Estimation d'une position absolue

- Cas des mesures de pseudo distances, modèle d'observation:

$$^{j}R_i(t) = \sqrt{\left({}^{j}X(t) - X_i\right)^2 + \left({}^{j}Y(t) - Y_i\right)^2 + \left({}^{j}Z(t) - Z_i\right)^2} + c\left({}^{j}\delta(t) - \delta_i(t)\right) + \Delta I(t) + \Delta T(t) + MP(t) + \varepsilon$$

- Modèle non linéaire => linéarisation du terme géométrique par développement en série de Taylor autour d'une position a priori (X_o,Y_o,Z_o):

$$f(X_i,Y_i,Z_i) = f(X_o,Y_o,Z_o) + \frac{\partial f(X_o,Y_o,Z_o)}{\partial X_o}\Delta X_i + \frac{\partial f(X_o,Y_o,Z_o)}{\partial Y_o}\Delta Y_i + \frac{\partial f(X_o,Y_o,Z_o)}{\partial Z_o}\Delta Z_i + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \ldots$$

- Conséquences:
  - Il faut connaître des coordonnées a priori des sites GPS (approximatives)
  - Inconnues = ajustements à ces coordonnées a priori
  - Minimisation de la somme du carré des résidus (« moindres carrés »)
  - Solution itérative

Estimation d'une position absolue

- Les dérivées partielles sont:

$$\frac{\partial f(X_o,Y_o,Z_o)}{\partial X_o} = -\frac{{}^jX(t)-X_o}{{}^j\rho_o(t)} = {}^ja_{Xi}$$

$$\frac{\partial f(X_o,Y_o,Z_o)}{\partial Y_o} = -\frac{{}^jY(t)-Y_o}{{}^j\rho_o(t)} = {}^ja_{Yi}$$

$$\frac{\partial f(X_o,Y_o,Z_o)}{\partial Z_o} = -\frac{{}^jZ(t)-Z_o}{{}^j\rho_o(t)} = {}^ja_{Zi}$$

- Le modèle linéarisé devient donc (en ignorant les termes de propagation atmosphérique):

$${}^jR_i(t) = {}^j\rho_o(t) - \frac{{}^jX(t)-X_o}{{}^j\rho_o(t)}\Delta X_i - \frac{{}^jY(t)-Y_o}{{}^j\rho_o(t)}\Delta Y_i - \frac{{}^jZ(t)-Z_o}{{}^j\rho_o(t)}\Delta Z_i + c\,{}^j\delta(t) - c\delta_i(t)$$

$${}^jR_i(t) - {}^j\rho_o(t) - c\,{}^j\delta(t) = -\frac{{}^jX(t)-X_o}{{}^j\rho_o(t)}\Delta X_i - \frac{{}^jY(t)-Y_o}{{}^j\rho_o(t)}\Delta Y_i - \frac{{}^jZ(t)-Z_o}{{}^j\rho_o(t)}\Delta Z_i - c\delta_i(t)$$

mesure a priori fourni gradients du modèle à (X_o,Y_o,Z_o) et inconnues (ajustements)

Estimation d'une position absolue

- On pose: $^{j}l = {}^{j}R_i(t) - {}^{j}\rho_o(t) - c\,{}^{j}\delta(t)$

- Pour 4 satellites visibles simultanément d'une même station, on a donc:

$$
\begin{aligned}
{}^{1}l &= {}^{1}a_{Xi}\Delta X_i + {}^{1}a_{Yi}\Delta Y_i + {}^{1}a_{Zi}\Delta Z_i - c\delta_i \\
{}^{2}l &= {}^{2}a_{Xi}\Delta X_i + {}^{2}a_{Yi}\Delta Y_i + {}^{2}a_{Zi}\Delta Z_i - c\delta_i \\
{}^{3}l &= {}^{3}a_{Xi}\Delta X_i + {}^{3}a_{Yi}\Delta Y_i + {}^{3}a_{Zi}\Delta Z_i - c\delta_i \\
{}^{4}l &= {}^{4}a_{Xi}\Delta X_i + {}^{4}a_{Yi}\Delta Y_i + {}^{4}a_{Zi}\Delta Z_i - c\delta_i
\end{aligned}
$$

- Soit, sous forme matricielle, v = résidus: $\vec{L} = A\vec{X} + v \qquad \left(P_L = \Sigma_L^{-1}\right)$

