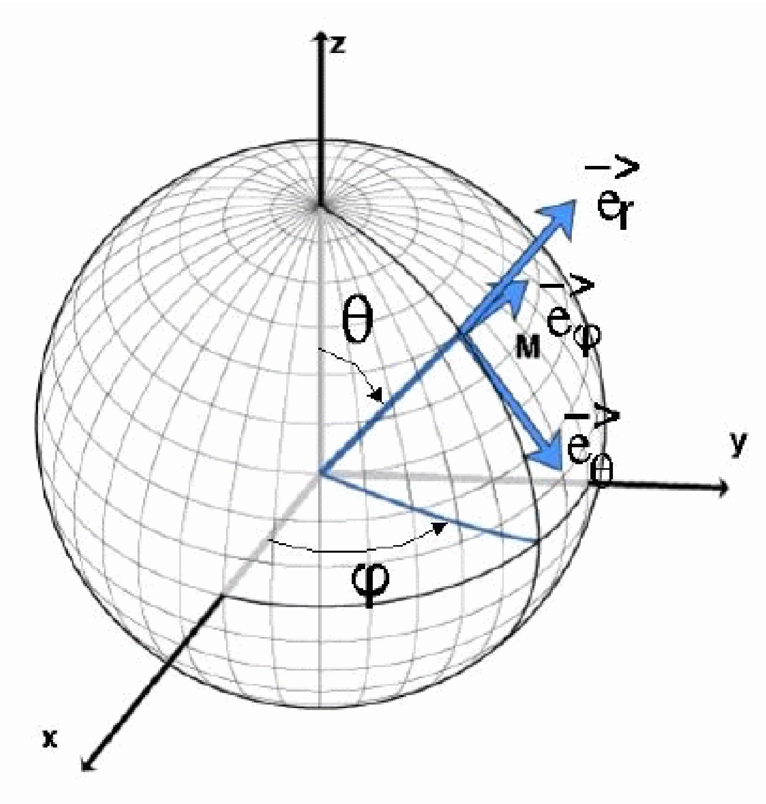
Opérateurs classiques en coordonnées sphériques



gradient

$$\vec{\nabla}P = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial P}{\partial r}\vec{e}_r \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial P}{\partial \theta}\vec{e}_\theta \\ \dfrac{1}{r\sin(\theta)}\dfrac{\partial P}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi \end{bmatrix}$$

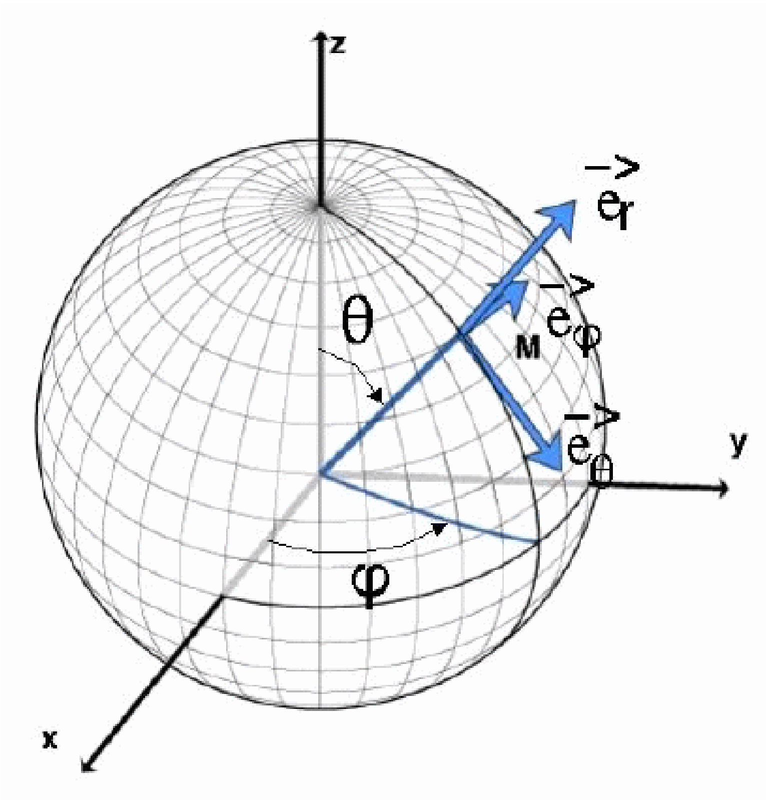
divergence

$$\vec{\nabla}.\vec{u} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 u_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta . u_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}(u_\varphi)$$

rotationnel

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{u} = \begin{bmatrix} \left[\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta . u_\varphi) - \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial \varphi}(u_\theta)\right]\vec{e}_r \\ \left[\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial \varphi}(u_r) - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(r.u_\varphi)\right]\vec{e}_\theta \\ \left[\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(r.u_\theta) - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial \theta}(u_r)\right]\vec{e}_\varphi \end{bmatrix}$$

Opérateurs classiques en coordonnées sphériques



Laplacien

$$\Delta P = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial P}{\partial r}\right) - \frac{1}{r^2}L^2(P)$$

Où L² est le Laplacien angulaire

$$L^2(P) = -\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial P}{\partial\theta}_{\theta}\right) - \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 P}{\partial\varphi^2}$$

Résolution de l’équation de Laplace (1/5)

Un champ quelconque sur une sphère doit satisfaire l'équation de Laplace loin des sources (**ΔP = 0**). donc si on cherche une base sur laquelle exprimer ce champ P, les "fonctions-vecteurs" de cette base doivent aussi satisfaire cette équation. On doit donc chercher les fonctions **V(r,θ,φ)** qui satisfont **ΔV = 0**.

Soit :

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial V}{\partial\varphi}=0$$

Si l’on suppose que la solution présente des variables séparées :
V(r,θ,φ) = R(r) . Θ(θ) . Φ(φ)

l'équation devient :

$$\cancel{\frac{1}{r^2}}\frac{1}{\mathbf{R}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial r}\right)+\frac{1}{\cancel{r^2}\sin\theta}\frac{1}{\Theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\cancel{r^2}\sin^2\theta}\frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}=0$$

la première partie est indépendante de θ et φ, la seconde partie est indépendante de r. Chaque terme doit donc être égal à une constante sans dimension dont la somme pourra s'annuler.

