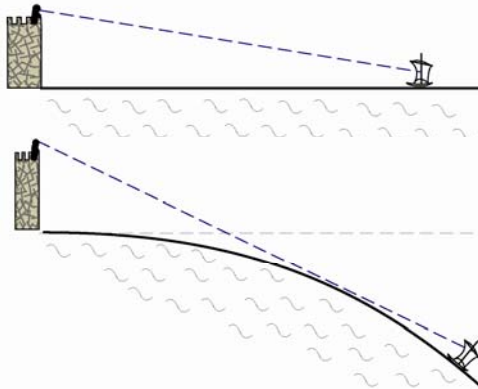


## Ancient times Geodesy (6 century bc)

- Geodesy is a very old science. It comes from the first question mankind ask themselves : **what is the shape and the size of the earth ?**



If the Earth were flat, then one could see very far

=> no horizon

Because there is an horizon (i.e. objects disappear below the horizon)

=> **Earth is spherical**

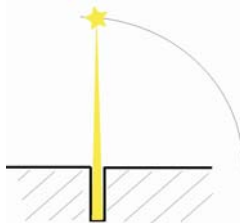
1

M2 STEP - Module "Outils et méthodes de la géodesie spatiale" - C. Vigny

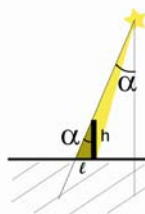
## Ancient times Geodesy (Eratosthene, 300 bc)

Earth size :  $C = 360^\circ / \alpha * d_{12}$

$\alpha = 7^\circ 12'$   $d = 5000 \text{ st}^* \Rightarrow C = 40000 \text{ km}$

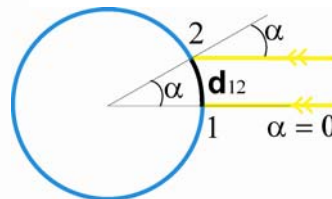


At one place on Earth, the Sun is vertical (lights the bottom of a well) only once a year



At the same time, at a different place, the Sun is not vertical

The angle can be measured from the length of the shadow of a vertical pole



The angle  $\alpha$  of the sun light direction depends on the **local vertical** direction

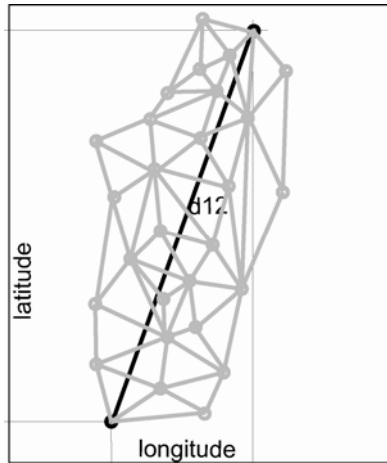
=> Depends on the **latitude** of the site

2

\* 1 st (stade) = 160m

M2 STEP - Module "Outils et méthodes de la géodesie spatiale" - C. Vigny

## «Modern» Geodesy (17th century)



A correction has to be made if distance is **not aligned** with longitude

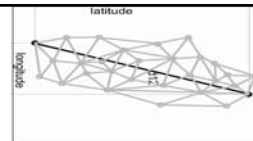
$d_{12}$  can be computed from the **sum** (oriented) of many smaller distances

Measuring many (if not all) **distances** and **angles** within a network of points give the more accurate solution for  $d_{12}$

3

M2 STEP - Module "Outils et méthodes de la géodésie spatiale" - C. Vigny

## Modern Geodesy



Trilateration: a given number of baselines are measured\* (all those short enough and/or easy enough) within the network. Requested distances are then computed using trigonometric formulas.

Triangulation: angles between all visible points from a given point in the network are measured\*. Only 1 single baseline needs to be measured to compute all lengths in the network using trigonometric formulas.

Drawbacks:

- 1/ necessity of visibility between points for triangulation and accessibility between points for trilateration
- 2/ lesser precision of distance measurements. Lasers are precise, but not over long distances (at the Earth surface) (5km ok, 10km good, 50 km does not work)
- 3/ propagation of measurement or computation errors on a single baseline on all baselines within the network

\* Distance measurements are nowadays made with lasers, angle measurements are made with theodolites

4

M2 STEP - Module "Outils et méthodes de la géodésie spatiale" - C. Vigny

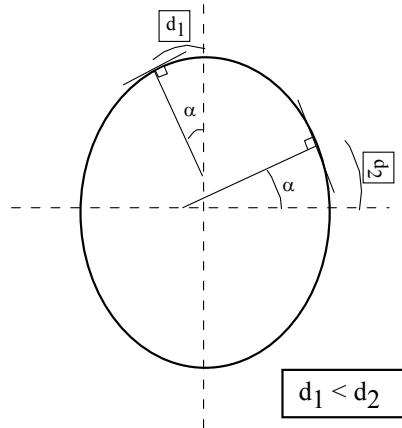
## The shape of the Earth (18th century)

Making those measurements, different people find different values for the length of an arc of  $1^\circ$  at different places in Europe

- Snellius (1617) : 104 km
- Norwood (1635) : 109 km
- Riccioli (1661) : 119 km

In France, **Picard** finds :

- **108 km** in the **north** of France
- **110 km** in the **south** of France

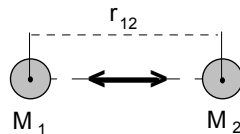


5

M2 STEP - Module "Outils et méthodes de la géodesie spatiale" - C. Vigny

## Force gravitationnelle

1/ attraction réciproque de deux masses



Les deux masses  $M_1$  et  $M_2$  s'attirent mutuellement avec une force  $F_{12}$  telle que :

$$\vec{F}_{12} = -G \frac{M_1 M_2}{r^2} \vec{u}_{12}$$

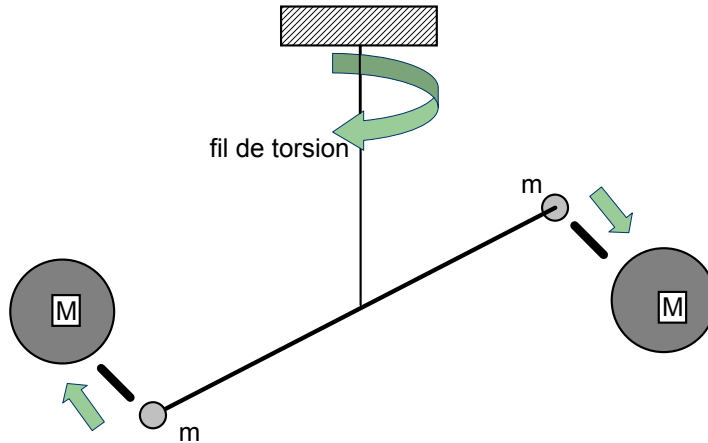
où  $G$  est la constante de gravitation universelle :  $G = 6.674 \cdot 10^{-11}$  S.I.