- Avec:

$$
A = \begin{bmatrix} {}^{1}a_{Xi} & {}^{1}a_{Yi} & {}^{1}a_{Zi} & -c \\ {}^{2}a_{Xi} & {}^{2}a_{Yi} & {}^{2}a_{Zi} & -c \\ {}^{3}a_{Xi} & {}^{3}a_{Yi} & {}^{3}a_{Zi} & -c \\ {}^{4}a_{Xi} & {}^{4}a_{Yi} & {}^{4}a_{Zi} & -c \end{bmatrix} \qquad \vec{X} = \begin{bmatrix} \Delta X_i \\ \Delta Y_i \\ \Delta Z_i \\ \delta_i \end{bmatrix} \qquad \vec{L} = \begin{bmatrix} {}^{1}l \\ {}^{2}l \\ {}^{3}l \\ {}^{4}l \end{bmatrix}
$$

Estimation d'une position absolue

- Partant du problème sous forme matricielle, avec les résidus v:

$$\vec{L} = A\vec{X} + v \qquad \left(P_L = \Sigma_L^{-1}\right)$$

- On le résout par moindres carrés = on minimise la somme du carré des résidus (norme L2):

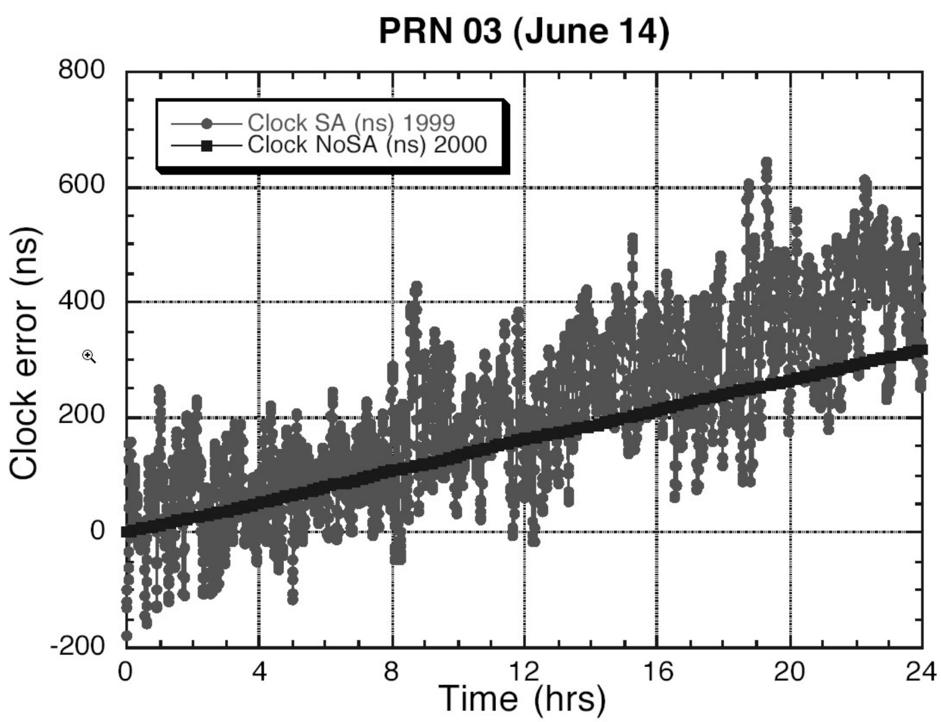
$$J(x) = v^T P_L v = \left(L - Ax\right)^T P_L \left(L - Ax\right)$$

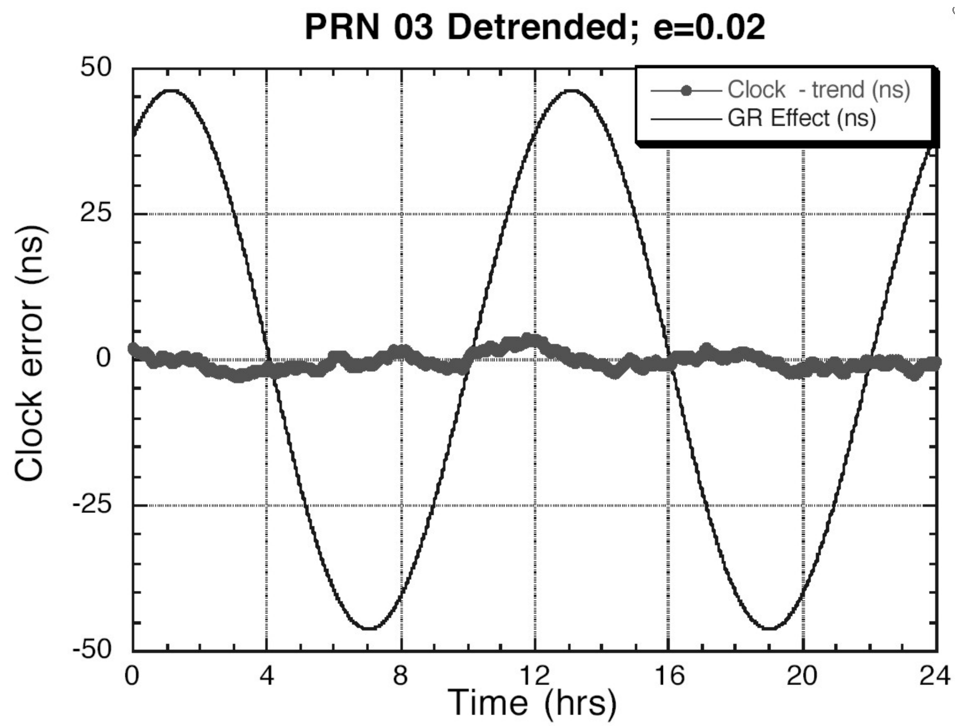
- Les équations normales résultantes sont: $A^T P_L A\hat{x} = A^T P_L L$

