

Chapitre 4

Elasticité et flexure

Table des matières

4	Elasticité et flexure	1
4.1	Elasticité	3
4.2	Flexure	3
4.2.1	Un peu d'histoire	3
4.2.2	Exemples	6
4.3	L'équation de la flexure	8
4.3.1	Bilan des forces et des moments	8
4.3.2	Les contraintes flexurales	10
4.3.3	La déformation horizontale	11
4.3.4	Courbure de la plaque	12
4.3.5	Et finalement...	13
4.4	Applications	14
4.4.1	Application générique à une charge ponctuelle	14
4.4.2	Application au cas d'Hawaii	17
4.4.3	Flexure d'une plaque en subduction	20
4.4.4	Flexure dans un cas limite	23

4.1 Elasticité

4.2 Flexure

4.2.1 Un peu d'histoire

Nous avons jusqu'ici considéré que les reliefs étaient maintenus par "isostasie hydrostatique" (figure 4.1, gauche). Nous avons raisonné sur des colonnes de croûte ou lithosphère indépendantes au sein desquelles la distribution verticale des masses induit une pression lithostatique (verticale vers le bas) équilibrée par

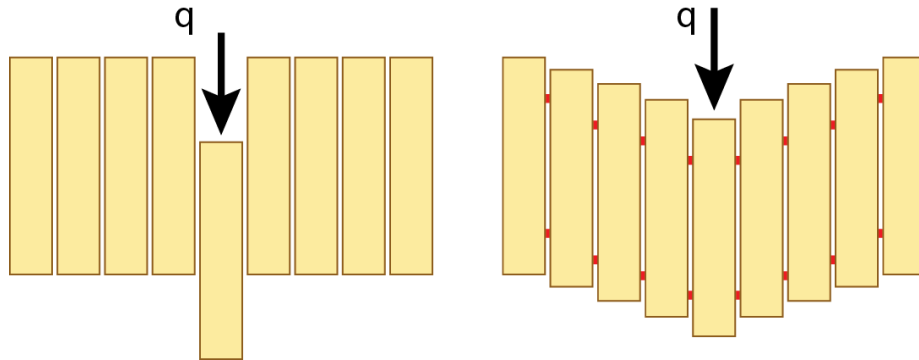


FIGURE 4.1 – Ajustement d’une croûte localement soumise à une charge vertical q dans le cas de l’isostasie hydrostatique (gauche) et de la flexure (droite). Figure tirée de Stüwe.

une pression exercée par le manteau ou l’asthénosphère sous-jacente (verticale vers le haut). L’isostasie hydrostatique est un équilibre des forces dans la direction verticale seulement qui fait l’hypothèse que les contraintes de cisaillement sur des plans verticaux sont nulles. L’isostasie hydrostatique implique donc que les reliefs sont compensés localement, c’est-à-dire exactement à leur aplomb, par une croûte épaissie dans le modèle d’Airy ou/et par des variations latérales de densité dans la croûte dans le modèle de Pratt. Le modèle physique simple de l’isostasie hydrostatique permet d’expliquer relativement bien les reliefs de dimension latérale importante par rapport à l’épaisseur de la lithosphère, soit plusieurs centaines de kilomètres.

L’isostasie hydrostatique fait donc l’impasse sur la résistance mécanique latérale de la lithosphère. Une première observation vient mettre à mal ce modèle quand le géologue américain H.K. Gilbert (1843-1919) étudie les paléo-lignes de rivage du lac Bonneville qui occupait le territoire de l’actuel Grand Lac Salé en Utah au Pléistocène. Il montre que le lac avait atteint une profondeur de 300 m. Le modèle d’isostasie d’Airy implique que cet assèchement donne lieu à un soulèvement s donné par :

$$s = h \frac{\rho_w}{\rho_m} \quad (4.1)$$

soit $s = 90$ m. Gilbert montre aussi que les lignes de rivages de même âge, horizontales lors de leur formation, sont défléchies vers le haut au centre du lac (cône volcanique de Pahavant Butte) d’une valeur de 39 m, soit plus de deux fois moins que prévue par la théorie d’Airy. Il propose, pour expliquer ce désaccord, que la croûte résiste au soulèvement du fait de sa résistance mécanique latérale. Il modélise la surrection observée par le bombement d’une plaque élastique rigide et pose le problème, en ses propres termes de “*isostasy versus rigidity*”.

Hayford (1868-1925) réalise des mesures gravimétriques en Amérique du Nord et cherche à vérifier l’isostasie. Pour cela il applique aux mesures brutes :

- Une correction à l’air libre pour tenir compte de la hauteur du point de mesure dans le champ de pesanteur ;
- Une correction de topographie pour tenir compte de l’attraction gravitationnelle du relief ;

- Une correction de Bouguer pour tenir compte d'une croûte d'épaisseur moyenne constante ;
- Une correction isostatique pour tenir compte de la racine crustale théorique dans l'hypothèse d'une compensation locale du relief.

Hayford trouve que les mesures brutes corrigées de ces trois effets, c'est-à-dire le résidu ou l'anomalie gravimétrique, sont de l'ordre de quelques dizaines de mGal, donc très faibles – mais non nulles. Barrell (1869-1919) reprend ces mesures et montre que les anomalies non nulles sont distribuées géographiquement en ceintures positives et négatives. Il montre aussi que :

- Pour 18 stations gravimétriques dans les montagnes de l'ouest américain où l'anomalie résiduelle moyenne est de 18 mGal, une compensation locale ne permet pas de diminuer significativement ce résultat même si l'on considère un modèle de compensation de Pratt s'étendant à une distance de 18.8 km, 58.8 km ou 167.7 km du point de mesure.
- A la station gravimétrique de Pikes Peak (4293 m) dans le Colorado mesurée par Hayford et Bowie en 1912, un modèle de compensation locale laisse une anomalie résiduelle de +19 mGal, alors qu'un modèle de compensation régionale réduit ce résidu à +11 mGal, +6 mGal et +2 mGal pour des distances de 18.8 km, 58.8 km et 166.7 km respectivement.

Barrell conclut en 1914 *“although the relations of continents and ocean basins show with respect to each other a high degree of isostasy, there is little but such adjustment within areas 200 to 300 km in diameter [...] Individual mountains and mountain ranges may stand by virtue of the rigidity of the crust”*. Il intuït donc qu'une couche suffisamment rigide qu'il appelle “lithosphère” est suffisamment rigide pour soutenir des charges, tandis qu'au-dessous “l'asthénosphère” est un milieu à faible résistance mécanique.

Le débat sur la question de savoir si l'isostasie locale, qu'elle soit de type Airy ou Pratt, est le seul mécanisme de support des reliefs culmine en 1922, où la société géologique américaine organise un débat sur ce thème. Le géologue G.R. Putnam y présente ses résultats. Il a l'idée de comparer les anomalies gravimétriques en des paires de points proches mais situés à des élévations très différentes. Il calcule une compensation en moyennant la topographie sur un rayon donné autour des points de mesure. Il montre que la différence d'anomalie gravimétrique entre points proches se rapproche d'un modèle isostatique local au sens de Pratt si – paradoxalement – on augmente le rayon de la région considérée. Il conclut que la compensation du relief n'est pas local mais régionale et introduit le concept d'isostasie régionale.