$$\begin{aligned} [G] &= [\text{force}] \cdot [\text{longueur}]^2 / [\text{masse}]^2 \\ &= \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2} \\ &= \text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2} \end{aligned}$$

6

M2 STEP - Module "Outils et méthodes de la géodesie spatiale" - C. Vigny

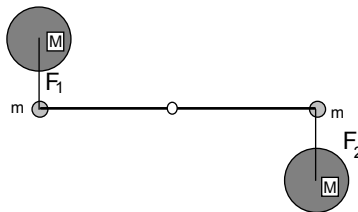
## Determination de G: experience de Cavendish



7

M2 STEP - Module "Outils et méthodes de la géodesie spatiale" - C. Vigny

## Determination de G: experience de Cavendish



chacune des grosses masses exerce une attraction sur la petite masse la plus proche (on néglige l'effet sur la petite masse la plus lointaine), et provoque une rotation du pendule.

les forces gravitationnelles  $F_1$  et  $F_2$  valent :  $F_1 = F_2 = F = \frac{GMm}{r^2}$  (où  $r$  est la distance entre la grosse et la petite masse.)

le couple gravitationnel vaut donc :  $L.F = \frac{GMm.L}{r^2}$

et le couple de torsion du pendule vaut :  $C.\theta$

à l'équilibre, les deux couples s'annulent :  $\frac{GMm.L}{r^2} = C.\theta$  ce qui donne  $G$ .

8

M2 STEP - Module "Outils et méthodes de la géodesie spatiale" - C. Vigny

## Determination de G: experience de Cavendish

Une fois  $G$  connue, on en déduit la masse et la densité de la Terre. Sachant que la force d'attraction à la surface vaut environ  $F = 10 \text{ m/s}^2$  (valeur donnée par la mesure de la vitesse de la chute des corps), on peut poser :

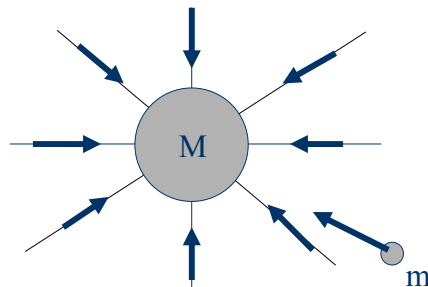
$$F = \frac{GM_{\text{Terre}}}{R_{\text{Terre}}^2}$$

avec  $R_{\text{Terre}} = 6400 \text{ km}$ , on trouve :  $M_{\text{Terre}} = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$   
et :  $\rho_{\text{Terre}} = 5500 \text{ kg/m}^3$

9

M2 STEP - Module "Outils et méthodes de la géodesie spatiale" - C. Vigny

## Champ de gravité créé par une masse



Une masse  $M$  placée dans l'espace va créer un « champ de gravité » qui va occuper tout l'espace

$$\vec{g}(x, y, z) = \vec{g}(r, \theta, \varphi) \quad (= GM/r^2 \text{ dans ce cas particulier})$$

Dans le champ de gravité ( $\mathbf{g}$ ) ainsi créé, toute particule de matière de masse  $\mathbf{m}$ , placée dans ce champ, subira une force de gravitation  $\mathbf{F} = \mathbf{m} \mathbf{g}$

10

M2 STEP - Module "Outils et méthodes de la géodesie spatiale" - C. Vigny

## Potentiel de gravité

le rotationnel du champ de gravité est nul :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{g} = \begin{bmatrix} \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \cdot u_\varphi) - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (u_\theta) \right] \hat{e}_r \\ \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (u_r) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot u_\varphi) \right] \hat{e}_\theta \\ \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot u_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_r) \right] \hat{e}_\varphi \end{bmatrix}$$

avec

$$\vec{g} = \begin{bmatrix} \frac{GM}{r^2} \hat{e}_r \\ 0 \hat{e}_\theta \\ 0 \hat{e}_\varphi \end{bmatrix} \quad (\text{fonction de } r \text{ uniquement})$$

on obtient aisément

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{g} = 0$$

11

## Potentiel de gravité

Or, le rotationnel du gradient d'un champ est toujours nul (relation fondamentale des opérateurs n° 4).

$$\text{rot}(\text{grad} V) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

donc il existe un champ scalaire  $V$  tel que :  $\vec{g} = -\text{grad}(V)$

Alors, le rotationnel de  $g$  sera alors automatiquement nul: par construction. On dit que  $g$  dérive d'un potentiel, et que  $V$  est le potentiel de gravité.

Dans le cas simple précédent où  $g$  vaut  $GM/r^2$ , il est évident que le potentiel  $V$  vaut :  $GM/r$

12

## Potentiel de gravité

D'autre part, la divergence du champ de gravité est nulle :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \cdot u_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (u_\varphi)$$

Et là encore, seule le composante de  $\mathbf{g}$  selon  $r$  est non nulle, et vaut  $\mathbf{g}_r = \mathbf{GM}/r^2$ .

On a donc :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{GM}{r^2}) + 0 + 0 = 0$$

On a donc bien :  $\text{div}(\mathbf{g}) = 0 \Leftrightarrow \text{div}(\text{grad}(V)) = 0 \Leftrightarrow \text{Laplacien}(V) = 0$

**Le potentiel de gravité est donc un champ scalaire à Laplacien nul.  
On pourra donc l'exprimer sur la base des harmoniques sphériques !!!**

13

## Développement en harmoniques sphériques

Le potentiel de gravité terrestre observé peut donc s'écrire sur la base des harmoniques sphériques :