- Et la solution finale: $\hat{x} = \left(A^T P_L A\right)^{-1} A^T P_L L$

- Et la matrice de covariance des inconnues: $\Sigma_X = \left(A^T \Sigma_L^{-1} A\right)^{-1}$

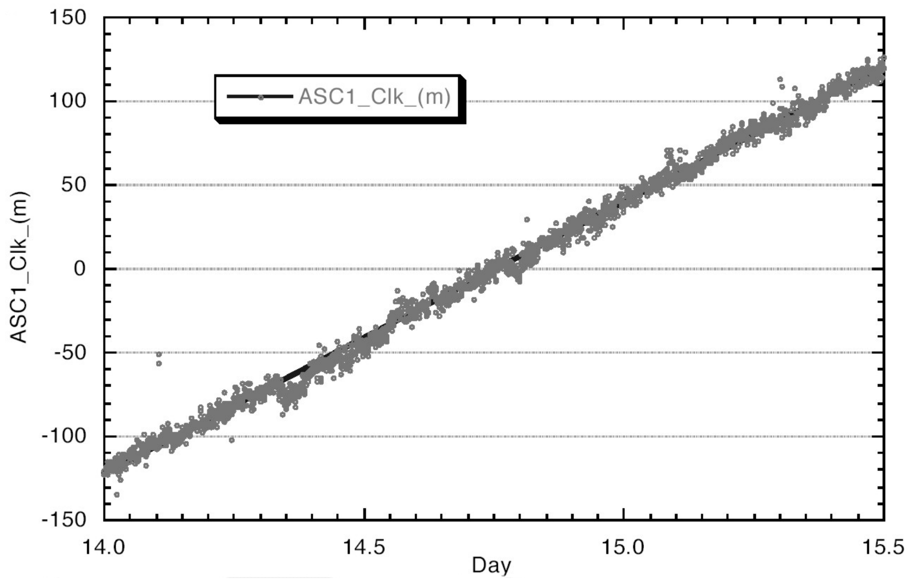
Biais d’horloges: satellites

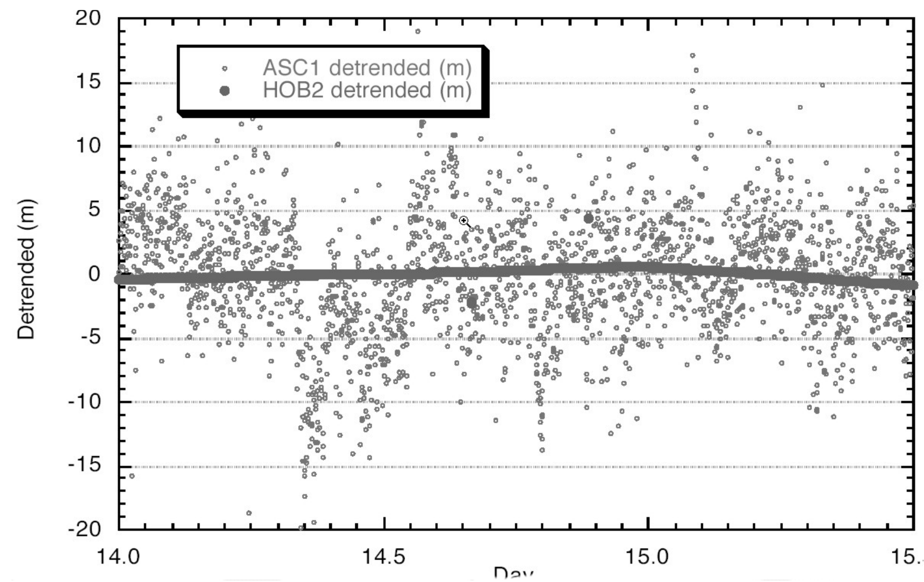




- Actuellement ~5 ns = 1.5 m
- Sous « selective availability » (S/A) => ~200 ns (60 m)
- Orbites précises IGS contiennent des corrections de biais d’horloge satellite

Biais d'horloge: récepteurs





- Peuvent atteindre plusieurs kilomètres…
- Varient parfois de manière simple/lisse ⇒ peuvent être modélisés par des polynômes – rarement le cas en réalité
- Estimation à chaque époque de mesure? Difficile…
- Une astuce: les doubles différences.