L'idée est reprise par F.A. Veining Meinesz, géophysicien hollandais, qui incorpore aussi les idées de Gilbert et de Barrell. Il propose que la lithosphère est une couche rigide élastique qui se déforme par déflexion sous l'effet d'une charge topographique en surface. Il propose les premiers calculs de l'effet d'une charge topographique sur la déflexion d'une plaque élastique mince au-dessus d'un milieu de faible résistance mécanique. Dans son modèle, la charge topographique est soutenue par une flexure de longueur d'onde supérieure à la dimension latérale de la charge – la compensation du relief est régionale (cf. Putnam) et la charge est résistée par la rigidité de la “plaque lithosphérique” (Gilbert), bien que la tectonique des plaques soit encore hors-sujet.

C'est ensuite R. Gunn qui, entre 1937 et 1947, formalise le calcul de la déflexion d'une plaque élastique et commence à l'appliquer aux marges continentales actives et passives et aux chaînes de montagnes. Il écrit alors :

$$D \frac{d^4 y}{dx^4} + (\rho_{\text{fluid}} - \rho_{\text{infill}}) y g = 0 \quad (4.2)$$

ou x est la distance perpendiculaire à la charge et y la déflexion causée. Nous verrons ci-dessous comment arriver à cette conclusion.

4.2.2 Exemples

Si l'isostasie hydrostatique permet d'expliquer les reliefs de dimension latérale importante par rapport à l'épaisseur de la lithosphère – par exemple le contraste océans–continents, l'explication de reliefs de petite dimension latérale comme une chaîne volcanique ou une fosse de subduction dépend aussi de l'élasticité de la lithosphère. En d'autres termes, on ne peut pas ignorer les contraintes de cisaillement sur des plans verticaux : les “colonnes” de lithosphère de l'isostasie hydrostatique ne sont plus mécaniquement indépendantes les unes des autres.

De fait, l'application d'une charge – volcan, sédiments, etc – induit une flexure de la lithosphère dont l'amplitude et la forme dépend de la magnitude et distribution latérale de la charge ainsi que de réponse élastique de la lithosphère. On peut intuitivement dès maintenant que cette dernière dépend elle-même de l'épaisseur de la lithosphère (plus la lithosphère est épaisse, plus il est difficile d'y induire une flexure) et de son élasticité (plus la raideur de la lithosphère est grande, plus plus il est difficile d'y induire une flexure). La force verticale vers le bas imposée par une charge topographique est résistée aussi par la force hydrostatique verticale générée en réaction par l'approfondissement du Moho, décrite par la théorie de l'isostasie hydrostatique.

On observe par exemple sur la figure 4.2 la flexure de la lithosphère océanique de l'Atlantique centrale sous l'effet du poids de la construction volcanique des Îles Canaries. La croûte océanique, de 7 km d'épaisseur environ, ainsi que sa couverture sédimentaire jurassique et crétacé sont défléchies vers le bas de près de 2 km à l'aplomb du volcan. La dépression ainsi créée est comblée par des sédiments, notamment les sédiments volcanoclastiques provenant des flancs du volcan.

La figure 4.3 montre un profil perpendiculaire à la marge continentale américaine au large d'Atlantic City. On reconnaît le profil bathymétrique classique d'une marge continentale passive, avec plateau, pente, glacis et plaine abyssale. En profondeur, on observe que la croûte (continentale à l'ouest et océanique à l'est) est défléchie par le poids des sédiments post-rift qui se déposent du Jurassique inférieur à l'actuel. On a ici en fait deux processus en jeu, d'une part la dénudation de la partie émergée de la marge, d'autre part la charge sédimentaire qui en résulte en mer. La somme de ces deux processus explique

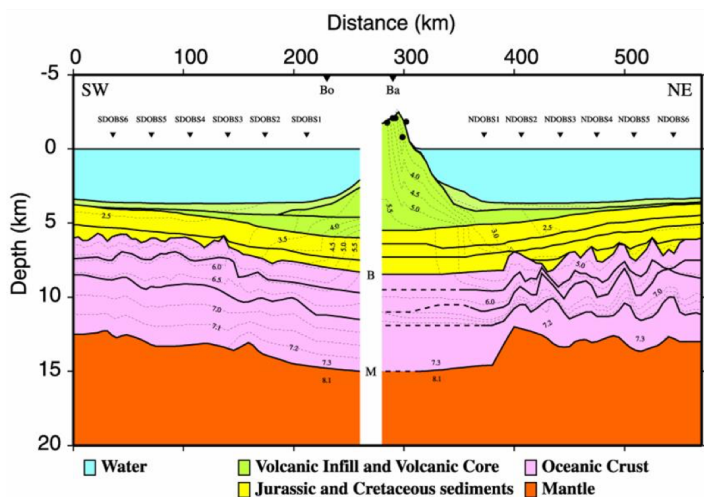


FIGURE 4.2 – Best-fit p-wave velocity model along the Canary Islands transect (centred on the island of Tenerife). Bold solid lines show region of the Moho well constrained by modelled PmP arrivals. Bold dashed lines show interpolated discontinuities which are not constrained by the seismic data. Light dashed lines show velocity contours annotated in km/s. M = Moho. B = oceanic basement (From Watts et al., 1997).

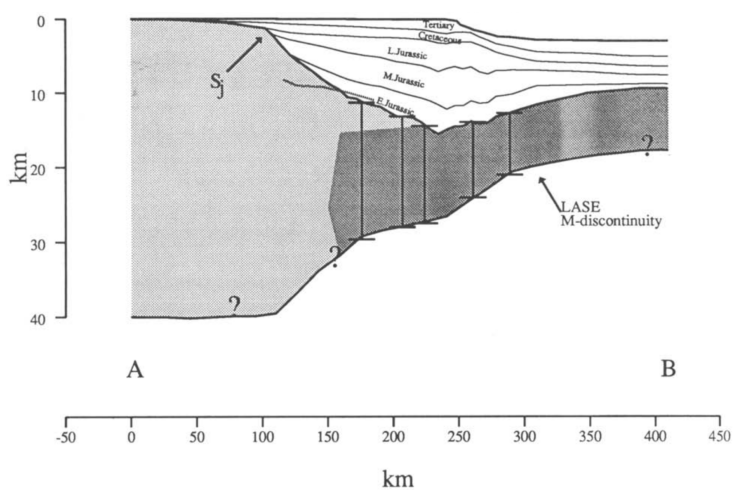


FIGURE 4.3

4.3 L'équation de la flexure

4.3.1 Bilan des forces et des moments

Nous allons reprendre le raisonnement de Veining-Meinesz et de Gunn et dériver l'équation qui décrit la flexure d'une plaque élastique sous l'effet d'une charge simple. Comme illustré sur la figure 4.4, nous nous plaçons dans le cas d'une plaque uniformément et purement élastique d'épaisseur h (dans la direction verticale z), de longueur L (dans la direction horizontale x) avec $h \ll L$ et de dimension infinie dans la direction perpendiculaire y .