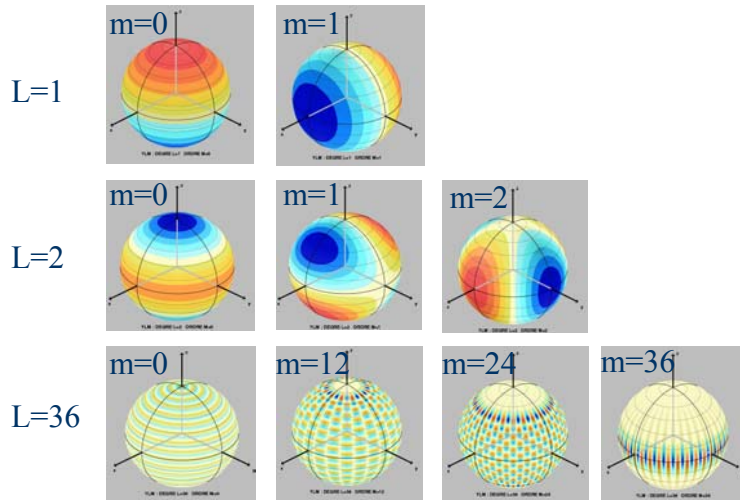
$$Y_l^m(r, \theta, \varphi) = (a_l^m r^l + b_l^m r^{-(l+1)}) P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi}$$

à l'évidence, le potentiel ne peut pas devenir infini quand  $r$  devient très grand (et que l'on s'éloigne de la source). Le seul polynôme en  $r$  qui ait un sens physique est donc celui qui décroît avec  $r$ , c'est à dire le polynôme en  $1/r^{(l+1)}$ . Le potentiel s'écrit donc :

$$\begin{aligned} V(r, \theta, \varphi) &= \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l V_{l,m} \cdot Y_l^m(r, \theta, \varphi) \\ &= \sum_{l=0}^{+\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{l+1} \sum_{m=-l}^l V'_{l,m} \cdot Y_l^m(\theta, \varphi) \\ &= \frac{GM}{r} \left[ 1 + \sum_{l=1}^{+\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^l \sum_{m=-l}^l V''_{l,m} \cdot Y_l^m(\theta, \varphi) \right] \end{aligned}$$

14

## Exemples de fonctions Harmoniques Sphériques



15

M2 STEP - Module "Outils et méthodes de la géodesie spatiale" - C. Vigny

$$V(r, \theta, \varphi) = \frac{GM}{r} \left[ 1 + \sum_{l=1}^{+\infty} \left( \frac{R}{r} \right)^l \sum_{m=-l}^l V_{l,m} Y_l^m(\theta, \varphi) \right]$$

### Calcul direct des premiers termes $Y(0,0)$ , $Y(1,0)$ , $Y(1,1)$

- Au premier ordre ( $l=0$ ), on retrouve bien le potentiel sphérique  $V = GM/r$ . Les termes suivants représentent donc des *perturbations* par rapport à ce potentiel simple qui serait celui d'une planète à symétrie sphérique.
- Le choix comme référentiel de description d'un repère dont l'origine est le centre de masse de la planète, permet d'annuler les termes de degré  $l=1$ , qui correspondent à un décalage du centre du potentiel (centre de masse) suivant chacun des trois axes.
- La dépendance radiale du potentiel de gravité est donnée par le terme en  $(R/r)^{l+1}$  qui indique que plus on s'éloigne de la source du champ, plus les ondulations à courtes longueur d'onde sont lissées. On retrouve donc un potentiel sphérique si on s'éloigne suffisamment de la planète ( $r \gg R$ ).

16

M2 STEP - Module "Outils et méthodes de la géodesie spatiale" - C. Vigny

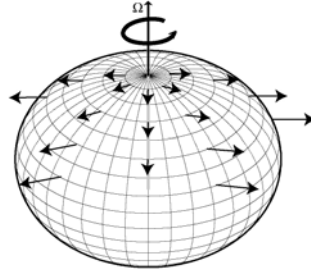


## Calcul direct du terme $Y(2,0)$ : le Potentiel hydrostatique

Newton et Huygens introduisent les notions de gravités et d'accélération centrifuge :

$$g = GM/R^2 \text{ and } F = R\Omega^2$$

=> une sphère molle en rotation doit s'aplatir aux pôles



la force centrifuge due à la rotation  $\Omega$ , vaut sur l'équateur :  $F_c = R\omega^2$

la force de gravité vaut :  $F_g = GM/R^2$

Le rapport des deux forces vaut donc :  $\alpha = F_c/F_g = R^3\omega^2/GM$

L'aplatissement théorique, c'est à dire la différence des rayons équatorial et polaire rapportée au rayon moyen, est de l'ordre de  $\alpha$ .

pour la Terre on trouve  $\alpha \approx 1/290$ , qui correspond à un aplatissement  $\sim 20$  km.

17

## La controverse sur la forme de la Terre

Newton, Huygens et Maupertuis avaient raison.  
Picard avait tort.

Les mesures de la longueur d'un arc méridien de  $1^\circ$  :

- Maupertuis et Clairaut en **Laponie** (publiées en 1737)  
**57438 toises à  $66^\circ N$**
- Bouguer et La Condamine et Jussieu en **Equateur**  
(publiées en 1744 par Bouguer) **56753 toises à  $0^\circ$**
- (1 toise = 1,949 m)
- => aplatissement 1/179 !!! (en fait 1/298)
- => **Attention aux incertitudes**

18

## Evaluation des incertitudes

Dans le cas des observations d'Erathostène, il y a 3 sources d'erreur identifiées :

- La distance comptée en pas provoque une erreur d'environ 5m sur 100m. C'est-à-dire plus ou moins 250 stades sur les 5000 annoncés. Ce qui donne une erreur de **plus ou moins 2000 km** sur la circonférence de la terre
- L'ombre d'un bâton de 2m de haut sera de l'ordre de 25cm à Alexandrie au solstice d'été. Une erreur de mesure de 1mm sur la longueur de l'ombre (ou de la hauteur du bâton) donne une erreur de 2 minutes d'arc, soit **300 km** sur la circonférence de la Terre.
- Le fait que les deux villes ne sont pas sur le même méridien exactement introduit une erreur. Un décalage de  $1^\circ$  par rapport au méridien entraîne une erreur de 14km sur la distance méridienne entre Syène et Alexandrie, soit **700 km** sur la circonférence de la Terre.

Au total, Erathostène aurait pu dire :

La circonférence de la Terre est de 40 000 km à +/- 3000 km près.

Pas si mal !!!