Résolution de l'équation de Laplace (2/5)

Solution du terme en r

pour le 1er membre : $$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial r}\right) = K\mathbf{R} = l(l+1)\mathbf{R}$$

en cherchant des fonctions polynômes du type : $\mathbf{R=r^a}$

on trouve pour solution : $\mathbf{R = K(r^l + r^{-(l+1)})}$

Résolution de l'équation de Laplace (3/5)

Solution du terme en φ

pour le 3ème membre : $$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = K\Phi = -m^2\Phi$$

en cherchant des fonctions trigonométriques du type : $\Phi = e^{\alpha \varphi}$

on trouve pour solution : $\Phi(\varphi) = K\, e^{im\varphi}$

Résolution de l'équation de Laplace (4/5)

Solution du terme en θ

En remplaçant **R** et Φ , l'équation du Laplacien devient une équation en θ seulement, que l'on peut écrire :

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right)+\left(l(l+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)\Theta=0$$

Avec x = cos(θ) => dΘ/dθ = dΘ/dx . dx/dθ = dΘ/dx. sin(θ)

=> $\sin^2(\theta) = 1- \cos^2(\theta) = 1-x^2$

On obtient :

$$(1-x^2)\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}-2x\frac{\partial\Theta}{\partial x}+\left(l(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right)\Theta=0$$

Résolution de l’équation de Laplace (5/5)

Solution du terme en θ

$$(1-x^2)\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}-2x\frac{\partial\Theta}{\partial x}+\left(l(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right)\Theta=0$$

Les fonctions solutions de cette équation sont les **polynômes de Legendre**, qui n'existent que pour des valeurs entières et positive de *l* et des valeurs entières de *m* entre -*l* et +*l*. Ces polynômes s'écrivent :

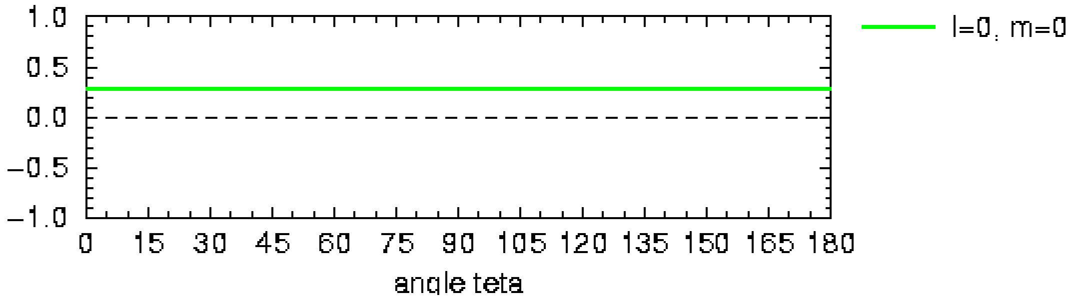
$$P_l^m(\cos\theta)=\sqrt{\frac{2(l-m)!}{(l+m)!}}\frac{(-1)^m}{2^l.l!}(1-\cos\theta)^{m/2}\frac{\partial^{l+m}(\cos^2\theta-1)^l}{\partial(\cos\theta)^{l+m}}$$

En fait ces fonctions sont moins compliquées qu'il n'y parait puisque ce sont tout simplement des produits de sinus et cosinus de puissances *l* et *m*.
Il est assez facile de se rendre compte que chaque Polynôme de Legendre passe un certain nombre de fois par zero quand θ varie entre 0 et π.
Le nombre de passage par zero d'un polynôme de **degré *l*** et **d'ordre *m*** est exactement ***l-m***.

$$P_l^m(\cos\theta) = \sqrt{\frac{2(l-m)!}{(l+m)!}}\,\frac{(-1)^m}{2^l.l!}(1-\cos\theta)^{m/2}\,\frac{\partial^{l+m}(\cos^2\theta-1)^l}{\partial(\cos\theta)^{l+m}}$$

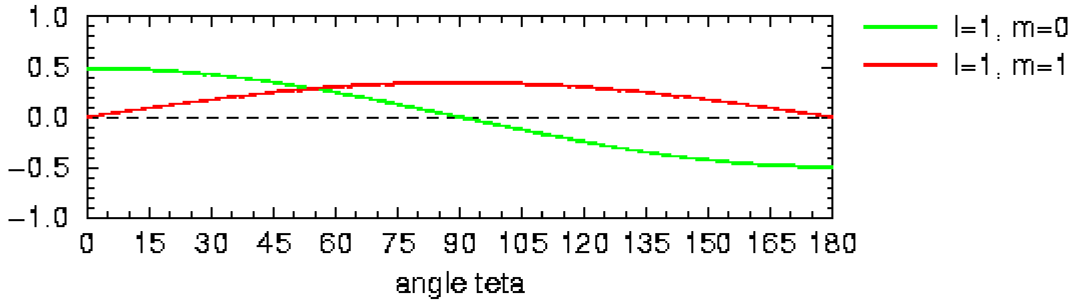
Polynômes de Legendre

$P_0^0(\cos(\theta)) = 1$



$P_1^0(\cos(\theta)) = \cos\theta$

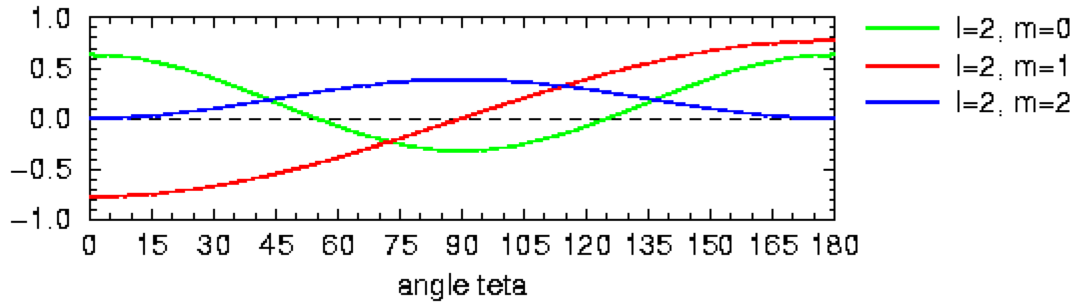
$P_1^1(\cos(\theta)) = -\sin\theta$



$P_2^0(\cos(\theta)) = ½\,(3\cos^2\theta - 1)$

$P_2^1(\cos(\theta)) = -3\cos\theta\sin\theta$

$P_2^2(\cos(\theta)) = 3\sin^2\theta$



Harmoniques Sphériques

Les fonctions solutions de l'équation de Laplace sont donc finalement les harmoniques sphériques $\mathbf{Y}_l^m$, qui s'écrivent donc :

$$Y_l^m(r,\theta,\varphi) = (C_l^m r^l + D_l^m r^{-(l+1)}) P_l^m(\cos\theta) e^{im\varphi}$$

Pour un champ que l'on peut définir sur une surface sphérique (r=constante), par exemple la topographie terrestre, on supprime la dépendance en r pour obtenir les harmoniques sphériques surfaciques :