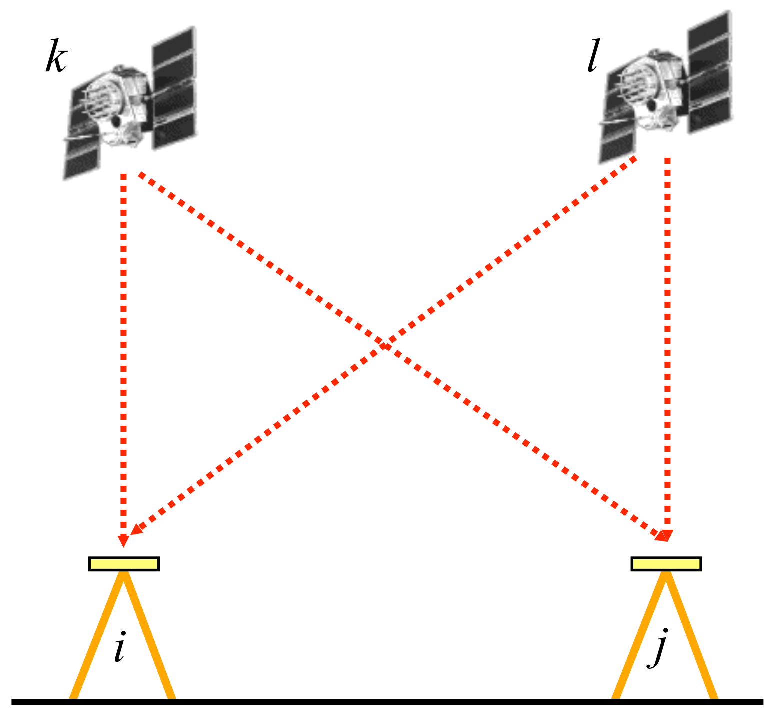
Double différences

- Différence des observables de phase entre 2 sat. (k,l) et 2 réc. (i,j) en mètres:

$$L_{ij}^{kl} = \left(L_i^k - L_i^l\right) - \left(L_j^k - L_j^l\right)$$

$$= \left(\rho_i^k - \rho_i^l - \rho_j^k + \rho_j^l\right) - c\left(h^k - h_i - h^l + h_j - h^k + h_i + h^l - h_j\right) - \lambda\left(N_i^k - N_i^l - N_j^k + N_j^l\right)$$

$$= \rho_{ij}^{kl} - \lambda N_{ij}^{kl}$$



⇒ Les biais d'horloge $h_s(t)$ et $h_r(t)$ sont éliminés (mais le nombre d'observations a diminué)

⇒ L'ambigüité de phase reste un entier.

⇒ Les erreurs communes aux récepteurs i et j s'annulent aussi (en partie):

- Les erreurs dues à la réfraction atmosphérique sont minimisées si les récepteurs sont suffisamment proches.
- Les lignes de base courtes sont donc plus précises que les longues.

Estimation d'une position relative

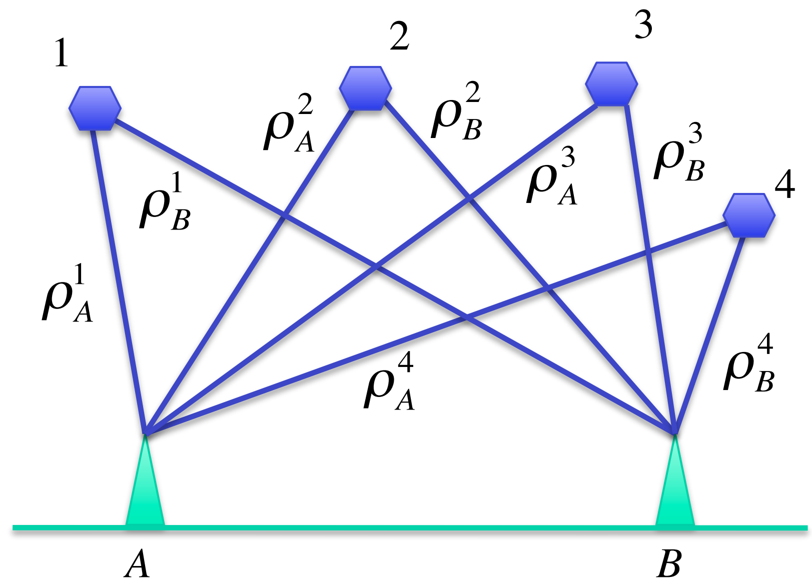
- Cas de deux stations, 4 satellites: station A de position connue, on cherche à estimer la position de B.
- On peut écrire 6 doubles différences… mais seulement 3 sont indépendantes. Par ex.:

