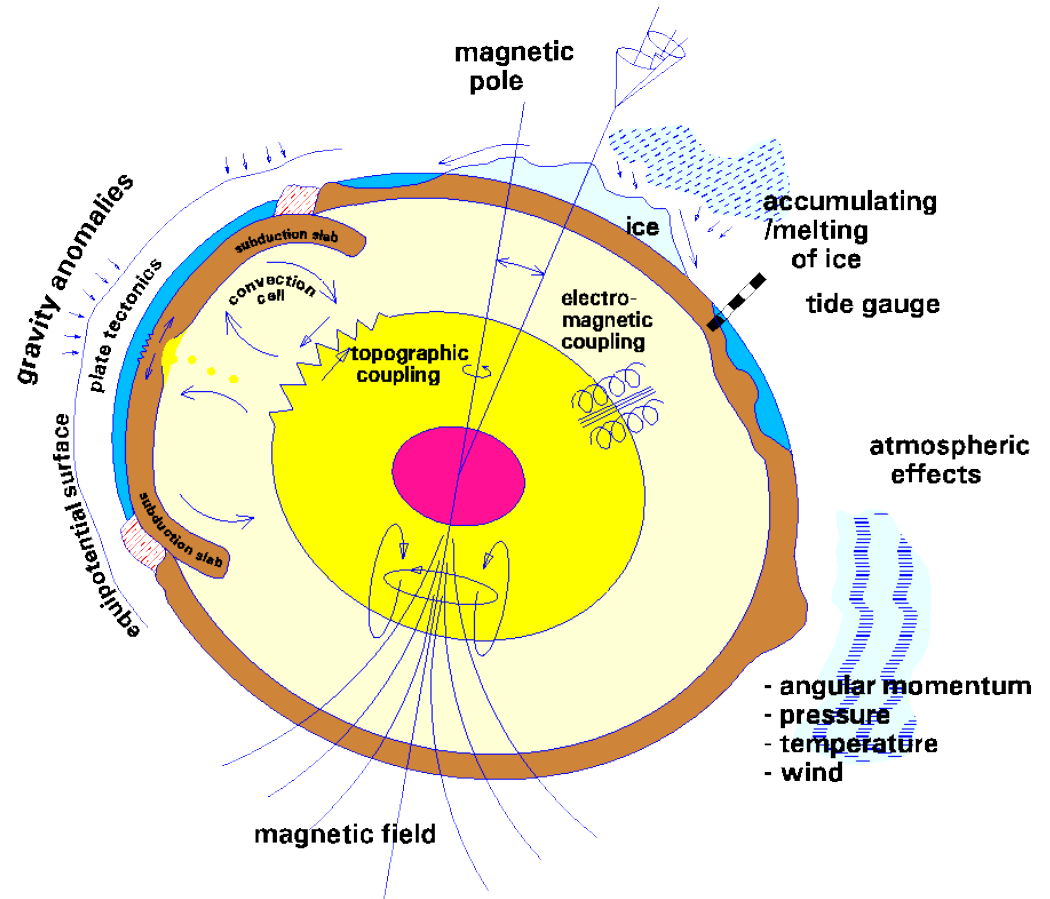


# Analyse cinématique des déformations de la lithosphère

(analyse et modélisation des déformations)

# Déplacements et déformations de la surface de la Terre

- Forçages internes:
  - Cinématique des plaques (rigides)
  - Déformation des continents (e.g. Asie)
  - Séismes (inter, co, et post-sismique)
  - Systèmes volcaniques
  - (glissements de terrain)
- Forçages externes:
  - Rebond postglaciaire
  - Surcharges: hydrologie, océans, atmosphère
- Besoin d'une précision millimétrique à une échelle locale à globale





# Déplacements et déformations de la surface de la Terre

- Objectif: estimer à partir de mesures géodésiques les paramètres qui caractérisent les processus géophysique d'intérêt, par exemple:
  - Cinématique des plaques: rotations angulaires
  - Tectonique continentale: taux de la déformation
  - Faille: vitesse de glissement, couplage mécanique
- Besoin d'outils qui permettent de passer des mesures géodésiques à ces quantités.