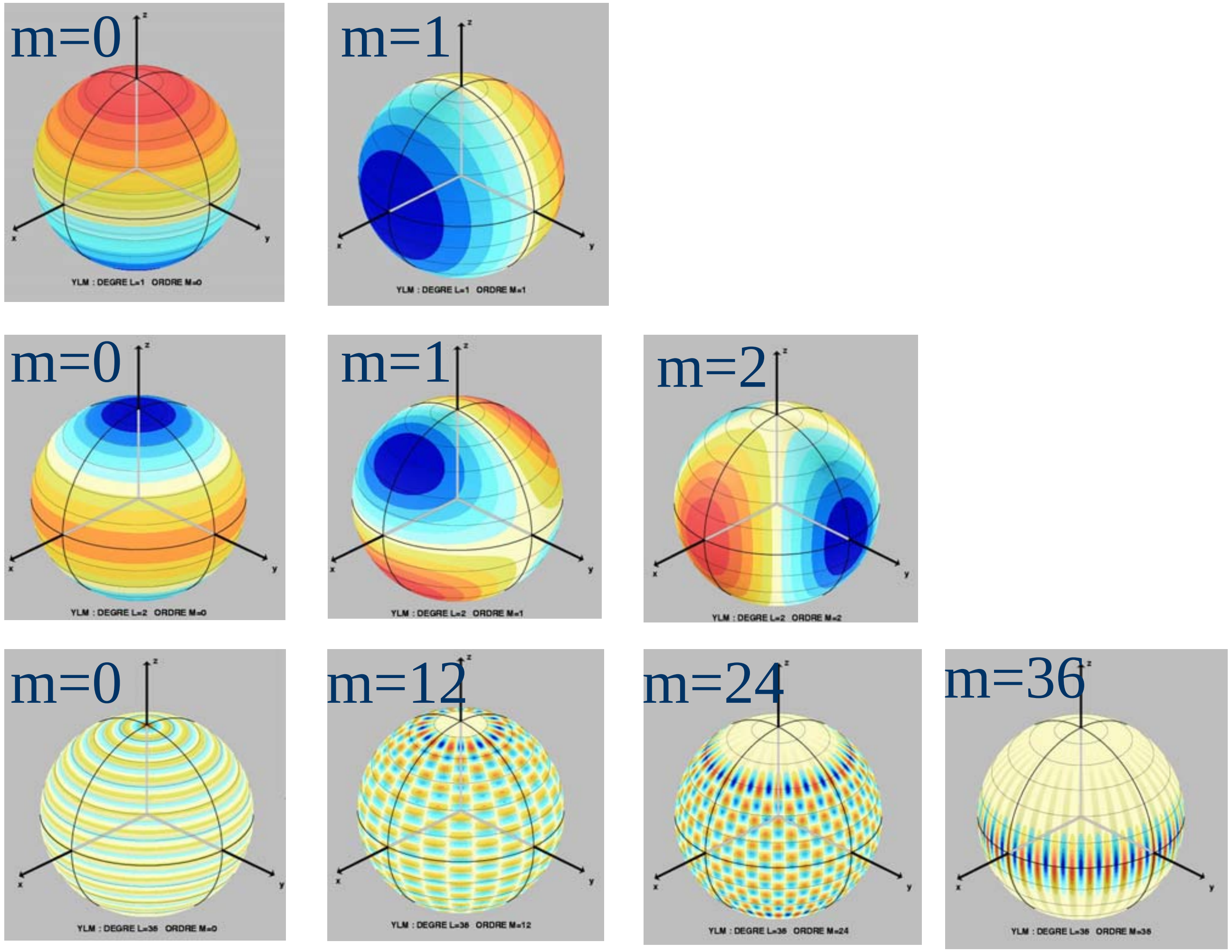
$$Y_l^m(\theta,\varphi) = C_l^m P_l^m(\cos\theta) e^{im\varphi}$$

Harmoniques Sphériques

L=1

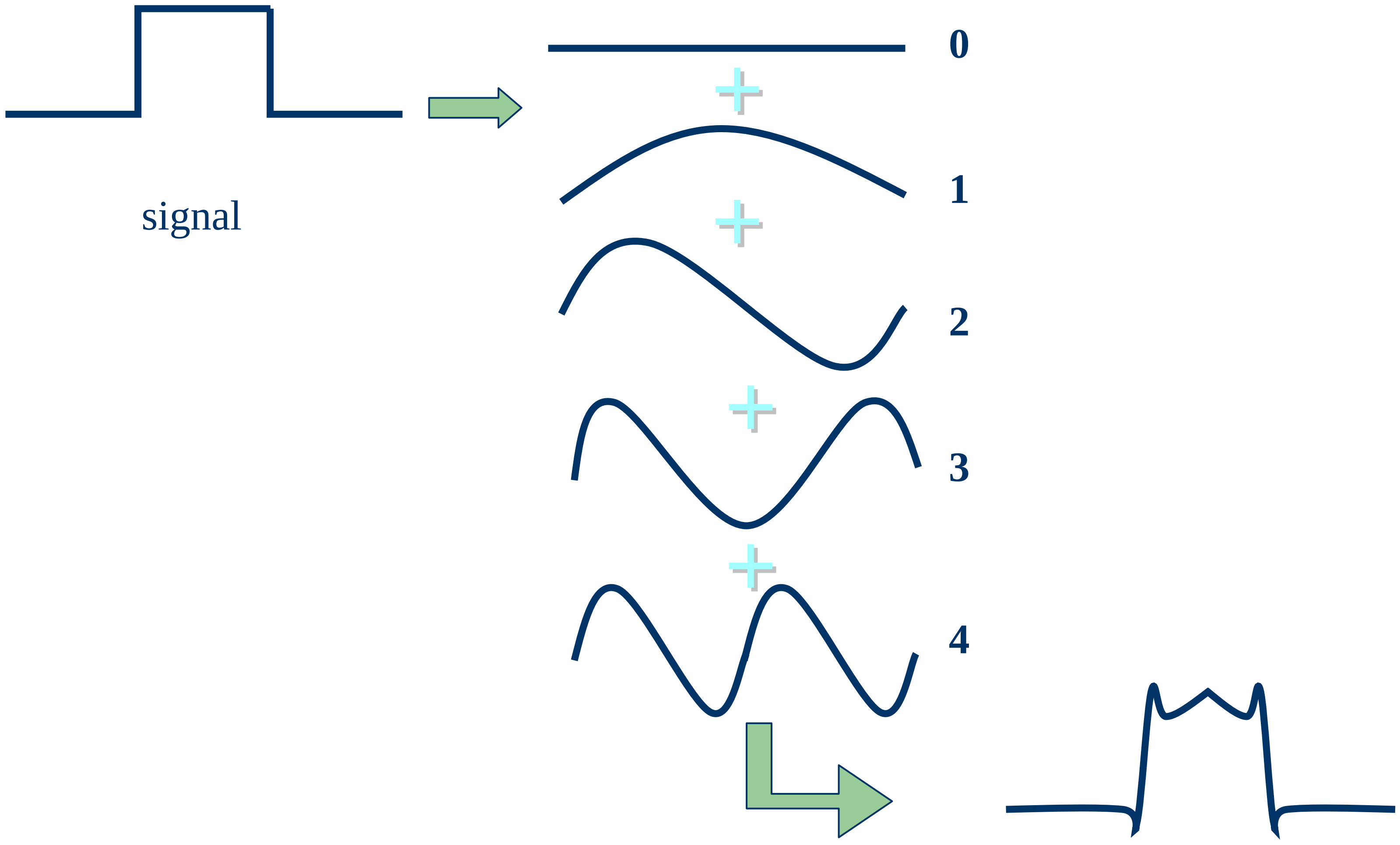
L=2

L=36



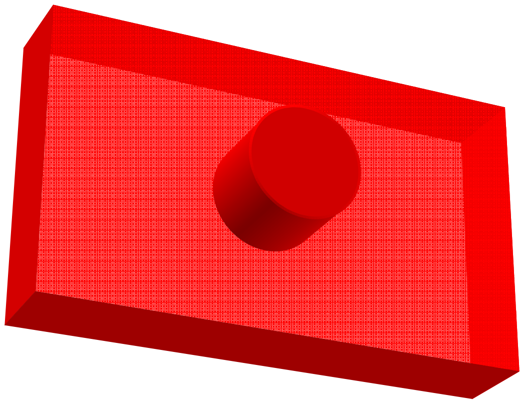
Décomposition d'un champ sur la base des harmoniques sphériques

