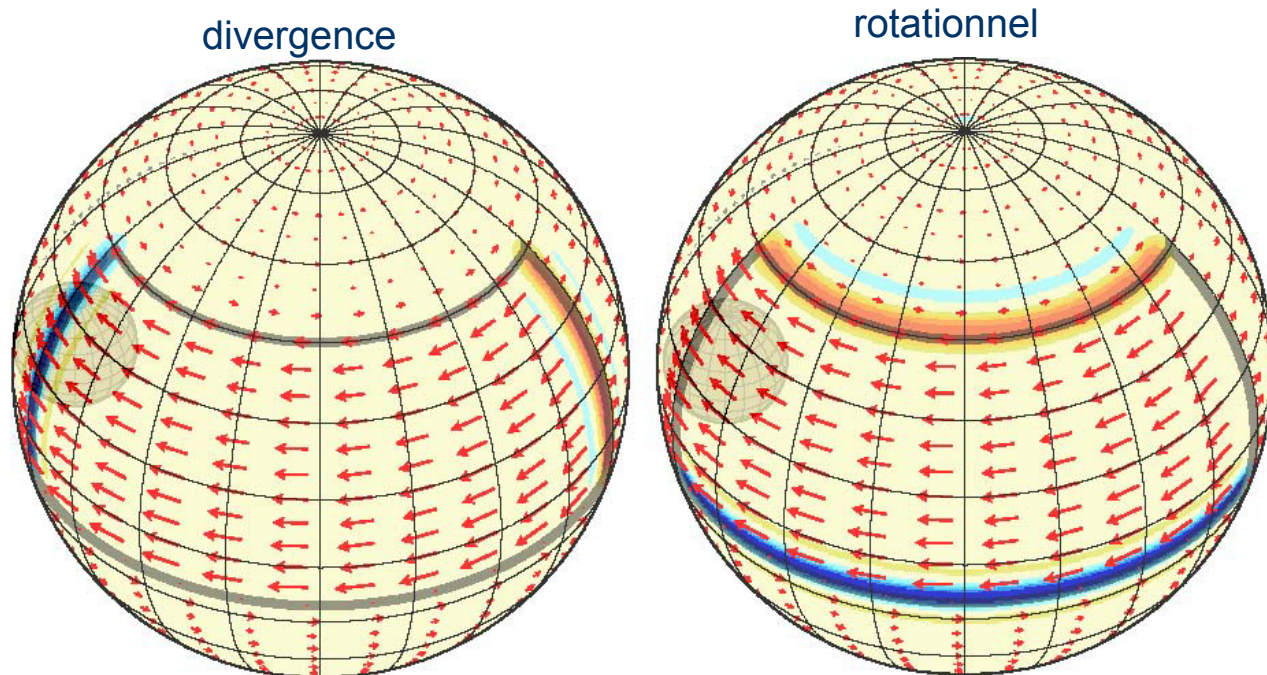
Divergence du champ créé par deux plaques hémisphériques qui convergent l'une vers l'autre

Source de la tectonique des plaques



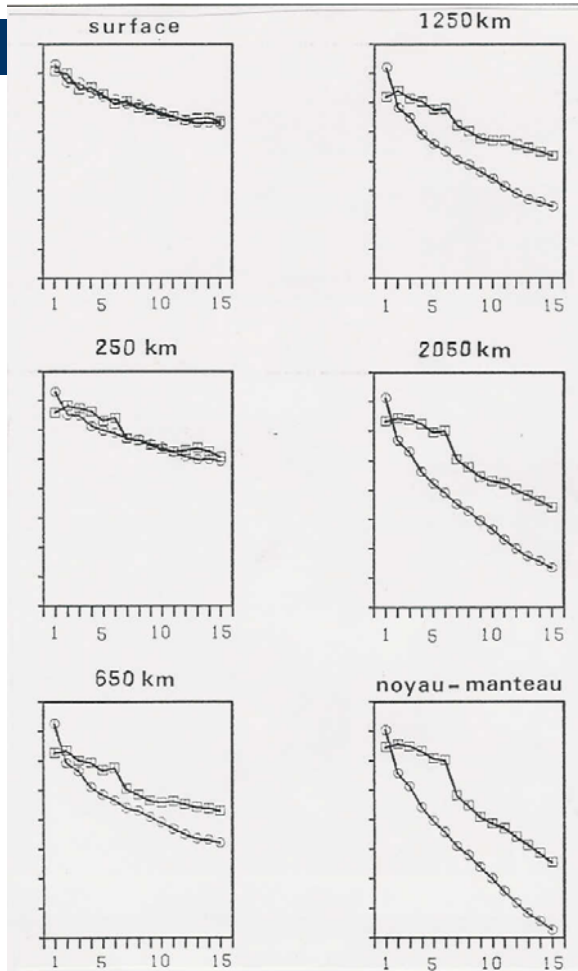
rotationnel du champ créé par deux plaques hémisphériques qui convergent l'une vers l'autre