$$L_{AB}^{12} = L_{AB}^{13} - L_{AB}^{23}$$

$$L_{AB}^{23} = L_{AB}^{24} - L_{AB}^{34}$$

$$\ldots etc$$

- Avec 6 inconnues (3 coordonnées pour A + 3 ambigüités de phase) => il faut au moins deux époques d'observation
- En général, pour r récepteurs, s satellites, le nombre de DD indépendantes est $(r\text{-}1)$x$(q\text{-}1)$



$$L_{AB}^{12} = \left(L_A^1 - L_B^1\right) - \left(L_A^2 - L_B^2\right) \qquad L_{AB}^{23} = \left(L_A^2 - L_B^2\right) - \left(L_A^3 - L_B^3\right)$$

$$L_{AB}^{13} = \left(L_A^1 - L_B^1\right) - \left(L_A^3 - L_B^3\right) \qquad L_{AB}^{24} = \left(L_A^2 - L_B^2\right) - \left(L_A^4 - L_B^4\right)$$

$$L_{AB}^{14} = \left(L_A^1 - L_B^1\right) - \left(L_A^4 - L_B^4\right) \qquad L_{AB}^{34} = \left(L_A^3 - L_B^3\right) - \left(L_A^4 - L_B^4\right)$$

Estimation d'une position relative

- La double différence $L^{24}{}_{AB}$ (par exemple) s'écrit: $L_{AB}^{24} = \rho_{AB}^{24} - \lambda N_{AB}^{24}$
- Avec: $\rho_{AB}^{24} = \rho_A^2 - \rho_A^4 - \rho_B^2 + \rho_B^4$
- Son expansion en série de Taylor est:

$$L_{AB}^{24} = {}_{AB}^{24}\rho_o + \frac{\partial \rho_{AB}^{24}}{\partial x}\Delta X + \frac{\partial \rho_{AB}^{24}}{\partial y}\Delta Y + \frac{\partial \rho_{AB}^{24}}{\partial z}\Delta Z - \lambda N_{AB}^{24}$$

- Equivalent à:

$$\underbrace{L_{AB}^{24} - {}_{AB}^{24}\rho_o}_{\text{une observation}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial \rho_{AB}^{24}}{\partial x} & \frac{\partial \rho_{AB}^{24}}{\partial y} & \frac{\partial \rho_{AB}^{24}}{\partial z} & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}}_{\text{une ligne de la matrice du modèle}} \underbrace{\begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \\ N_{AB}^{21} \\ N_{AB}^{22} \\ N_{AB}^{23} \end{pmatrix}}_{\text{vecteur des inconnues}}$$

Estimation d’une position relative

- La première dérivée partielle est: $\frac{\partial \rho_{AB}^{24}}{\partial x_B} = \frac{\partial}{\partial x_B}\left(\rho_A^2 - \rho_B^2 - \rho_A^4 + \rho_B^4\right)$

$$= \frac{\partial \rho_A^2}{\partial x_B} - \frac{\partial \rho_B^2}{\partial x_B} - \frac{\partial \rho_A^4}{\partial x_B} + \frac{\partial \rho_B^4}{\partial x_B} = -\frac{\partial \rho_B^2}{\partial x_B} + \frac{\partial \rho_B^4}{\partial x_B}$$

$$= \frac{X_o - {}^4X}{{}_B^4\rho_o} - \frac{X_o - {}^2X}{{}_B^2\rho_o}$$

- Même dérivation pour les autres, ce qui permet de construire la matrice du modèle, puis d’écrire le modèle direct sous forme matricielle:

$$\vec{L} = A\vec{X} + v \qquad \left(P_L = \Sigma_L^{-1}\right)$$

- Dont la solution par moindres carrés est: $\hat{x} = \left(A^T P_L A\right)^{-1} A^T P_L L$

- Et la covariance associée: $\Sigma_X = \left(A^T \Sigma_L^{-1} A\right)^{-1}$