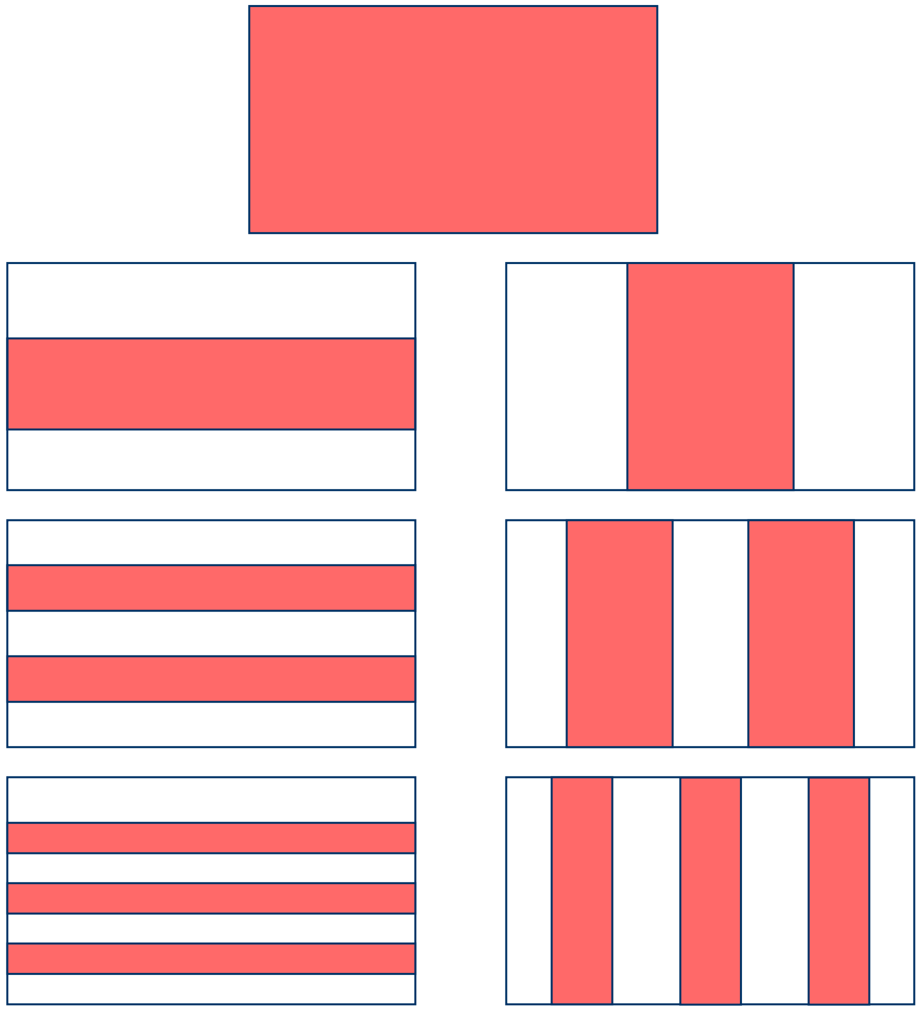
Décomposition en série de Fourier



Décomposition d’un champ sur la base des harmoniques sphériques

Décomposition à deux dimensions





Décomposition d'un champ sur la base des harmoniques sphériques

Tout champ qui a un Laplacien nul peut donc "s'écrire" sur la base des harmoniques sphériques :

$$P(\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \left[C_l^m e^{im\varphi} P_l^m(\cos(\theta)) \right]$$

En fait, C_l^m est un nombre complexe tel que : $\mathbf{C_l^m = (a_l^m + i\, b_l^m)}$

et l'exponentielle complexe $e^{im\varphi}$ s'exprime aussi : $\mathbf{e^{im\varphi} = \cos(m\varphi) + i \sin(m\varphi)}$

On obtient donc :

$$P = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \left[(a_l^m + i.b_l^m)(\cos(m\varphi) + i.\sin(m\varphi)) P_l^m(\cos(\theta)) \right]$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \left[\left((a_l^m \cos(m\varphi) - b_l^m \sin(m\varphi)) + i.(a_l^m \sin(m\varphi) + b_l^m \cos(m\varphi)) \right) P_l^m(\cos(\theta)) \right]$$

Décomposition d’un champ sur la base des harmoniques sphériques

P étant un champ réel, il est clair que le terme imaginaire de la recomposition doit toujours être nul. Cela impose que la somme sur *l* et *m* des termes imaginaires soit nulle. La somme pour *m* allant de -*l* à *l* peut être réécrite comme une somme pour *m* de -*l* à 1, 0, et 1 à *l*. On obtient alors :

$$P = \sum_{l=0}^{\infty}\left(a_l^0 + i.b_l^0 + \sum_{m=-l}^{1}(\ldots) + \sum_{m=1}^{l}(\ldots)\right)$$

Il est facile de voire que pour les valeurs positive et négatives de *m*, les termes imaginaires en $i(a_l^m \sin(m\,\varphi) + b_l^m \cos(m\,\varphi))$ vont s'annuler 2 à 2 à condition que : $\mathbf{a_l^{-m} = a_l^m}$ et $\mathbf{b_l^{-m} = -b_l^m}$; et que pour les terme $m = 0$ $(a_l^0 + i.b_l^0)$ il faut tout simplement que $\mathbf{b_l^0 = 0}$. On obtient alors :

$$P(\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}\left\{ A_l^0 + \sum_{m=1}^{l}\left[\left(A_l^m \cos(m\varphi) + B_l^m \sin(m\varphi)\right)P_l^m(\cos(\theta))\right]\right\}$$

A_l^m et B_l^m sont les coefficients de ce champ, tout comme une courbe à une dimension peut être représentées par la suite infinie de ses coefficients dans une décomposition en série de Fourier de Fourier. *l* est le degré, *m* est l'ordre.

Correspondance degré - longueur d’onde

Dans une décomposition en série de Fourier, la longueur d'onde associée à un coefficient de degré n est : $\lambda = l/n$ (le degré 1 donne toute la longueur *l*, le degré 2 la moitié, etc...).