La plaque est défléchie d'une quantité w très petite ($w \ll L$) – de manière à pouvoir appliquer l'élasticité linéaire – sous l'effet d'une force linéique V_a appliquée en $x = 0$. On a donc :

$$\forall x \neq 0, V_a = 0 \quad (4.3)$$

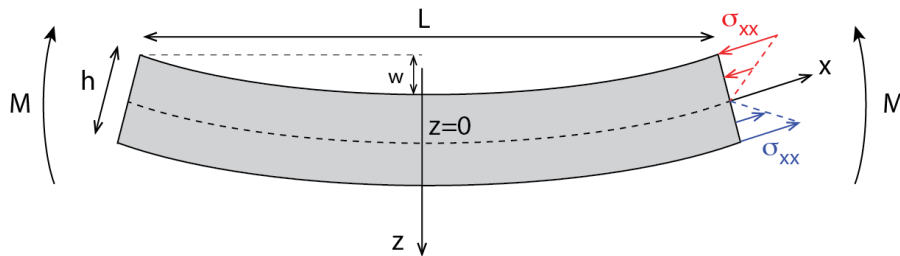


FIGURE 4.4

Isolons un élément de plaque infinitésimal entre x et $x + dx$ et écrivons les forces qui s'y appliquent (figure 4.5) :

- Une force verticale due à la charge, par unité de longueur dans la direction z exercée perpendiculairement à surface de la plaque : $q(x)dx$.
- Une force verticale de cisaillement par unité de longueur dans la direction z exercée sur les bords verticaux de notre élément de volume : V . Cette force résiste à la charge appliquée. Elle résulte des contraintes de cisaillement intégrées le long d'une section verticale de l'élément infinitésimal considéré.
- Une force horizontale par unité de longueur dans la direction z : P . Cette force s'applique perpendiculairement aux bords verticaux de notre élément de volume. On fait l'hypothèse que P ne dépend pas de x .

De ces forces résulte un moment de flexure M , aussi par unité de longueur dans la direction z , qui défléchit la plaque (figure 4.5) :

- En x la force de cisaillement est V , la déflexion est w , le moment de flexure est M .
- En $x + dx$ la force de cisaillement est $V + dV$, la déflexion est $w + dw$, le moment de flexure est $M + dm$.

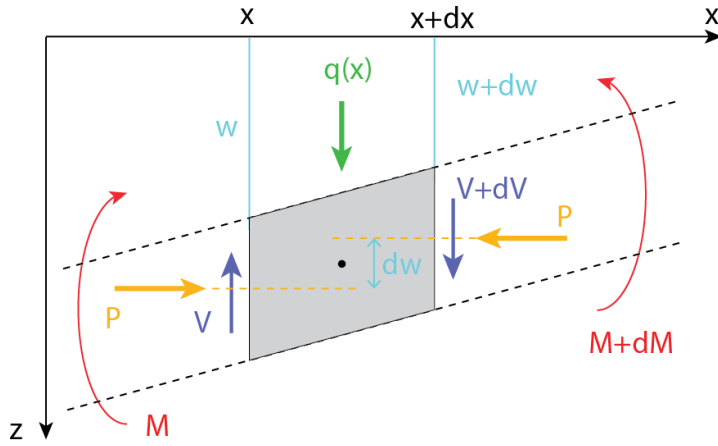


FIGURE 4.5

L'ensemble des forces et le moment de flexure résultant sont exprimés par unité de longueur dans la direction z . L'équilibre des forces dans la direction verticale sur l'élément infinitésimal considéré s'écrit :

$$V - (V + dV) + q(x)dx = 0 \quad (4.4)$$

soit :

$$\frac{dV}{dx} = -q \quad (4.5)$$

Ecrivons les moments des forces en jeu (figure 4.5) :

- Les forces V et $V + dV$ induisent un moment dont le bras de levier est $dx/2$. Il s'écrit :

$$V \frac{dx}{2} + (V + dV) \frac{dx}{2} \simeq V dx \quad (4.6)$$

car sur la distance infinitésimale dx on a $dV dx \sim 0$. Ce moment agit dans le sens horaire.

- La force P induit un moment dont le bras de levier est $dw/2$. Il s'écrit :

$$P \frac{dw}{2} + (P + dP) \frac{dw}{2} \simeq P dw \quad (4.7)$$

car on a supposé que P ne dépendait pas de x . Ce moment agit dans le sens anti-horaire.

- Le moment de la force $q(x)$ est nul car la force correspondante passe par le centre de l'élément.

Le moment résultant dM agissant sur l'élément considéré est donc :

$$dM = V dx + P dw \quad (4.8)$$

dont on déduit :

$$\frac{dM}{dx} = V + P \frac{dw}{dx} \quad (4.9)$$

On élimine V en différentiant par rapport à x et en utilisant l'équation 4.5 :

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -q + P \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (4.10)$$

Pour convertir cette équation en une équation différentielle en w nous allons relier le moment de flexure M à la déflexion w .

4.3.2 Les contraintes flexurales

On commence par constater sur la figure 4.4 que, dans le cas d'une flexure vers le bas, la partie supérieure de la plaque se contracte dans la direction x . Cette déformation est associée à une contrainte longitudinale σ_{xx} positive. A l'inverse, la partie inférieure de la plaque s'étend dans direction x , avec une contrainte correspondante σ_{xx} négative. Le milieu de la plaque, que nous prenons à $y = 0$, ne se déforme pas : c'est la surface neutre de la plaque.

Isolons un élément de surface vertical infinitésimal de longueur dz . La contrainte σ_{xx} qui s'exerce perpendiculairement à cet élément cause un moment par rapport à la surface neutre. Cette dernière se trouve à une distance z (= bras de levier) de l'élément de surface infinitésimal considéré, le moment est donc :

$$M(z) = \sigma_{xx} z dz \quad (4.11)$$

Le moment de flexure total, pour l'ensemble de la plaque, est l'intégrale de $M(z)$ le long de la section verticale de la plaque, soit :

$$M = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} z dz \quad (4.12)$$

L'élasticité linéaire pour un solide isotrope nous donne les relations constitutives suivantes entre contraintes et déformations principales :

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{1}{E} \sigma_1 - \frac{\nu}{E} \sigma_2 - \frac{\nu}{E} \sigma_3 \\ \epsilon_2 &= -\frac{\nu}{E} \sigma_1 - \frac{\nu}{E} \sigma_2 + \frac{1}{E} \sigma_3 \\ \epsilon_3 &= -\frac{\nu}{E} \sigma_1 + \frac{1}{E} \sigma_2 - \frac{\nu}{E} \sigma_3 \end{aligned} \quad (4.13)$$

avec ν = coefficient de Poisson (0.1-0.4) et E = module d'Young (10-100 GPa).

Dans le cas de la flexure d'une plaque mince, on remarque sur la figure 4.4 que les contraintes sont nulles dans la direction z ($\sigma_{zz} = 0$) car aucune force n'est exercée dans cette direction. De fait, la déformation est nulle aussi dans cette direction ($\epsilon_{zz} = 0$) Les contraintes ne sont pas nulles dans la direction x du fait de la flexure ($\sigma_{xx} \neq 0$), ni dans la direction y ($\sigma_{yy} \neq 0$) car des contraintes y agissent pour "empêcher" de la déformation dans cette direction¹. Nous sommes

1. La dimension infinie dans la direction y est équivalente à imposer des déplacements nuls dans la direction y

donc dans un état dit “contraintes planes²”, les contraintes principales σ_1 , σ_2 et σ_3 sont, respectivement σ_{xx} , σ_{yy} et σ_{zz} dans le système de coordonnées que nous avons choisi. Les équations 4.13 s'écrivent donc :

$$\begin{aligned}\epsilon_{xx} &= \frac{1}{E}\sigma_{xx} - \frac{\nu}{E}\sigma_{yy} = \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}) \\ \epsilon_{yy} &= -\frac{\nu}{E}\sigma_{xx} - \frac{\nu}{E}\sigma_{yy} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{yy} + \sigma_{xx}) \\ \epsilon_{zz} &= -\frac{\nu}{E}\sigma_{xx} + \frac{1}{E}\sigma_{yy} = \frac{1}{E}(\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx})\end{aligned}\quad (4.14)$$

Puisque $\epsilon_{zz} = 0$, la troisième égalité donne :

$$\sigma_{yy} = \nu\sigma_{xx} \quad (4.15)$$

quel l'on substitue dans la première égalité pour trouver :

$$\begin{aligned}\epsilon_{xx} &= \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \nu^2\sigma_{xx}) \\ &= \frac{(1 - \nu^2)}{E}\sigma_{xx}\end{aligned}\quad (4.16)$$

On peut donc écrire le moment de flexure total (équation 4.12) en fonction de ϵ_{xx} :

$$M = \frac{E}{(1 - \nu^2)} \int_{-h/2}^{h/2} \epsilon_{xx} z dz \quad (4.17)$$

Mais il nous faut maintenant une expression qui relie ϵ_{xx} à z car, *in fine*, nous aimerions pouvoir utiliser des quantités mesurables dans la nature, comme notamment la déflexion de la plaque selon z , notée w ci-dessus.