La faille de San Andreas en Californie centrale

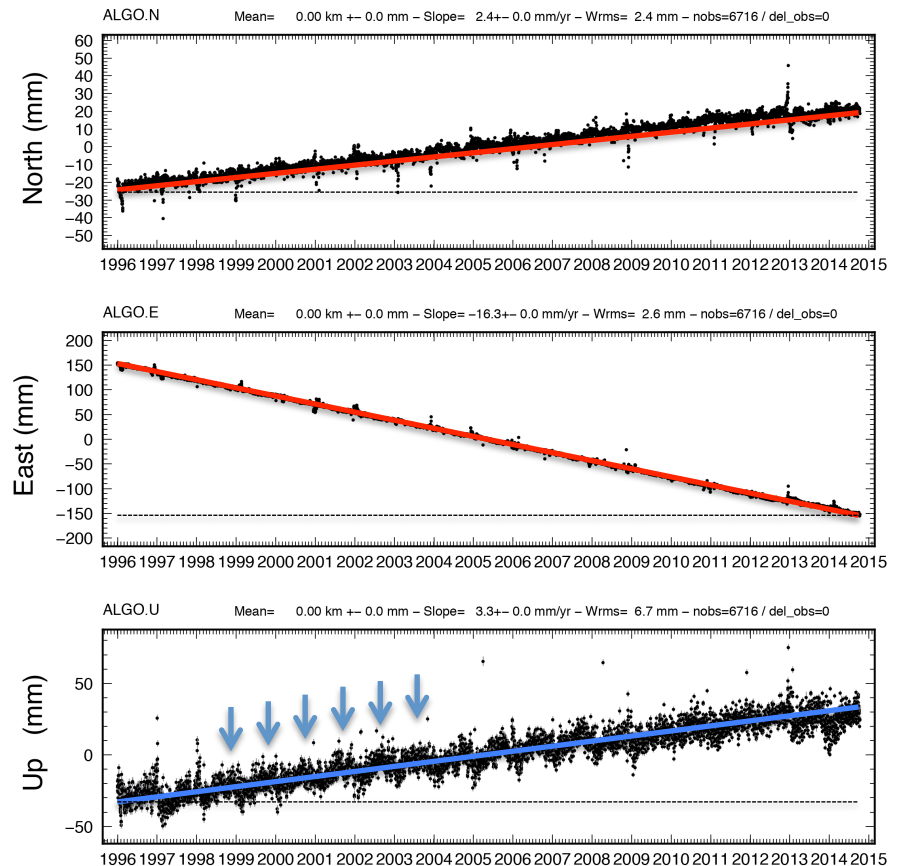


Himalayas et Tibet vus par une navette spatiale



# La donnée de base

- Dans le cas du positionnement GNSS de précision:
  - Les positions journalières sont précises à ~qqs millimètres.
  - Elles sont exprimées dans un repère bien déterminé, par exemple l'ITRF.
- Positions en fonction du temps (classiquement une position par jour) = séries temporelles → déplacements:
  - Linéaires souvent => vitesses
  - Non linéaires parfois => cosismique, post-sismique, magmatisme, etc.