De manière similaire, dans une décomposition en harmoniques sphériques, on associe une longueur d'onde λ au degré *l*. A la surface de la Terre, on a :

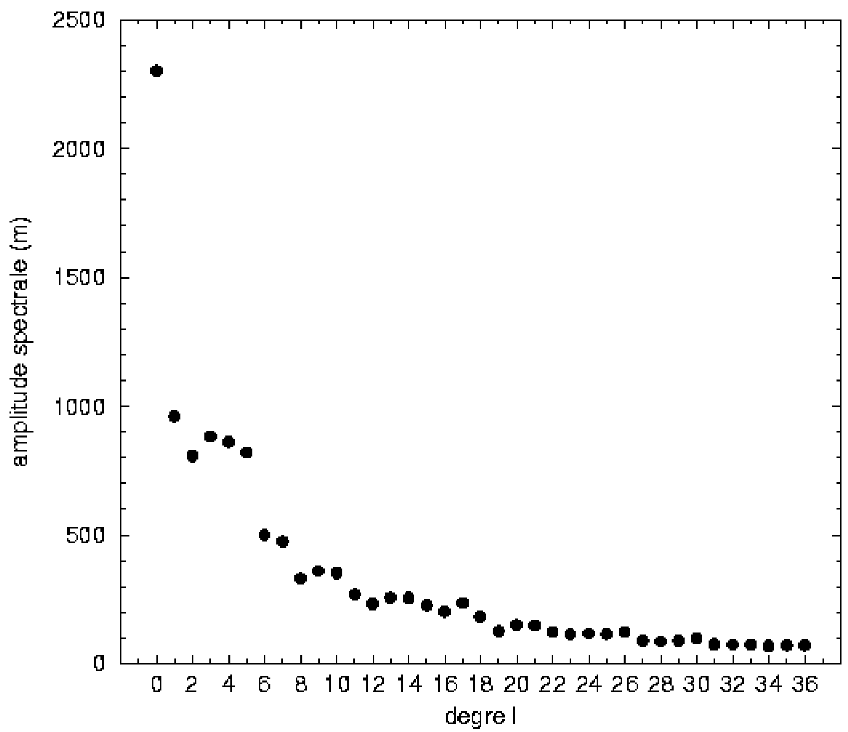
$$\boxed{\lambda = 2\pi R_T / l}$$

le degré 1 correspond à une longueur d'onde de 36000 km (la circonférence de la Terre, le degré 2 à 18000 km, le degré 10 à 3600 km, etc...

Spectre d’un champ

Le spectre d'un champ est la suite infinie de nombre qui donne l'amplitude de chacun des termes de degré *l* de la décomposition du champ.

$$S(l) = \sqrt{\frac{1}{4\pi} \sum_{l=-m}^{m} A_l^m \bullet A_l^{m^*}}$$



Un coefficient S(*l*) élevé indique que la contribution de ce degré dans le champ total est élevé. Pour un champ dont tous les coefficient S(*l*) sont du même ordre de grandeur, on parle de spectre plat.

Corrélation entre deux champs

On a deux champs (A et B) définis en tous points sur la sphère (θ et φ). La décomposition sur la base des harmoniques sphériques de ces deux champs est constituées des deux suites de nombres complexes A_l^m et B_l^m. le coefficient de corrélation entre les deux champs au degré *l* est :

$$C(l) = \frac{\sum_{m=-l}^{l} A_l^m . B_l^{m^*}}{\sqrt{\sum_{m=-l}^{l} A_l^m . A_l^{m^*} \times \sum_{m=-l}^{l} B_l^m . B_l^{m^*}}}$$

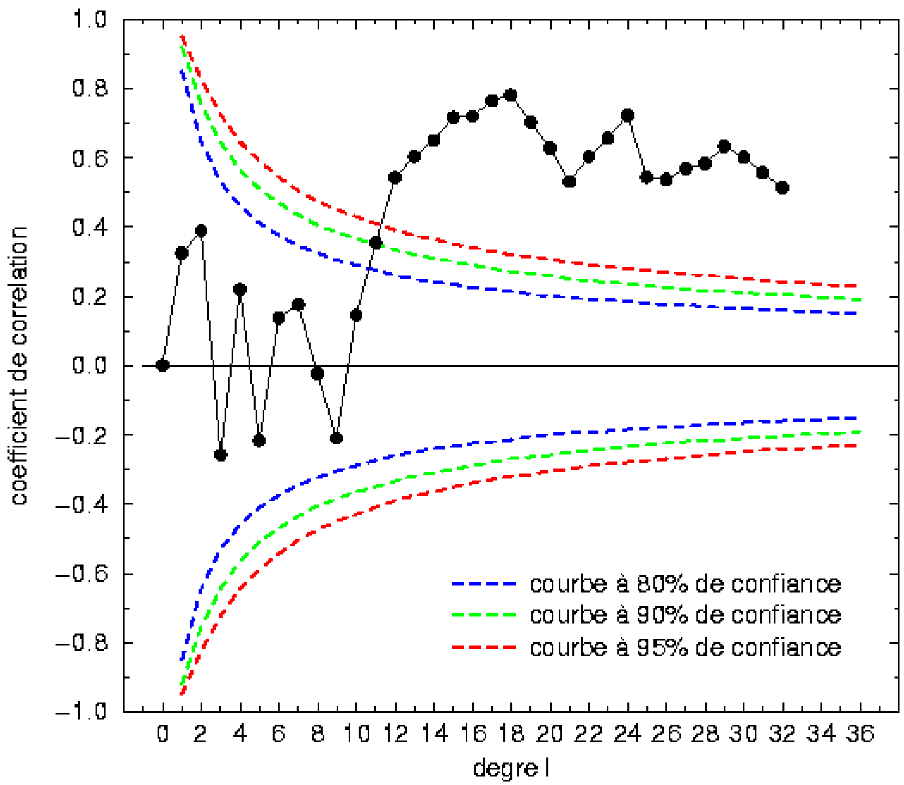
Si C(*l*)=1 alors les coefficients des champs A et B au degré *l* sont proportionnels. Pour que les deux champs A et B soient complètement identiques, il faut que tous les coefficients de corrélation valent 1 **et** que les coefficients de proportionnalité de tous les degrés valent 1 aussi.

C(*l*)=1 (ou = -1) implique qu'il y a 100% de chance que les deux champs soient parfaitement corrélés (ou anti-corrélés) au degré *l* considéré.