19

M2 STEP - Module "Outils et méthodes de la géodesie spatiale" - C. Vigny

Passer vite

## Développement Ylm du Potentiel hydrostatique

Il est facile de réaliser que l'hypothèse d'un aplatissement aux pôles conduit à proposer pour la Terre un potentiel de forme simple et symétrique:

En effet, la symétrie des forces agissantes (symétrie cylindrique) implique que la variation du potentiel ne peut être que :

- latitudinale (seule la latitude joue)  $\Rightarrow m = 0$
- symétrique par rapport à l'équateur  $\Rightarrow l$  pair

On obtient donc un potentiel dit « hydrostatique » :

$$V_H(r, \theta, \varphi) = \frac{GM}{r} \left[ 1 + \sum_{l, \text{pair}}^{+\infty} \left( \frac{R}{r} \right)^l V_{l,0} \cdot Y_l^0(\theta, \varphi) \right]$$

20

M2 STEP - Module "Outils et méthodes de la géodesie spatiale" - C. Vigny

$$V(r, \theta, \phi) = \sum \kappa_{l,m} \cdot f(r) \cdot P_{l,m}(\cos \theta) \cdot e^{im\phi}$$

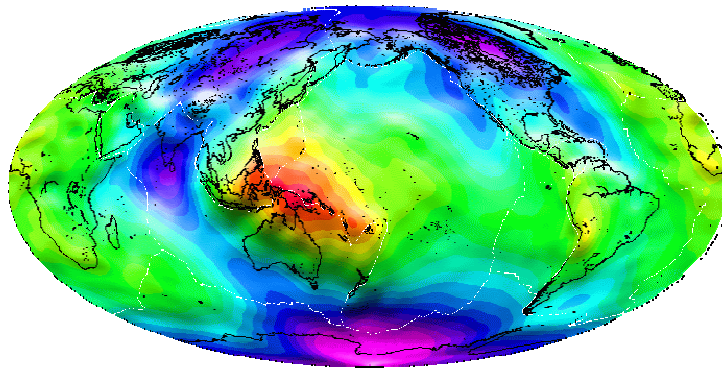
## Potentiel du champ de gravité -> Géoïde

- Si la Terre était une sphère homogène en rotation, alors sa forme serait celle d'un ellipsoïde, et de même celle du **potentiel de gravité**.
- Les termes de degrés plus grands que 2 sont des **perturbations** qui s'ajoutent à cet ellipsoïde.
- Le potentiel généré par une sphère en rotation (qui devient un ellipsoïde) est appelé **potentiel hydrostatique**. (*Cela parce que si une planète était entièrement liquide, alors la surface de cette planète suivrait exactement cet ellipsoïde.*)
- De fait, la **surface des océans** (liquide) suit exactement le potentiel de gravité. Plus exactement une surface sur laquelle la gravité est constante : une **équipotentielle de gravité**. On nomme cette surface le **Géoïde**.
- Le Géoïde hydrostatique est la surface que les océans suivraient si la Terre n'était qu'une sphère **homogène** en rotation.
- Le **Géoïde non-hydrostatique** est ce qu'il reste une fois que cet effet est pris en compte. (*il serait nul si la Terre était une simple sphère homogène en rotation*).

21

© 2012, Université de Toulouse, UTM, "Outils et méthodes de la géodésie spatiale" - C. Vigny

## Géoïde : Géoïde Non-hydrostatique, modèle GEM-T1



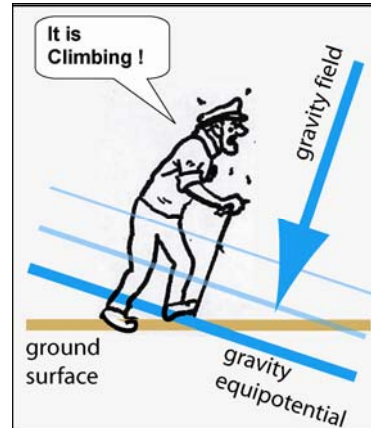
Les creux sont en bleu, les bosses en rouge. Le Géoïde ondule de +/- ~100 m. Sa forme est celle d'une balle de Tennis.

22

M2 STEP - Module "Outils et méthodes de la géodésie spatiale" - C. Vigny

## Géoïde : Définition de l'altitude

L'altitude (la hauteur) **n'est pas** un concept purement géométrique (i.e. la distance d'un point à un autre). Elle est définie **par rapport au potentiel de gravité (donc au Géoïde)**

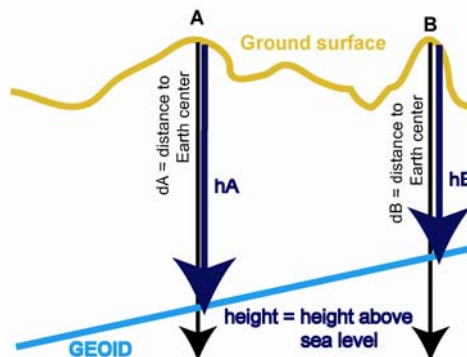


23

M2 STEP - Module "Outils et méthodes de la géodésie spatiale" - C. Vigny

## Geoid : Definition of altitude

Altitude (height) **is not** a purely geometrical concept (i.e. distance from one point to the other) it is **defined with respect to the gravity potential**.



2 points **A** and **B** at ground level

One might think their altitude is  $d_A$  and  $d_B$

**But it is not !!!!**

The altitude is the distance to the **geoid** (i.e. the **sea level**) :  **$h_A$  and  $h_B$**

If the Geoid is not flat (i.e. at the same distance from the center of the Earth at A and B), **then the altitude changes**

24

M2 STEP - Module "Outils et méthodes de la géodésie spatiale" - C. Vigny

$$G(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l \kappa_{l,m} \cdot P_{l,m}(\cos \theta) \cdot e^{im\phi}$$

## Geoid : Spectral contains

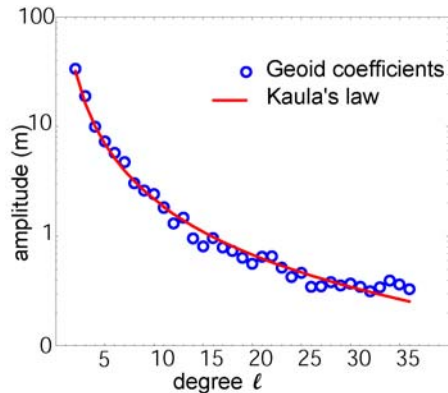
Spectrum of a field = amplitude of coefficients at a given degree  $l$  of the spherical harmonic decomposition

$$S_l = \sqrt{\sum_{m=-l}^l (\kappa_{l,m})^2}$$

The spectrum of the Geoid obeys a power law :

$$S_l \sim 1/l^2$$

It is called **Kaula's law**



25

$$V(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{+\infty} (R/r)^l \sum_{m=-l}^l \kappa_{l,m} \cdot P_{l,m}(\cos \theta) \cdot e^{im\phi}$$