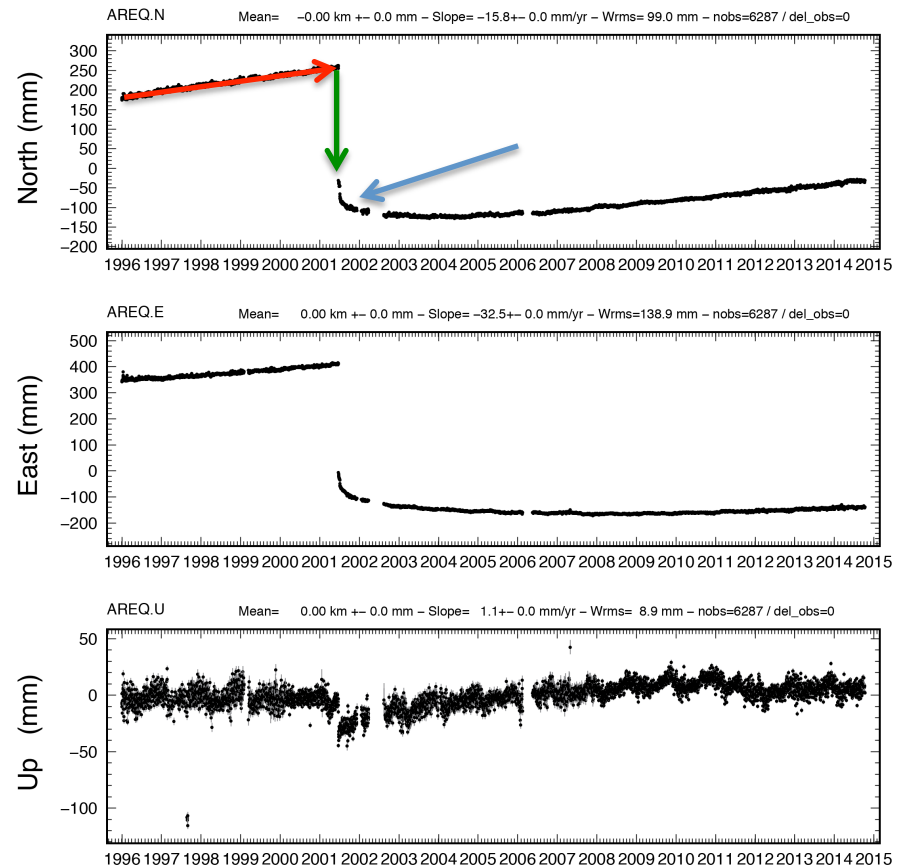


Algonquin, centre Canada

- (1) Mouvement plaque nord américaine
- (2) Rebond post-glaciaire
- (3) Charge hydrologique saisonnière

# La donnée de base

- Dans le cas du positionnement GNSS de précision:
  - Les positions journalières sont précises à ~qqs millimètres.
  - Elles sont exprimées dans un repère bien déterminé, par exemple l'ITRF.
- Positions en fonction du temps (classiquement une position par jours) = séries temporelles → déplacements:
  - Linéaires souvent => vitesses
  - Non linéaires parfois => cosismique, post-sismique, magmatisme, etc.

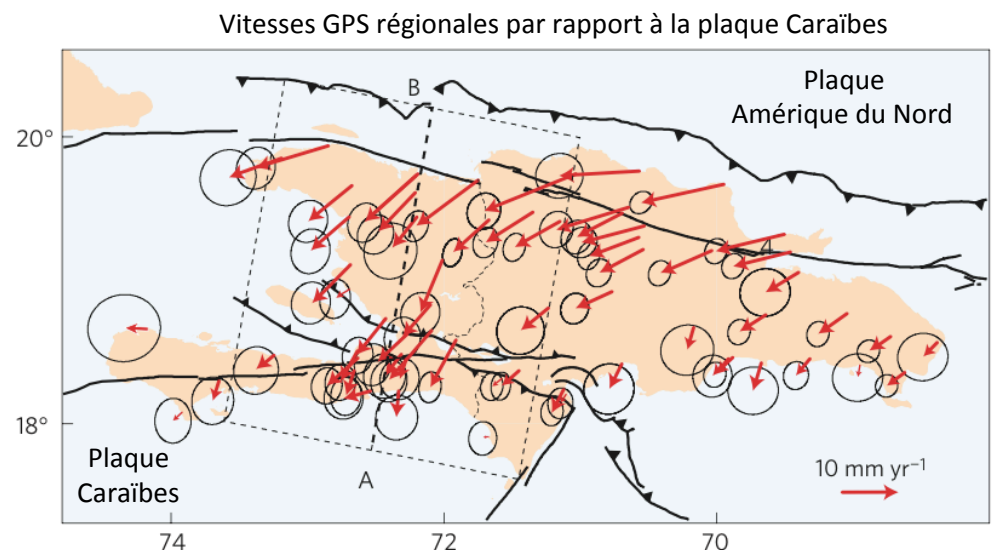
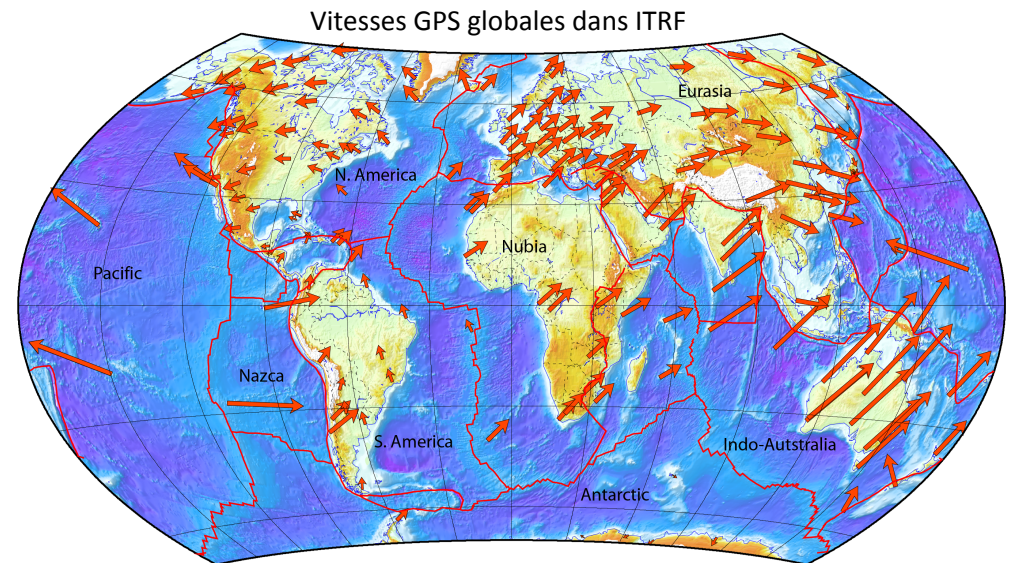