Plus précisement : au degré *l* il y a N=2*l*+1 termes (*m* varie de -*l* à *l*). Le coefficient de corrélation est r = C(*l*). Or, dans un problème à N degrés de liberté, la probabilité pour que la variable t = $(N/1-r^2)$ soit plus petite qu'une certaine valeur donnée t_0, est *la student's t-distribution*: Q(t,N). La valeur 1-Q(t,N) est donc le niveau de confiance auquel l'hypothèse d'une corrélation due au hasard est infirmée.
Par exemple : r=1 => t = (qqsoit N) => Q(t,N) = 0 => 1 - Q(t,N) = 1 = 100%

C(*l*)=1 => il y a 100% de chance que la corrélation entre les champs A et B au degré *l* ne soit pas due au hasard

Courbe de corrélation

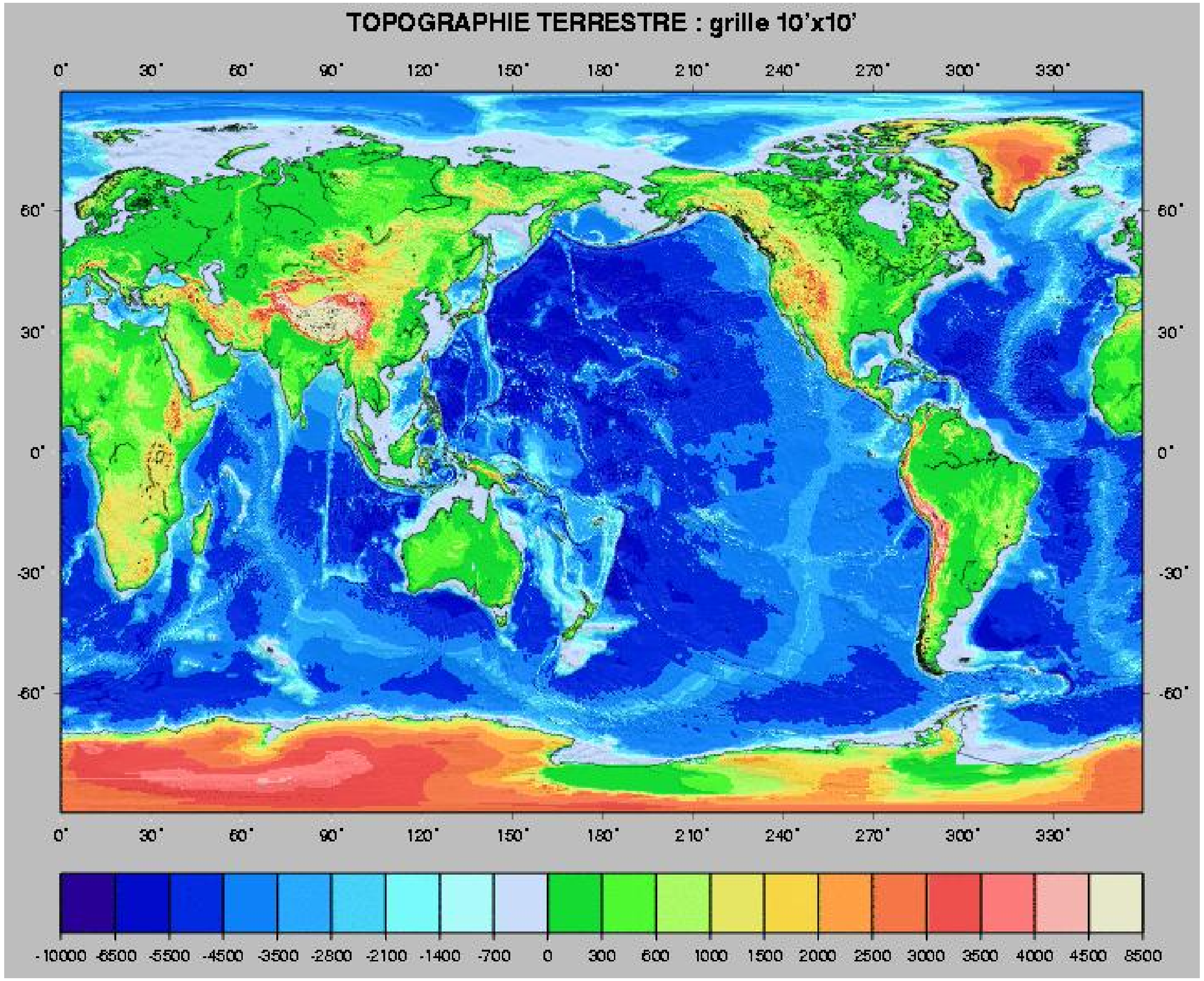


- les bas degrés (l < 10) : tous les coefficients sont proche de zero, et en tous cas largement en dessous de la courbe à 80% de confiance. cela veut dire que pour ces grandes longueurs d'onde, il n'y a pas de corrélation significative entre ces deux champs.

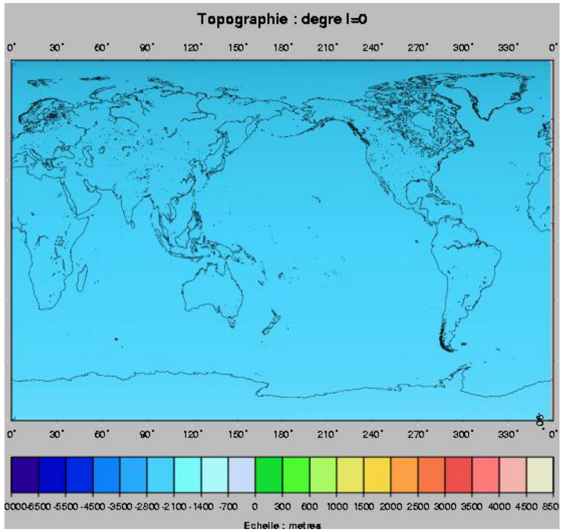
-les degrés plus élevés (l > 10) : tous les coefficients sont au dessus de la courbe à 95% de confiance. Cela signifie qu'il n'y a qu'une toute petite chance (de l'ordre de quelques %) pour que la ressemblance entre les deux champs soit due au hasard, et que donc ils sont significativement corrélés à courte longueur d'onde (grand degré).

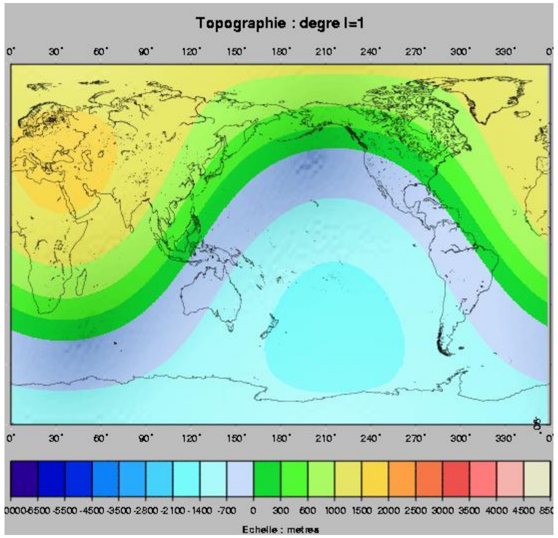
On pourrait en déduire que la source à l'origine des deux champs est distincte à grande longueur d'onde (ce n'est pas le même phénomène qui est à l'origine des deux champs), et peut être commune à courte longueur d'onde...