4.3.3 La déformation horizontale

On observe sur la figure 4.4 que ϵ_{xx} dépend de la distance z à l'axe neutre (où nous avons posé que $z = 0$). La figure 4.6 en est une version simplifiée où la flexure w , très petite, n'a pas été représentée. On y observe que :

1. Le rayon de courbure de la plaque mince est R ;
2. Le changement de longueur selon la direction x est Δl . De fait, la déformation selon la direction x est $\epsilon_{xx} = \Delta l/l$;
3. L'angle ϕ est très petit, on peut donc écrire :

$$\begin{aligned}\sin \phi &= \frac{l}{R} \simeq \phi \\ \tan \phi &= -\frac{\Delta l}{z} \simeq \phi\end{aligned}\quad (4.18)$$

2. La configuration “contraintes planes” s'applique quand (1) l'une des dimensions du solide est très inférieure aux deux autres, de telle manière qu'il présente naturellement un plan de coupe à deux dimensions, et (2) aucune force externe ne s'exerce perpendiculairement à ce plan de coupe.

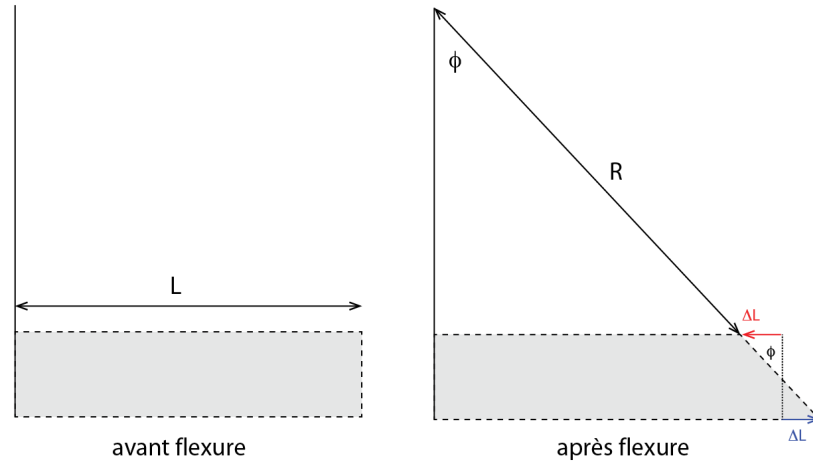


FIGURE 4.6

On a donc :

$$\Delta l = -z \frac{l}{R} \quad (4.19)$$

La déformation selon la direction x devient donc : Par définition, la déformation selon la direction x est :

$$\epsilon_{xx} = \frac{z}{R} \quad (4.20)$$

Nous avons donc obtenu une expression de ϵ_{xx} en fonction de z . Cherchons maintenant à relier le rayon de courbure R à des quantités connues. Par exemple, on peut intuitivement sentir qu'il existe une relation entre R et w en fonction de x : si R est petit, w varie rapidement en fonction de x . On peut même intuitivement sentir que cette relation implique le laplacien de w , qui est une mesure de courbure.

4.3.4 Courbure de la plaque

On voit sur la figure 4.7, où le rayon de courbure est très exagéré (α est en fait très petit), que :

$$\alpha \simeq -\frac{dw}{dx} \quad (4.21)$$

On a aussi, par définition du cercle :

$$d\alpha = \phi \quad (4.22)$$

On écrit donc :

$$\phi = \frac{d\alpha}{dx} dx = \frac{d}{dx} \left(-\frac{dw}{dx} \right) dx \quad (4.23)$$

d'où :

$$\phi = -\frac{d^2w}{dx^2} dx \quad (4.24)$$

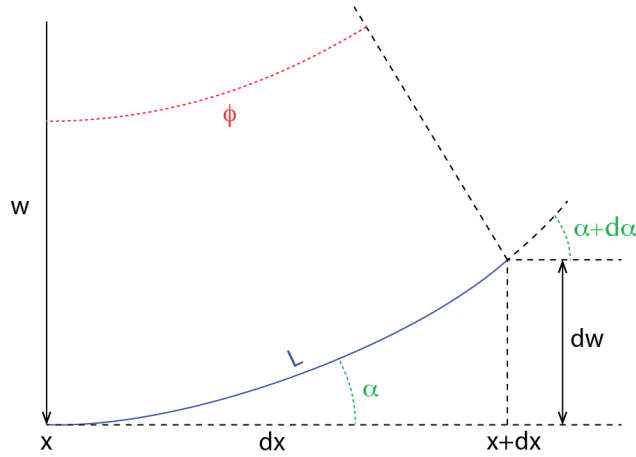


FIGURE 4.7

On avait par ailleurs $\phi = l/R$. Puisque la courbure est en réalité très faible on a aussi $l \sim dx$. Donc :

$$\phi = \frac{dx}{R} \quad (4.25)$$

et :

$$\frac{dx}{R} = -\frac{d^2w}{dx^2} dx \quad (4.26)$$

d'où :

$$\frac{1}{R} = -\frac{d^2w}{dx^2} \quad (4.27)$$

que l'on peut substituer dans l'équation 4.20 pour trouver :

$$\epsilon_{xx} = -z \frac{d^2w}{dx^2} \quad (4.28)$$

4.3.5 Et finalement...

Nous avons établi une relation entre ϵ_{xx} et w , nous pouvons donc re-écrire le moment flexural M (équation 4.17) comme suit :

$$M = -\frac{E}{(1-\nu^2)} \frac{d^2w}{dx^2} \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz \quad (4.29)$$

$$= -\frac{E}{(1-\nu^2)} \frac{d^2w}{dx^2} \frac{z^3}{3} \Big|_{-h/2}^{h/2} \quad (4.30)$$

$$= -\frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \frac{d^2w}{dx^2} \quad (4.31)$$

On écrit généralement :

$$M = -D \frac{d^2w}{dx^2} \quad (4.32)$$

où

$$D = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (4.33)$$

est la rigidité flexurale de la plaque.

On voit que la rigidité flexurale augmente avec la raideur de la plaque E et son épaisseur h . On voit aussi que :

$$M = \frac{D}{R} \quad (4.34)$$

Cette équation nous montre que le rayon de courbure d'une plaque est inversement proportionnel au moment des forces appliquées. On voit aussi, au passage, que D est le moment des forces nécessaire pour flexurer une plaque élastique de courbure unitaire.