Source de la tectonique des plaques



Une petite plaque bougeant contre une grande, à cause d'une anomalie de masse qui s'enfonce sous la frontière entre les deux, entraînant le manteau puis les plaques posées sur le manteau

Variation des spectres avec la profondeur



Le toroidal diminue avec la profondeur

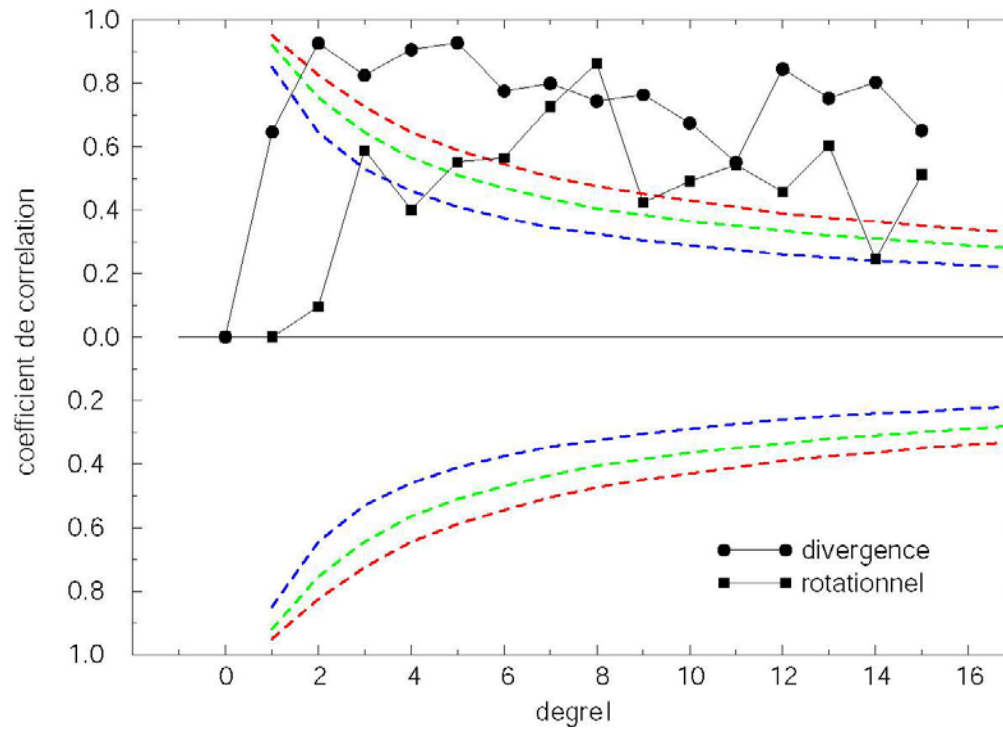
Normal sa seule source est en surface: les plaques

Le poloidal est sensiblement équivalent partout

Normal il y a des anomalies de densité qui déclenchent des flux (poloidaux) partout dans le manteau

Corrélations

correlation vitesses tomographie



Corrélations

correlation vitesses geoide