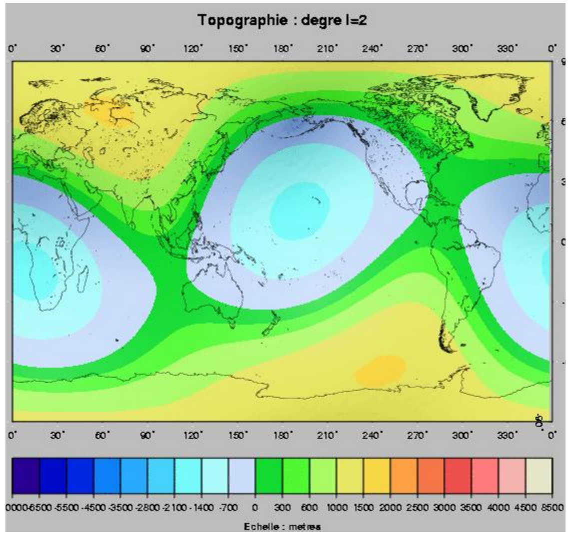
Application à la topographie terrestre

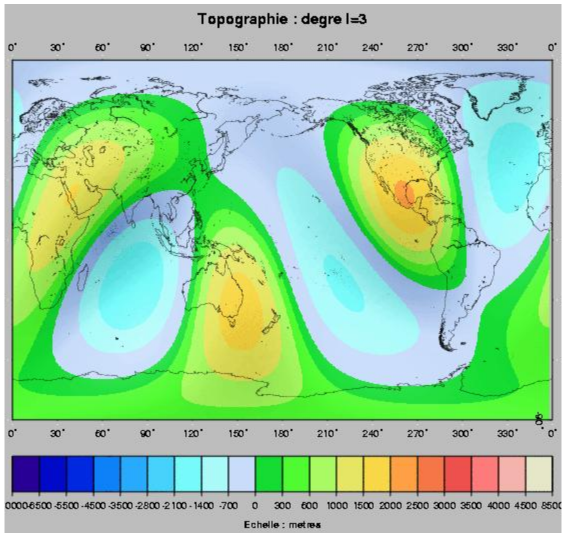


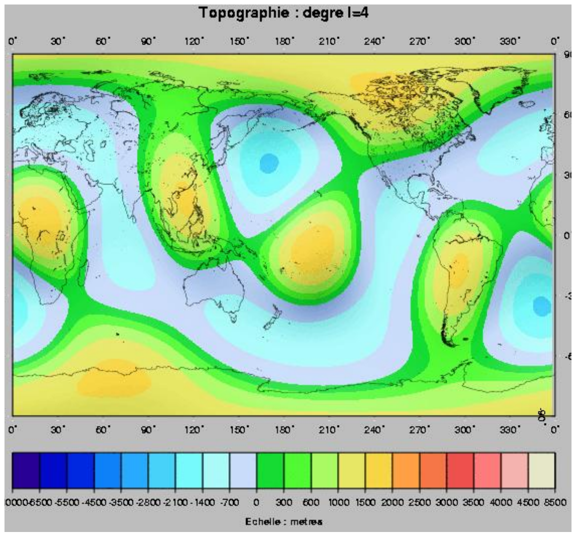
Application à la topographie terrestre

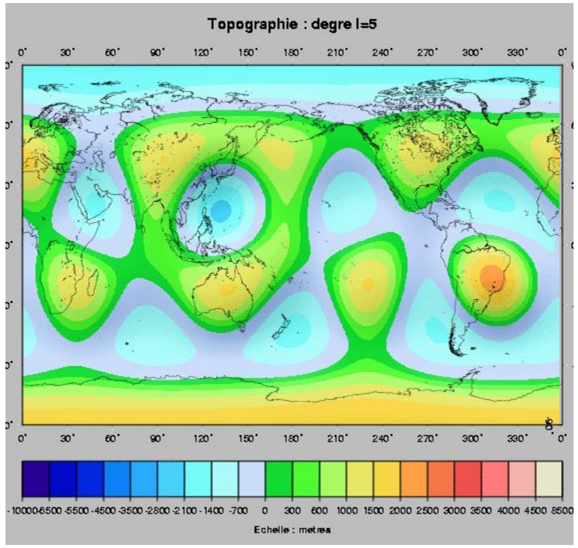




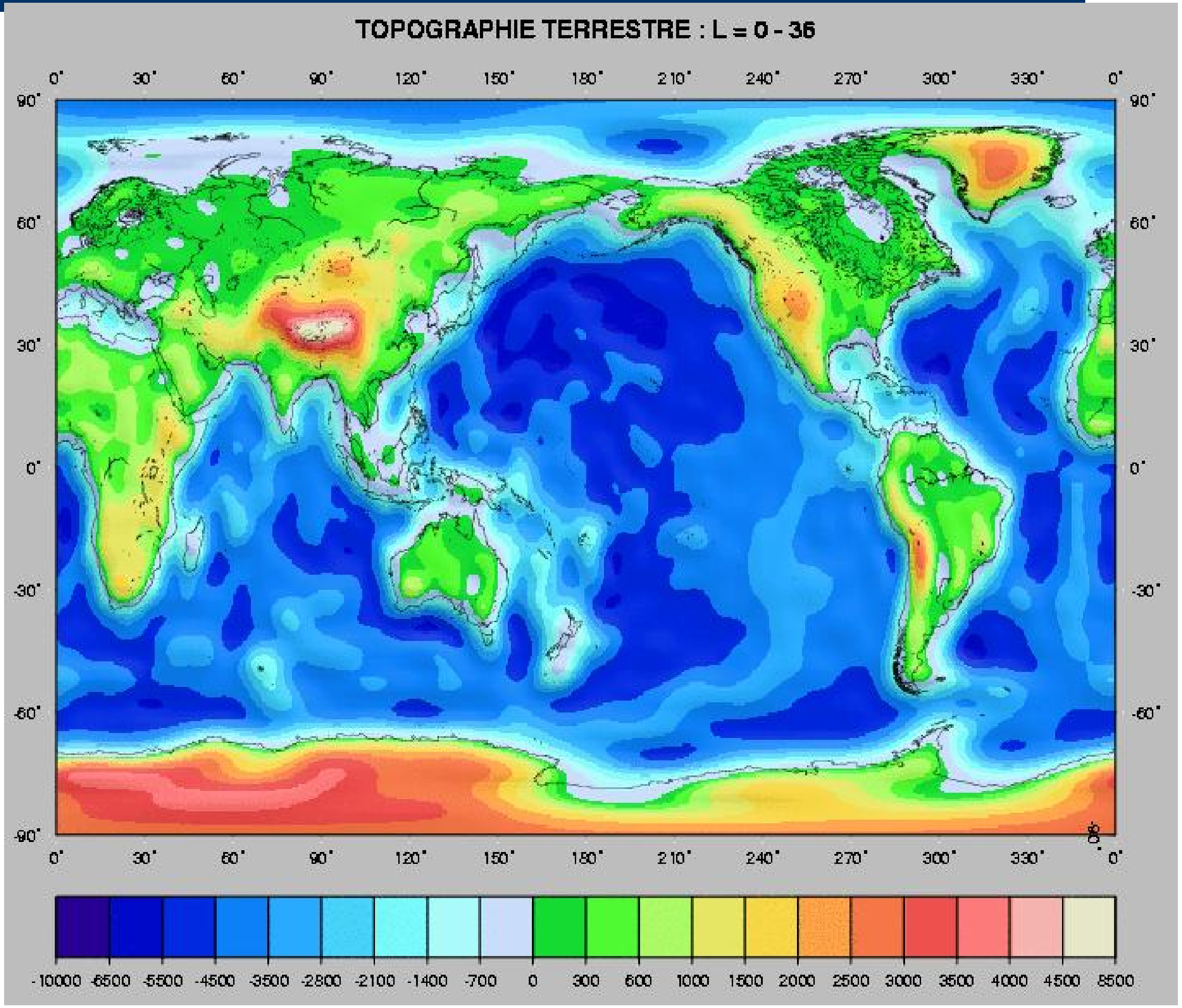