On peut finalement utiliser l'équation 4.10 et dériver M deux fois pour trouver :

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} = q(x) - P \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (4.35)$$

C'est l'équation de la flexure pour des plaques élastiques. Elle nous dit que la force verticale totale et la force horizontale sont équilibrées par la résistance flexurale de la plaque (fonction de D). On l'écrit plus généralement :

$$q(x) = D \frac{d^4 w}{dx^4} + P \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (4.36)$$

Dans le cas de la Terre, la force verticale est la somme de la charge appliquée en surface et de la force hydrostatique qui se développe en réponse à l'enfoncement de la croûte/lithosphère dans le manteau/asthénosphère.

4.4 Applications

4.4.1 Application générique à une charge ponctuelle

Prenons le cas simple d'une lithosphère océanique d'épaisseur h , homogène et parfaitement élastique, de densité ρ_m , au-dessus d'un manteau fluide de même densité ρ_m , le tout surmonté d'une couche d'eau d'épaisseur h_w et de densité ρ_w (figure 4.8). Nous supposons une charge linéique telle que $q(x) = q$ en $x = 0$ et $q(x) = 0$ partout ailleurs. Nous supposons aussi que la force horizontale aux limites $P = 0$.

Comme représenté sur la figure 4.8, L'application d'une charge défléchit la plaque vers le bas d'une quantité w . La dépression ainsi créée se remplit, par exemple d'eau, ce qui perturbe l'équilibre hydrostatique. Après application de la charge, le poids par unité de longueur pour la colonne de roche est :

$$\rho_w g(h_w + w) + \rho_m g h \quad (4.37)$$

Avant application de la charge il était :

$$\rho_w g h_w + \rho_m g(h + w) \quad (4.38)$$

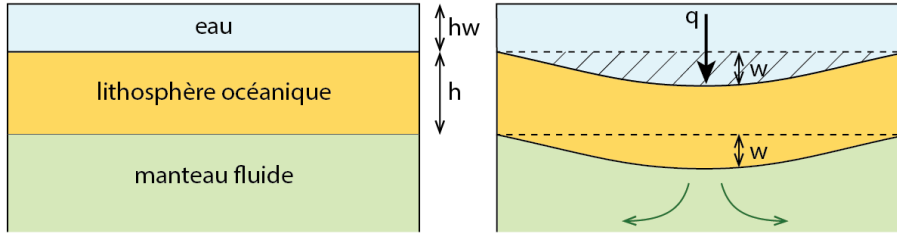


FIGURE 4.8

La force hydrostatique générée par la flexure de la plaque est la différence de ces deux états, soit :

$$q_h = (\rho_m - \rho_w) g w \quad (4.39)$$

Cette force résiste à la flexure et est verticale dirigée vers le haut. Il est important de noter que ceci est valide pour tout x , pas seulement en $x = 0$. On note aussi que le remplissage de dépression peut aussi se remplir de sédiments. Dans ce cas on remplacerait simplement ρ_w par la densité moyenne de ces sédiments.

On peut donc écrire l'équation de la flexure comme suit :

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} = -(\rho_m - \rho_w) g w \quad (4.40)$$

La solution générale de cette équation pour $x > 0$ est :

$$w = e^{\frac{x}{\alpha}} \left(c_1 \cos \frac{x}{\alpha} + c_2 \sin \frac{x}{\alpha} \right) + e^{-\frac{x}{\alpha}} \left(c_3 \cos \frac{x}{\alpha} + c_4 \sin \frac{x}{\alpha} \right) \quad (4.41)$$

où c_1, c_2, c_3 et c_4 sont des constantes à déterminer qui dépendent des conditions aux limites du problème. Cette solution implique α , appelé "paramètre flexural" et défini par :

$$\alpha = \left[\frac{4D}{g (\rho_m - \rho_w)} \right]^{\frac{1}{4}} \quad (4.42)$$

On détermine les constantes en écrivant que :

- On a $w \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow \infty$. De fait $e^{(-x/\alpha)} \rightarrow 0$, $e^{(x/\alpha)} \rightarrow \infty$ et on doit avoir $c_1 \cos(x/\alpha) + c_2 \sin(x/\alpha) = 0$ ce qui nécessite que $c_1 = c_2 = 0$.
- On a $dw/dx = 0$ en $x = 0$. On a déjà $c_1 = c_2 = 0$, on dérive par rapport à x pour obtenir $c_3 = c_4$. La solution devient donc, pour $x \neq 0$:

$$w = c_3 e^{-\frac{x}{\alpha}} \left(\cos \frac{x}{\alpha} + \sin \frac{x}{\alpha} \right) \quad (4.43)$$

On voit donc qu'en $x = 0$ on a $c_3 = w_0$, où w_0 est la déflexion maximale.

- La constante c_3 se détermine en écrivant l'équation 4.9 pour $P = 0$, soit $V = dM/dx$. L'équation 4.36 permet donc d'écrire :

$$V = -D \frac{dw^3}{dx^3} \quad (4.44)$$

On dérive la dernière expression de w pour trouver :

$$c_3 = \frac{q\alpha^3}{8D} = w_0 \quad (4.45)$$

La solution est donc, pour $x \geq 0$:

$$w = \frac{q\alpha^3}{8D} e^{-\frac{x}{\alpha}} \left(\cos \frac{x}{\alpha} + \sin \frac{x}{\alpha} \right) \quad (4.46)$$

que l'on peut écrire en fonction de la déflexion maximale w_0 :

$$w = w_0 e^{-\frac{x}{\alpha}} \left(\cos \frac{x}{\alpha} + \sin \frac{x}{\alpha} \right) \quad (4.47)$$

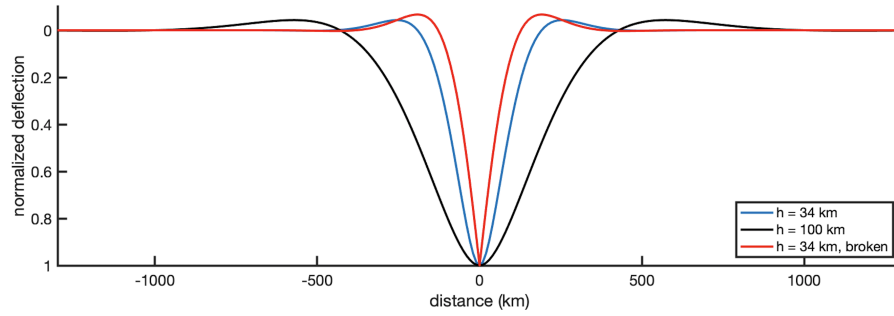


FIGURE 4.9

La figure 4.9 montre le résultat final, où la déflexion a été normalisée par w_0 . On observe la déflexion de la plaque sous l'effet de la charge, ainsi que la présence d'un bombement de part et d'autre de la déflexion. On observe notamment que la largeur de la zone défléchie augmente quand l'épaisseur de la plaque augmente et que la hauteur du bombement diminue.