## Altitude dependent spectral contains :

The potential  $V$  at altitude  $r-R$  is attenuated by a coefficient :

$$(R/r)^l$$

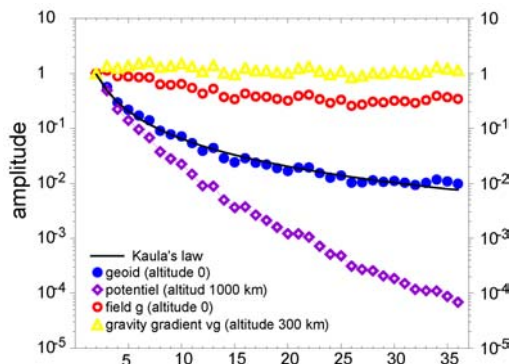
The gravity field  $g$  is the derivative of the gravity potential :

$$g = \partial V / \partial r$$

$$\Rightarrow g_l \sim V_l \times l$$

The gradient of the gravity field  $\nabla g$  is the 2<sup>nd</sup> derivative of the gravity potential :

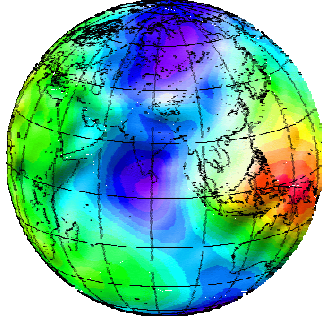
$$\Rightarrow \nabla g_l \sim V_l \times l^2$$



26

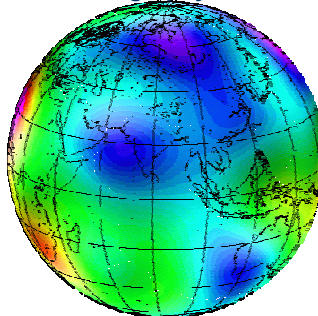
## Origin of the Geoid : density anomalies

Geoid over India



Blue=low gravity  
Red = high gravity

Seismic tomography in the mantle



Blue="cold"="more dense"  
Red = "hot" = "less dense"

It is very clear that long wavelength Geoid lows are associated to cold and dense material in the mantle ????????

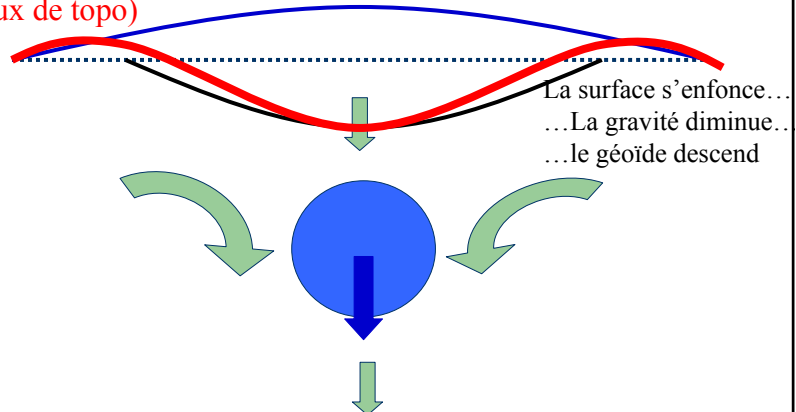
27

M2 STEP - Module "Outils et méthodes de la géodésie spatiale" - C. Vigny

## Explication : Géoïde généré par une masse

Géoïde total (masse +  
creux de topo)

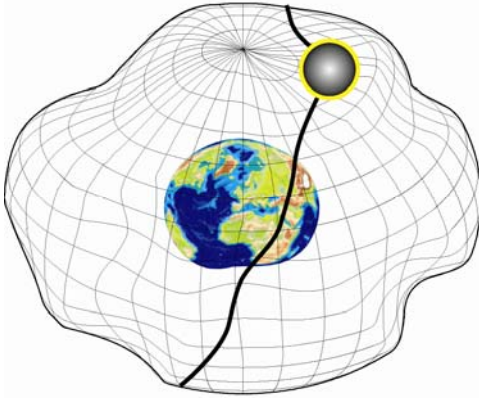
Géoïde du à la masse



28

M2 STEP - Module "Outils et méthodes de la géodésie spatiale" - C. Vigny

## Measurement of the Geoid : spatial geodesy



A satellite orbiting around the Earth will be sensitive to gravity: Its motion is such that the rotation force exactly equilibrates the gravity forces.

If the gravity is stronger (i.e. the gravity potential higher), then the satellite will have to orbit a little bit farther away from the earth (to increase the rotation force, and remain in equilibrium)

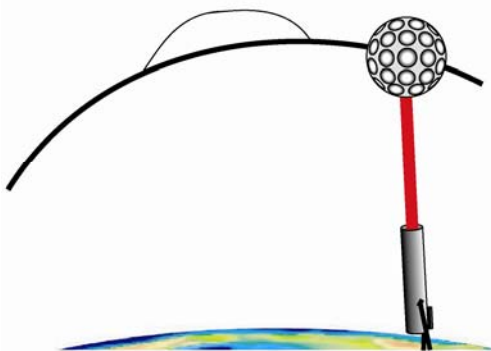
**Conclusion : an orbiting satellite will follow exactly the Gravity potential !**

29

measuring the satellite orbit will give us the gravity potential (i.e. the Geoid)

M2 STEP - Module "Outils et méthodes de la géodesie spatiale" - C. Vigny

## SLR : Satellite Laser Ranging



A High power laser fires on the satellite

The impulse comes back, so the travel time is measured.