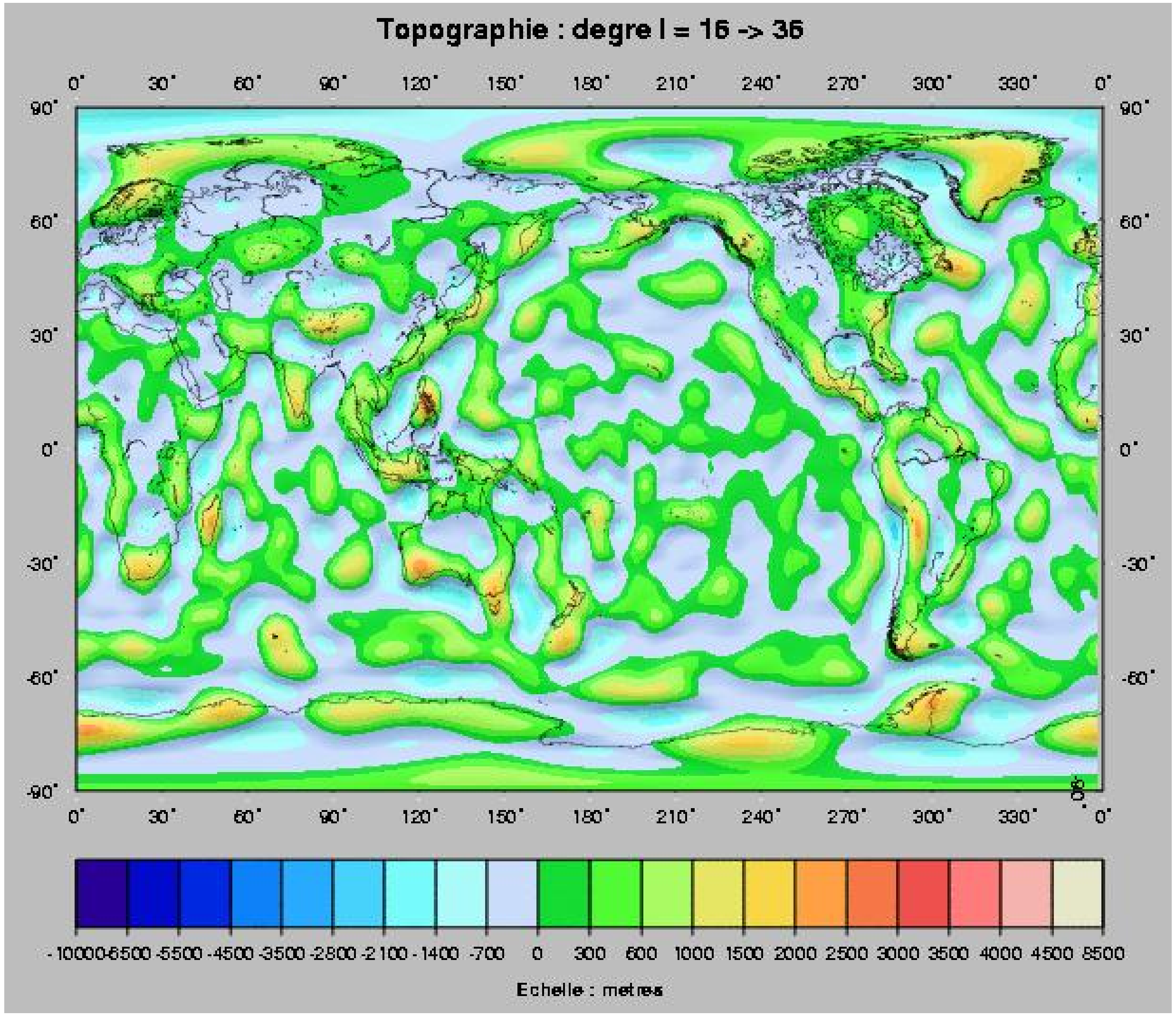




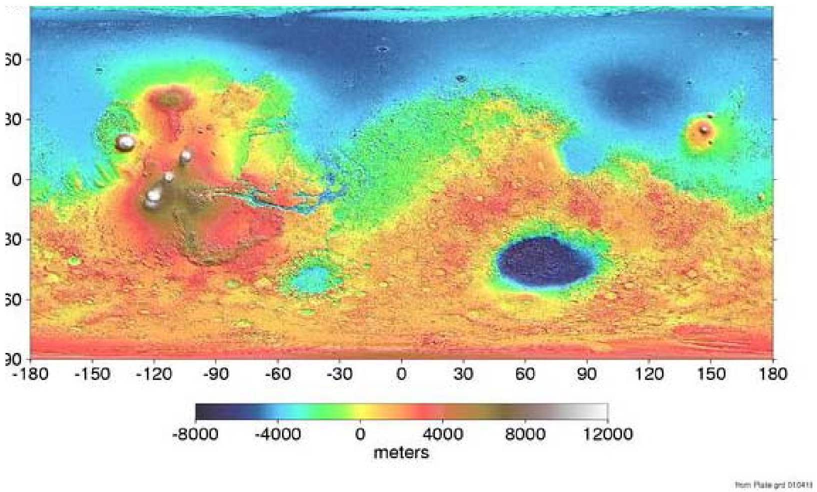
Application à la topographie terrestre

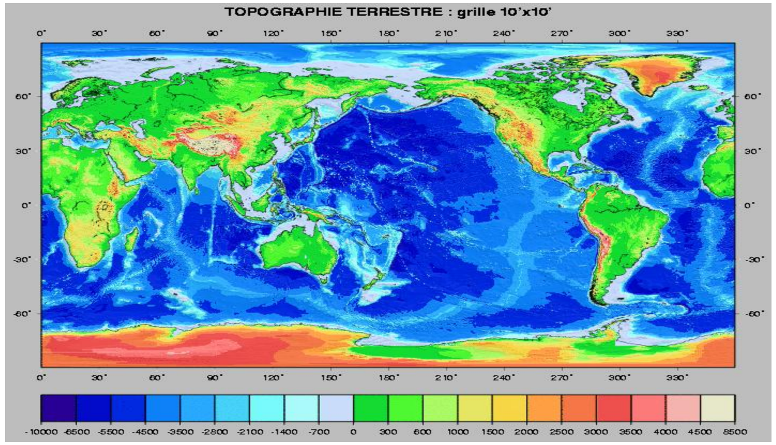


Application à la topographie terrestre



D’autres planètes….





spec-topo-planet