On a un premier passage de $w = 0$ en x_0 quand :

$$\begin{aligned} \cos \frac{x_0}{\alpha} + \sin \frac{x_0}{\alpha} &= 0 \\ \frac{\cos}{\cos} + \frac{\sin}{\cos} &= 0 \end{aligned} \quad (4.48)$$

soit :

$$\tan \frac{x_0}{\alpha} = -1 \quad (4.49)$$

donc :

$$x_0 = \alpha \tan^{-1}(-1) = \frac{3\pi}{4} \alpha \quad (4.50)$$

Le bombement vers le haut, ou "forebuldge", qui accompagne la flexure vers le bas est maximal quand $dw/dx = 0$ soit :

$$w_0 \left[-\frac{e^{-x/\alpha}}{\alpha} \cos \frac{x}{\alpha} - e^{-x/\alpha} \sin \frac{x}{\alpha} - \frac{e^{-x/\alpha}}{\alpha} \sin \frac{x}{\alpha} + e^{-x/\alpha} \cos \frac{x}{\alpha} \right] = 0 \quad (4.51)$$

donc :

$$-\frac{2w_0}{\alpha} e^{-x_b/\alpha} \sin \frac{x_b}{\alpha} = 0 \quad (4.52)$$

ce qui implique que :

$$x_b = \alpha \sin^{-1}(0) = \pi\alpha \quad (4.53)$$

On appelle “longueur d’onde flexurale” la quantité $\pi\alpha$. Elle augmente avec la rigidité flexurale D .

La déflexion maximale vers le haut du forebuldge est trouvée pour $x = x_b = \pi\alpha$:

$$\begin{aligned} w_b &= w_0 e^{-\pi} (\cos \pi + \sin \pi) \\ &= -w_0 e^{-\pi} = -0.0432 w_0 \end{aligned} \quad (4.54)$$

4.4.2 Application au cas d’Hawaii

La chaîne volcanique sous-marine étroite et linéaire Hawaii-Empereur posée sur la lithosphère océanique de la plaque Pacifique se rapproche relativement bien du cas d’une charge verticale linéique appliquée sur une plaque élastique de dimensions horizontales infinies.

La figure 4.10 montre que la bathymétrie est caractérisée par deux longueurs d’onde spatiales principales : (1) un bombement de grande longueur d’onde centré sur les volcans due à un panache mantellique qui advecte de la chaleur sous les îles actives, y permettant fusion partielle et volcanisme, et (2) une dépression relativement étroite de part et d’autre de la chaîne volcanique due à la flexure de la plaque sous le poids des volcans.

Si l’on filtre la bathymétrie à grande longueur d’onde pour ne conserver que l’effet de la flexure due au poids des volcans, on peut alors déterminer que $w_b \sim 250$ km. La figure 4.11 compare la bathymétrie filtrée avec un modèle de flexure appliquant l’équation 4.47 avec $\rho_m - \rho_w = 2270 \text{ km m}^{-3}$, $g = 9.82 \text{ m s}^{-2}$, $E = 70 \text{ GPa}$ et $\nu = 0.2$. On a ici ajusté l’épaisseur élastique de la plaque de manière à optimiser l’accord du modèle aux observations. On trouve que le meilleur modèle est obtenu pour $h = 44$ km, correspondant à une rigidité flexurale $D = 5.3 \times 10^{23} \text{ Nm}$.

Ce résultat est cohérent avec un certain nombre d’études plus approfondies réalisées sur l’archipel hawaïen, dont celle de Watts et tenBrink (1989) qui trouvent une épaisseur élastique de 40 km. L’étude de P. Wessel (1993) est particulièrement intéressante car cet auteur prend en compte les sédiments qui se déposent dans la dépression causée par la flexure, de part et d’autre de la chaîne volcanique. Ils montrent notamment, grâce à des profils de sismique réflexion et réfraction, que cette dépression est comblée par une épaisseur de sédiments allant jusqu’à 2 km (figure 4.12). Ils modélisent la flexure (1) en prenant en compte ces sédiments (densité de 2550 kg m^{-3}), (2) en calant leur modèle sur le réflecteur sismique qui marque le sommet de la croûte océanique (et non la surface du fond marin). Ils trouvent une épaisseur élastique de 25 km (figure 4.12).

Il a aussi été proposé que la plaque Pacifique était discontinue sous la chaîne volcanique, qui s’est construite le long de la zone de fracture de Molokai. On