Given the speed of light (**C**), one can compute the distance from laser station to satellite :

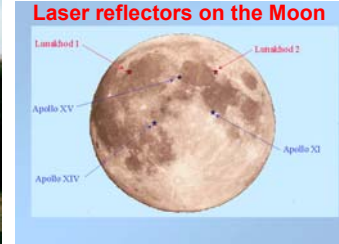
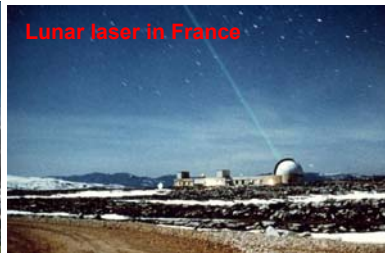
$$L = \Delta t \times C$$

Measuring distances along the orbit give the shape of this orbit, I.E., the shape of the gravity potential

30

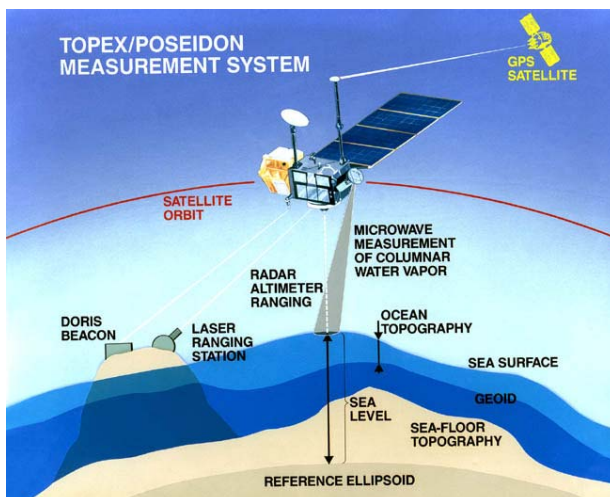
M2 STEP - Module "Outils et méthodes de la géodesie spatiale" - C. Vigny

# SLR : Satellite Laser Ranging



31

# Satellite altimetry : principle



A satellite radar measures the distance between the satellite and the surface of the sea

In average (not considering waves, tides and oceanic currents) **the sea surface is the Geoid**

$ds$  = distance satellite to center of Earth

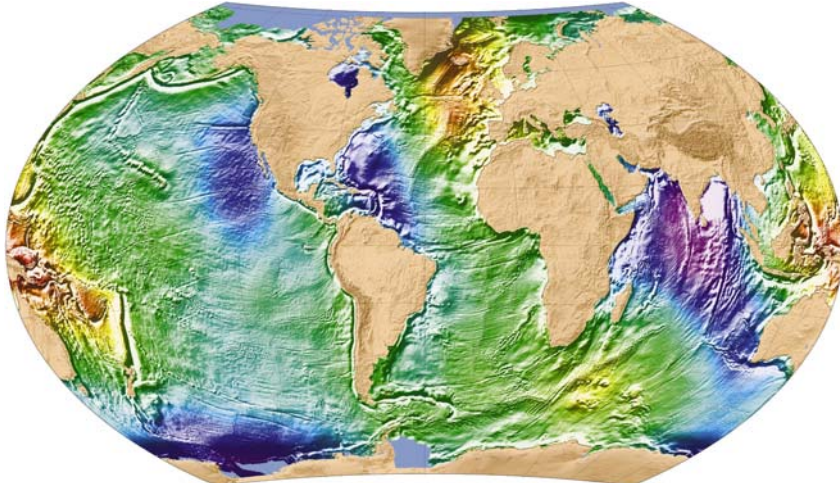
$h$  = distance satellite to sea surface (measured)

**Geoid =  $ds-h$**

32



## Satellite altimetry

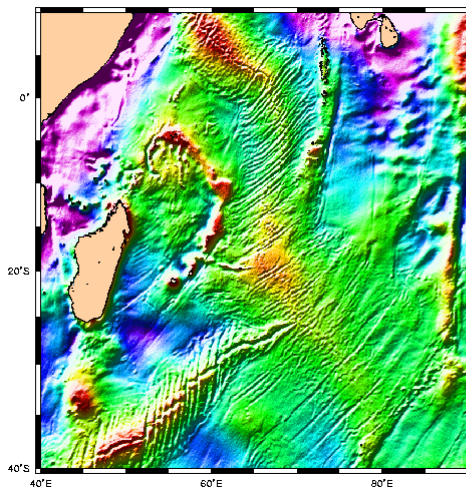


33

The result is a high resolution map of the Geoid on 70% of the earth surface

M2 STEP - Module "Outils et méthodes de la géodesie spatiale" - C. Vigny

## Satellite altimetry



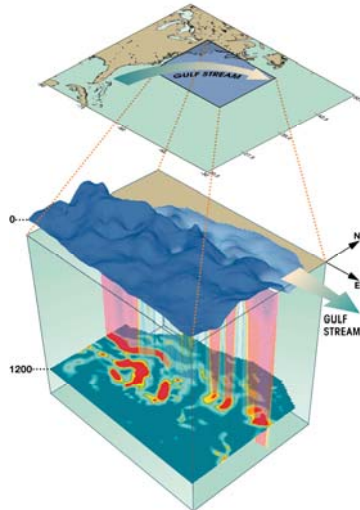
34

A zoom of the oceanic Geoid shows that we see in detail **short wavelength gravity anomalies**

These come from density anomalies at the surface of the sea bottom. They are **ridges, sea mounts, transform faults, etc...**

M2 STEP - Module "Outils et méthodes de la géodesie spatiale" - C. Vigny

## Satellite altimetry



An anomaly of the sea surface can also be related to **water anomaly**

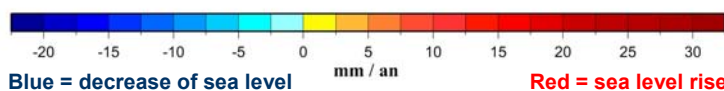
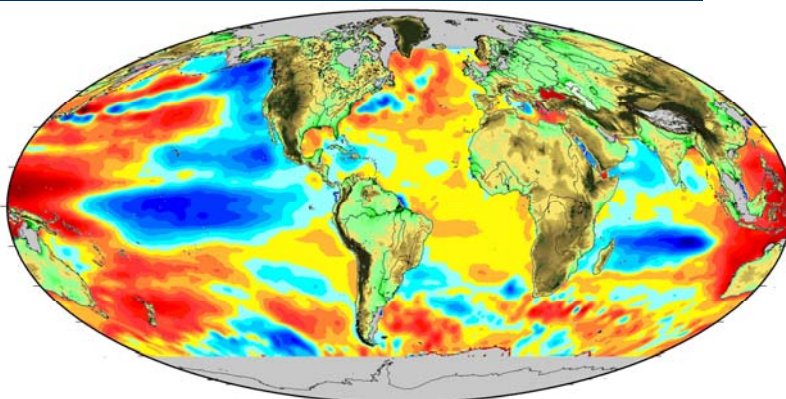
The precision of current altimeter allow to map swells of no more than **10 cm**.