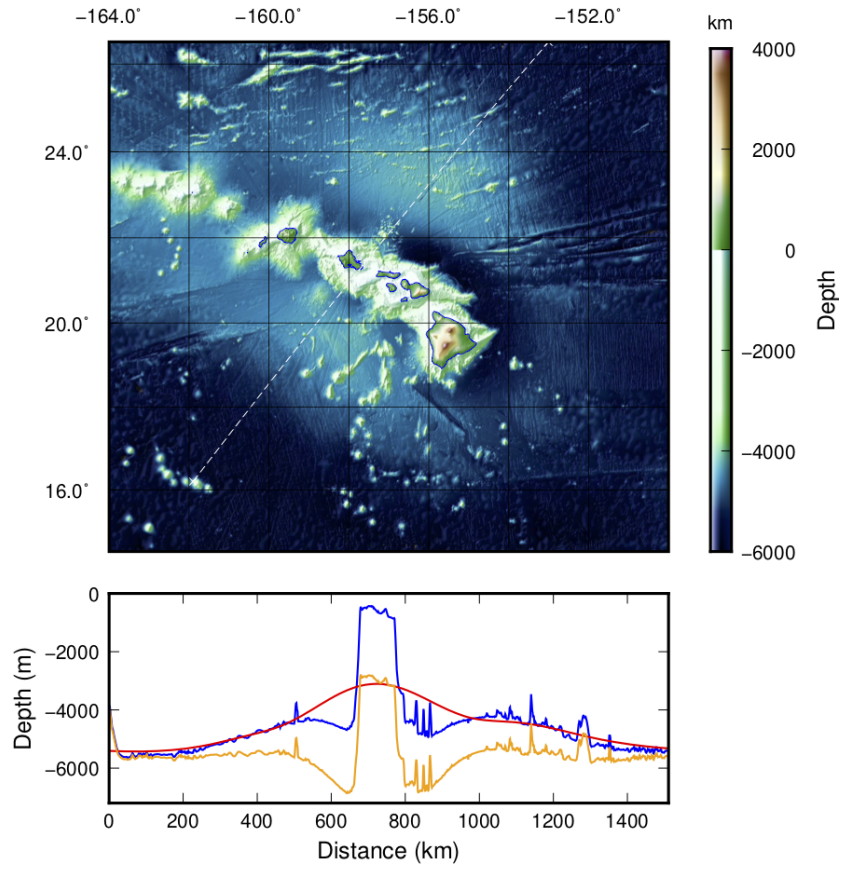


FIGURE 4.10

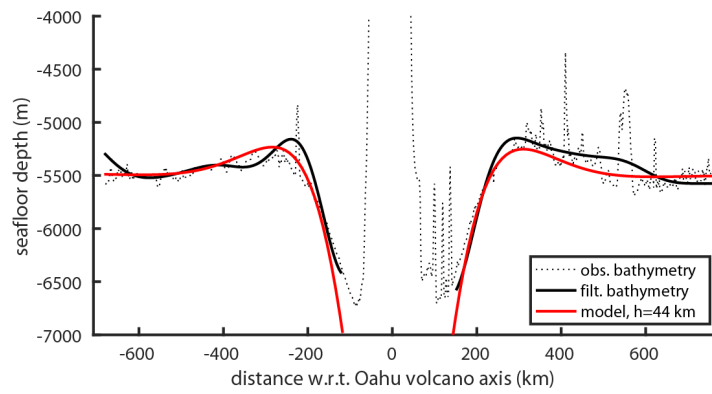


FIGURE 4.11

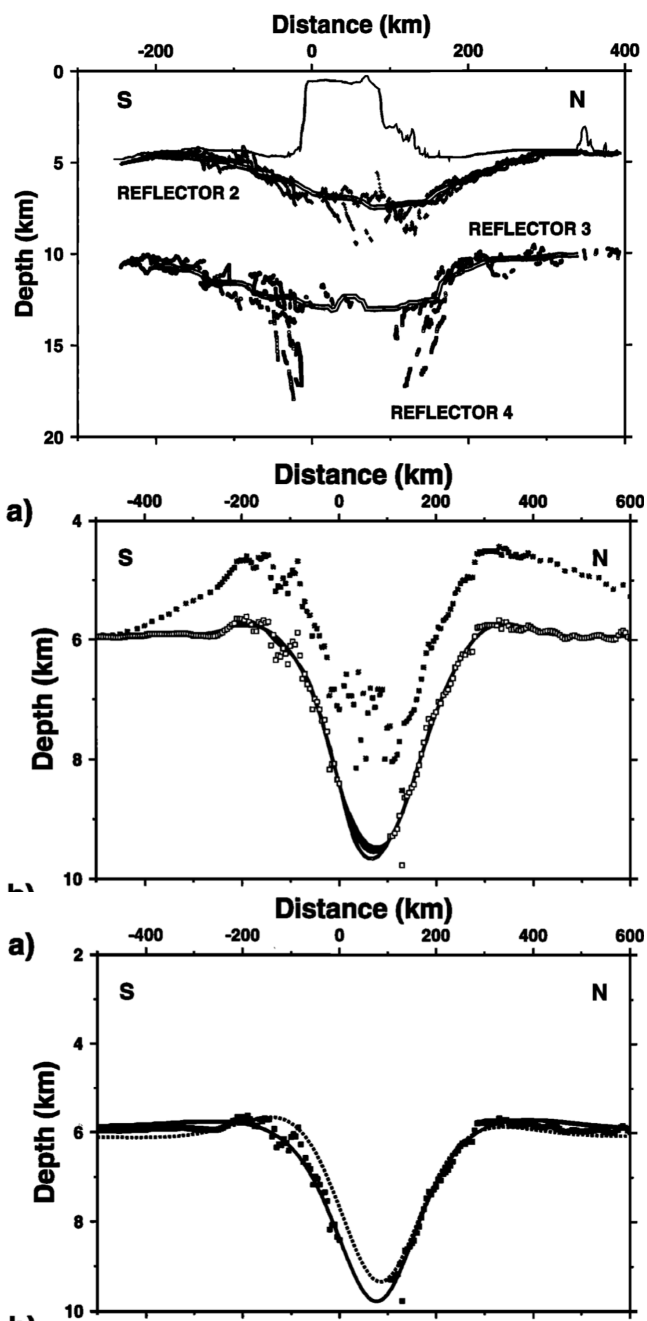


FIGURE 4.12

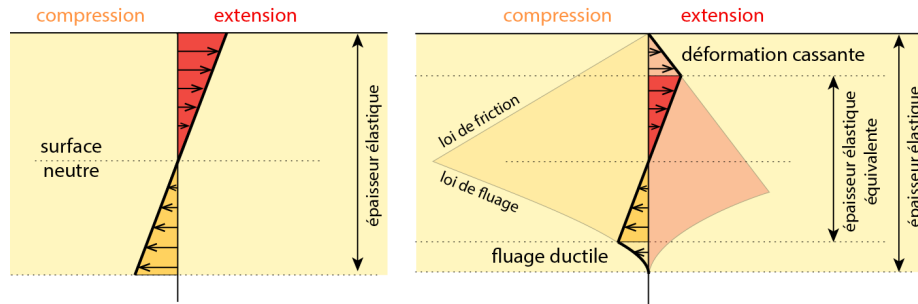


FIGURE 4.13

montre dans ce dernier cas que l'équation de la flexure devient :

$$w = \frac{V_0 \alpha^3}{4D} e^{-\frac{x}{\alpha}} \cos \frac{x}{\alpha} \quad (4.55)$$

avec une amplitude maximale de la déflexion en $x = 0$:

$$w_0 = \frac{V_0 \alpha^3}{4D} \quad (4.56)$$

On voit donc que, pour une charge et une rigidité flexurale équivalentes, la déflexion maximale d'une plaque discontinue est deux fois supérieure à celle d'une plaque continue. Le profil de flexure devient :

$$w = w_0 e^{-\frac{x}{\alpha}} \cos \frac{x}{\alpha} \quad (4.57)$$

Avec $x_b = 250$ km, on obtient alors pour les mêmes valeurs que précédemment : $\alpha = 106$ km, $D = 7.3 \times 10^{23}$ Nm, $h = 49$ km. Cette valeur de l'épaisseur élastique de la lithosphère autour d'Hawaii est en (léger) meilleur accord avec les observations indépendantes.

Dans tous les cas, les valeurs d'épaisseurs élastiques déduites des modèles flexuraux sont 2 à 3 fois inférieures à l'épaisseur de la lithosphère déduite de l'âge de la croûte océanique. Ce désaccord est classiquement interprété comme le résultat d'une déformation fragile (en surface) ou ductile (en profondeur) dans les régions où les contraintes flexurales sont suffisamment importantes, comme représenté sur la figure 4.13. Les contraintes flexurales sont limitées par la loi de friction dans la partie supérieure de la plaque et par la loi de fluage dans la partie inférieure. De fait, cela réduit l'épaisseur élastique de la plaque – on parle dans ce cas d'épaisseur élastique équivalente.

4.4.3 Flexure d'une plaque en subduction

Le cas de la flexure d'une plaque en subduction est différents des précédents car la flexure résulte de la combinaison de deux causes (figure 4.14) :

1. Le poids de la plaque supérieure V_0 qui s'exerce en extrémité de la plaque plaque subductante ;

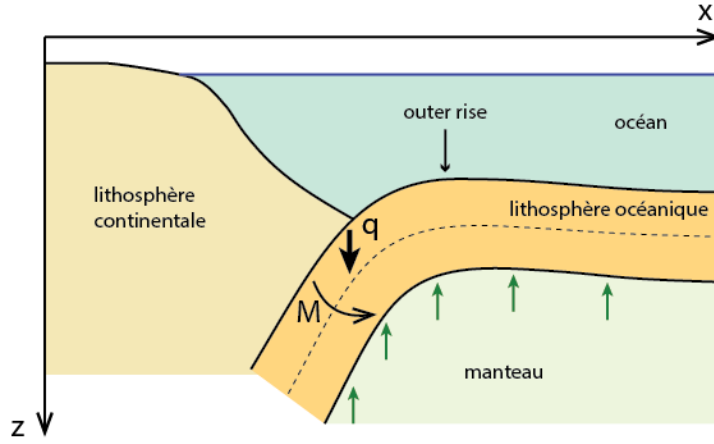


FIGURE 4.14

2. Le moment M_0 des forces agissant sur la plaque indépendamment du poids de la plaque supérieure, c'est-à-dire le poids du slab et les forces exercées par le manteau dans lequel il s'enfoncé.

La déflexion répond toujours à la solution générale 4.41 de l'équation de la flexure 4.36, avec les conditions aux limites suivantes :

- En $x = \infty$ la déflexion $w = 0$, ce qui implique comme plus haut que $c_1 = c_2 = 0$.
- En $x = 0$ le moment flexural est $-M_0$.
- En $x = 0$ la force verticale est V_0 .