Doing this, we can trace oceanic currents like the **Gulf Stream**

35

M2 STEP - Module "Outils et méthodes de la géodesie spatiale" - C. Vigny

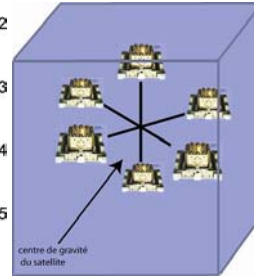
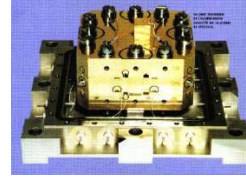
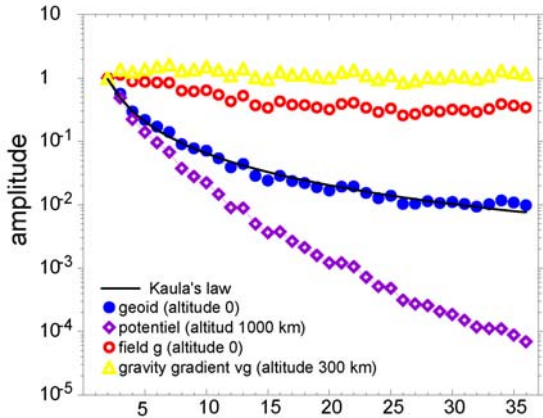
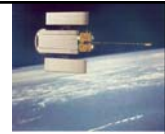
## Satellite altimetry: Sea level variation



36

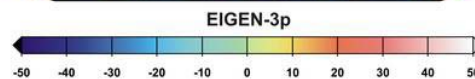
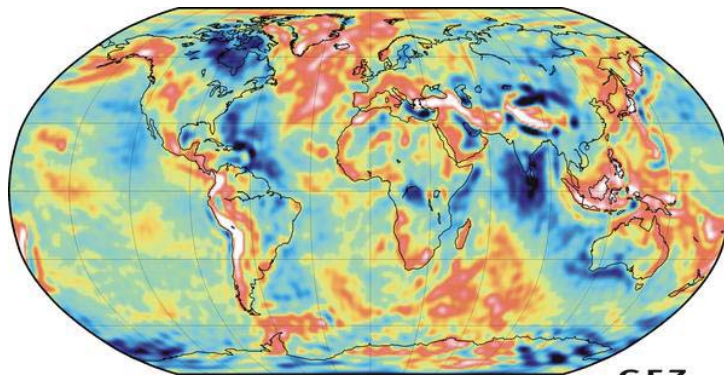
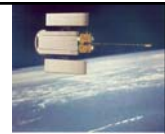
M2 STEP - Module "Outils et méthodes de la géodesie spatiale" - C. Vigny

# Satellite gradiometry



37

# Satellite gradiometry



GFZ  
POTSDAM

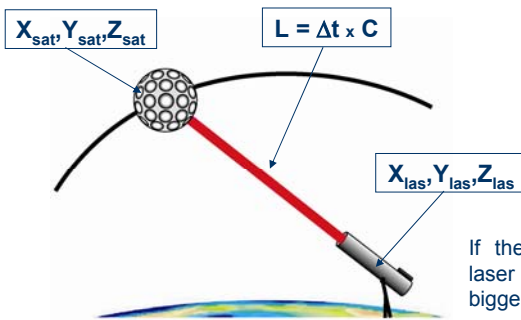
38

# Earth surface deformation



## Satellite Laser Ranging

High energy laser firing at satellites enable to determine the position of the satellite and then the Geoid, assuming the station position is know. On reverse, assuming one knows the satellite position (i.e. the earth gravity field), then by measuring the satellite-station distance one can determine the station position. The time is measured with a precision of about **0.1ns to 0.3 ns** ( $3 \cdot 10^{-10}$  sec), which give a precision of about **3 to 10 cm** on the measured length, hence on the station position.



$$X_{las} = X_{sat} - L_x$$

$$Y_{las} = Y_{sat} - L_y$$

$$Z_{las} = Z_{sat} - L_z$$

$$\text{pos}_{las} = \text{pos}_{sat}(t_i) - L(t_i)$$

With :  $t_i$  = time of  $i^{\text{th}}$  measurement along the orbit

If the earth surface deforms, then the laser station moves. If this motion is bigger than a few cm, then the measurement detects it !

39

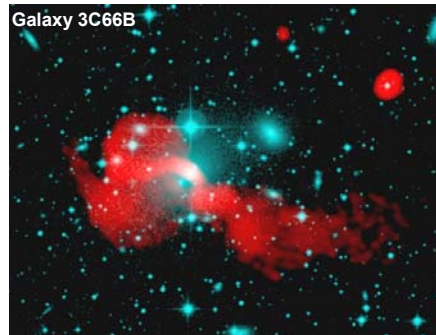
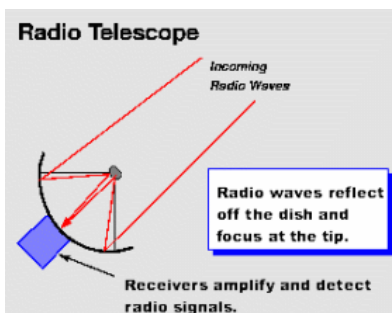
M2 STEP - Module "Outils et méthodes de la géodesie spatiale" - C. Vigny

# Earth surface deformation



## Radio Telescope principle

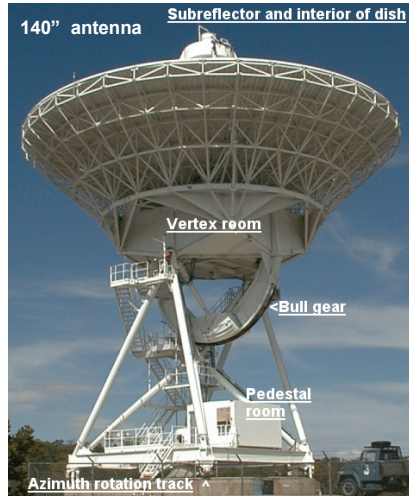
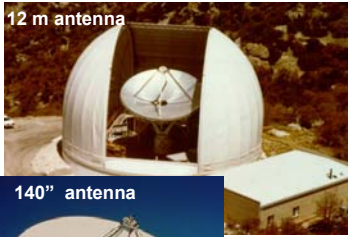
Radio telescopes are used to study naturally occurring radio emission from stars, galaxies, quasars, and other astronomical objects between wavelengths of about 10 meters (30 megahertz [MHz]) and 1 millimeter (300 gigahertz [GHz]). At wavelengths longer than about 20 centimeters (1.5 GHz), irregularities in the ionosphere distort the incoming signals. Below wavelengths of a few centimeters, absorption in the atmosphere becomes increasingly critical. the effective angular resolution and image quality is **limited only by the size of the instrument**.