On montre que ces conditions aux limites mènent à la solution suivante :

$$w = \frac{\alpha^2}{2D} e^{-\frac{x}{\alpha}} \left(-M_0 \sin \frac{x}{\alpha} + (V_0 \alpha + M_0) \cos \frac{x}{\alpha} \right) \quad (4.58)$$

On note que cette équation se réduit à celle d'une plaque discontinue dans le cas où $M_0 = 0$ et la charge V_0 ici ne s'applique qu'à une demi-plaque et est donc $V_0/2$ par rapport au cas de la plaque discontinue.

Cette équation n'est pas utilisable en l'état car on ne peut déterminer ni V_0 ni M_0 par la mesure. Par contre on sait mesurer $w_b =$ hauteur du forebuldge et $x_b - x_0 =$ demi largeur du forebuldge à partir de la bathymétrie sous-marine lissée. On cherche donc à écrire V_0 et M_0 en fonction de ces deux quantités.

En $x = x_0$ on a $w = 0$ donc :

$$0 = -M_0 \sin \frac{x_0}{\alpha} + V_0 \alpha \cos \frac{x_0}{\alpha} + M_0 \cos \frac{x_0}{\alpha} \quad (4.59)$$

ce qui se simplifie, en divisant le tout par $\cos(x_0/\alpha)$:

$$\tan \frac{x_0}{\alpha} = 1 + \alpha \frac{V_0}{M_0} \quad (4.60)$$

En $x = x_b$ on a $dw/dx = 0$ donc (après un peu d'algèbre) :

$$\tan \frac{x_b}{\alpha} = -1 - \frac{2}{\alpha} \frac{V_0}{M_0} \quad (4.61)$$

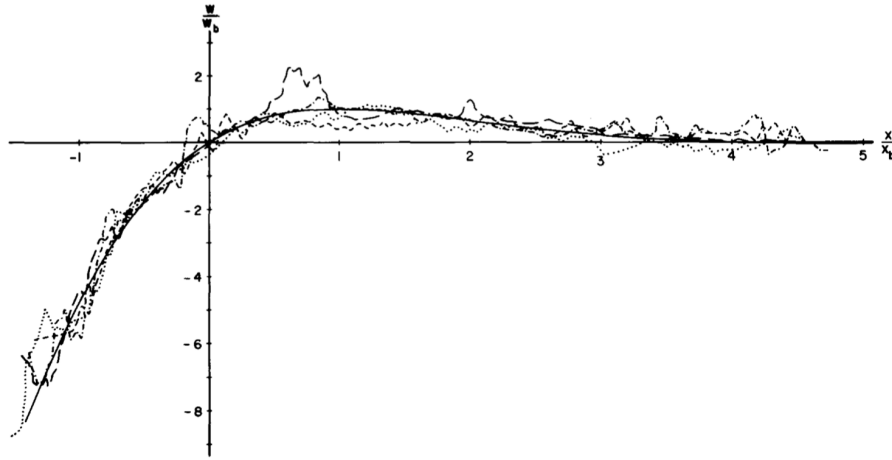


Fig. 6. The solid line is the universal deflection curve and the broken lines are the corrected and normalized bathymetric profiles. --- is the Mariana profile (data from Scan 5 cruise and [19]), - - - is the Bonin profile (Hunt 3 and Aries 7 cruises), ····· is the Kuril profile (Zetes 2 cruise and [18]), and - · - · is the central Aleutian profile (Seamap 13 cruise and [17]).

FIGURE 4.15

Ces deux équations donnent aussi :

$$x_b - x_0 = \frac{\pi}{4} \alpha \quad (4.62)$$

On peut utiliser ces deux équations indépendantes pour substituer V_0 et M_0 dans la solution de la flexure et, après un peu plus d'algèbre fastidieuse, arriver à la solution utilisable :

$$\frac{w}{w_b} = \sqrt{2} e^{\pi/4} \exp \left[-\frac{\pi}{4} \left(\frac{x - x_0}{x_b - x_0} \right) \right] \sin \left[-\frac{\pi}{4} \left(\frac{x - x_0}{x_b - x_0} \right) \right] \quad (4.63)$$

Cette équation donne le "profil universel de flexure" valide pour toute flexure de plaque élastique sous l'effet d'une charge le long d'un de ses bords. On choisissant comme origine de l'axe des x le premier intersect où $w = 0$, on a alors $x_0 = 0$. Dans ce cas, l'équation ci-dessus donne w/w_b en fonction de x/x_b , elle est donc non-dimensionalisée. Caldwell et al. (1976) montreront que ce modèle purement élastique reproduit très bien les observations sur le pourtour Pacifique (figure 4.15), pour des rigidités flexurales D entre 1.2 et 0.5×10^{23} Nm et des épaisseurs élastiques de 20 à 29 km. Les profils bathymétriques montrent que $x_b \sim 50$ km et w_b entre 300 et 500 m.

En fait, le modèle purement élastique du profil universel de flexure ne reproduit pas toutes les flexures des bords de plaques en subduction. En effet, les contraintes flexurales peuvent dans certains cas atteindre des valeurs très importantes, supérieures à la résistance mécanique de la lithospère, et induire fracturation et déformation plastique. Cela se manifestent notamment par des failles normales d'extrados qui coïncident avec la partie de la lithosphère subductante où le rayon de courbure est maximal. Ces failles s'observent très clairement dans la bathymétrie ainsi que par la sismicité qui s'y manifeste, comme le montre la figure 4.16.

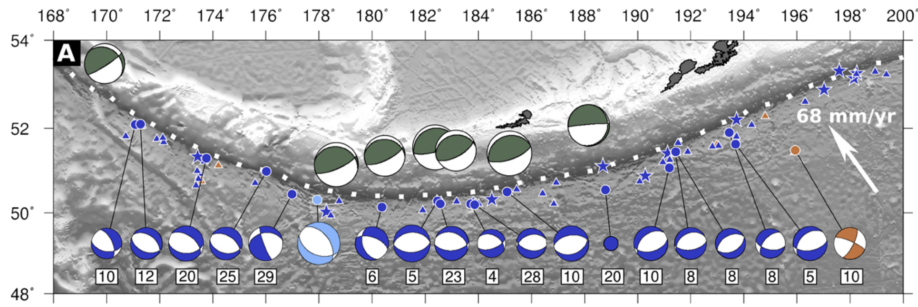


FIGURE 4.16

4.4.4 Flexure dans un cas limite

Plaçons nous dans le cas d'une lithosphère continentale de rigidité flexurale nulle, ce qui revient à dire que son épaisseur élastique équivalente est nulle – elle flue. Cela revient aussi à dire que $\sigma_{xy} = 0$, il n'y a pas de résistance au cisaillement. On a donc $D = 0$. On suppose aussi que les forces horizontales exercées aux limites sont nulles, donc $P = 0$.

La charge est due au poids d'une topographie continentale de hauteur $h(x)$, on a donc :

$$q(x) = \rho_c g h(x) \quad (4.64)$$

La force hydrostatique développée sous l'effet de la flexure due à cette charge est le poids du volume déplacé, soit :

$$(\rho_m - \rho_c) g w \quad (4.65)$$

Et l'équation de la flexure se réduit à :

$$(\rho_m - \rho_c) g w = \rho_c g h(x) \quad (4.66)$$

soit :

$$w = \frac{\rho_c g h(x)}{(\rho_m - \rho_c)} \quad (4.67)$$

ce qui est l'équation d'isosostasie d'Airy. L'isosostasie purement hydrostatique est donc un cas particulier de flexure à la limite où $D \rightarrow 0$.