40

M2 STEP - Module "Outils et méthodes de la géodesie spatiale" - C. Vigny

## Bigger antennas



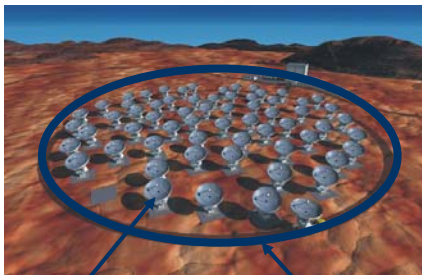
41

M2 STEP - Module "Outils et méthodes de la géodesie spatiale" - C. Vigny

## Very Large Base Interferometry (VLBI)



It is extremely difficult to built antennas bigger than 20-30 meters diameter...  
**But**, one **single large** mirror (or antenna) can be replace by **many small** mirrors (or antenna). The size of the image will be equivalent. Thus, an array of small antennas make a **virtual** big antenna of equivalent size the size of the array.



Single small antenna

virtual antenna

42

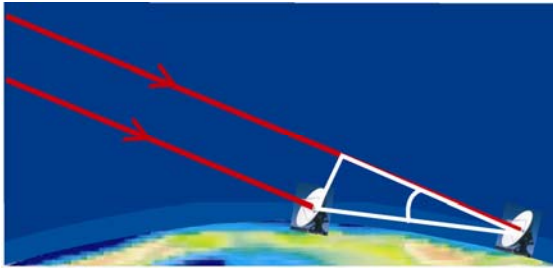
M2 STEP - Module "Outils et méthodes de la géodesie spatiale" - C. Vigny

## Very Large Base Interferometry (VLBI)



One can reconstruct a precise image of the observed object, knowing precisely the distances between the individual antennas. If these distances are not well known, then the image is fuzzy.

Again, reversing the problem, focusing a known image allow to determine the distances between stations.



The radio wavelength arrives at first antenna at time  $t$ , and at the second antenna at time  $t + \Delta t$ .

The additional distance is :  $\Delta t \cdot c$

Which we can easily convert into distance between stations (knowing the angle=difference in latitude)

The obtained precision is around **1 millimeter** !

43

M2 STEP - Module "Outils et méthodes de la géodesie spatiale" - C. Vigny

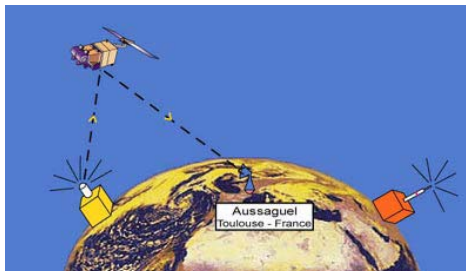
## DORIS (Doppler system)



A wavelength is broadcasted by a ground station with a given frequency. A satellite is receiving this signal. Because the satellite is moving, the frequency it receives is shifted. This is the Doppler effect.

For a velocity  $\mathbf{v}$ , the frequency  $\nu$  will be shifted by a quantity equal to  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}/c$

The complete formula for  $\mathbf{V}$  not // to line of view is :  $\nu' = \nu \frac{1 - \cos \phi \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$



For a satellite velocity and position are linked by the Keplerian equation of its orbit.

Thus, measuring the Doppler shift allows to determine the Station to Satellite distance

44

M2 STEP - Module "Outils et méthodes de la géodesie spatiale" - C. Vigny

## DORIS (Doppler system)

The obtained precision on station position is around 1-3 cm



DORIS beacons



DORIS GLOBAL network  
~60 stations covering the whole Globe

45

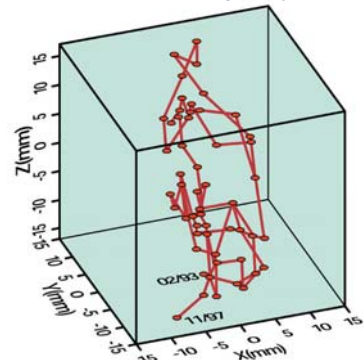
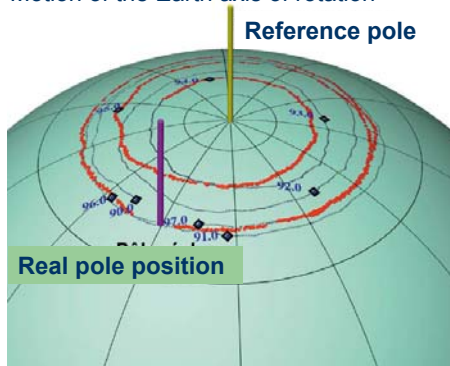
M2 STEP - Module "Outils et méthodes de la géodésie spatiale" - C. Vigny

## DORIS (Doppler system)

DORIS allow to detect motion of stations but also the motion of the whole network (as a polyhedron) in space. Thus we can determine the **oscillations of planet Earth**. These oscillations have a complex frequency contains from Milankovitch period (26 000 years) to Chandler Wobble (400 days) and daily adjustments due to atmospheric loads

Motion of the Earth axis of rotation

Motion of the Earth gravity center



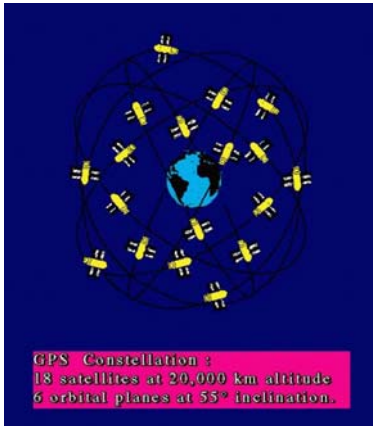
46

M2 STEP - Module "Outils et méthodes de la géodésie spatiale" - C. Vigny

# GPS (Global Positioning System)



GPS was created in the 80s' by the US Department of Defense for military purposes. The objective was to be able to get a precise position anywhere, anytime on Earth.



The satellites send a signal, received by a GPS antenna. Again, this allow to measure the distance satellite to antenna

With at least 3 satellites visible at the same time, we can compute instantaneously the station position. The precision can be as good as 1 millimeter