Arequipa, Pérou

- (4) Mouvement inter-sismique
- (5) Mouvement co-sismique
- (6) Réajustement post-sismique

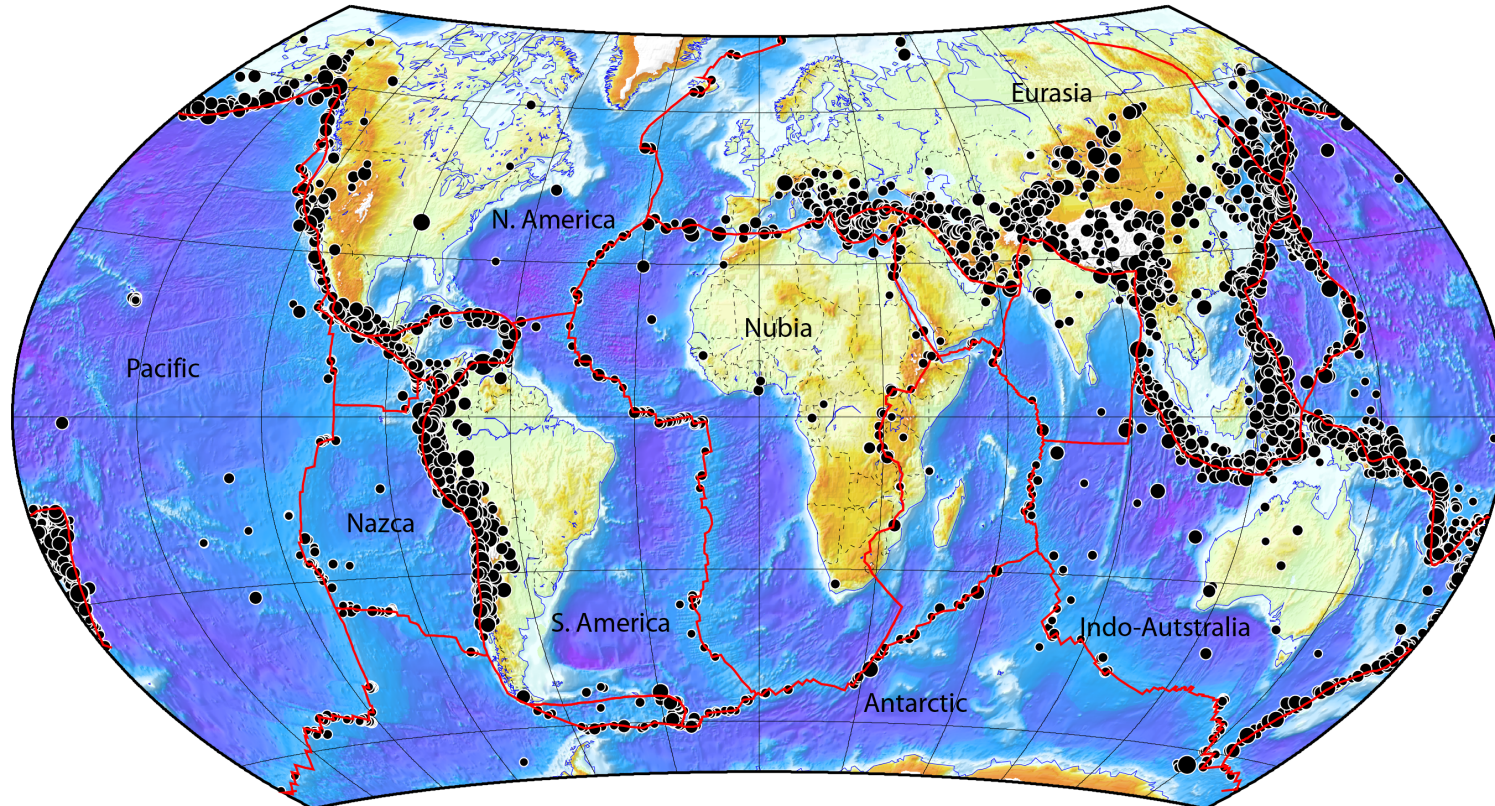
# La donnée de base

- Cas des déplacements linéaires permettant le calcul d'une vitesse: on établit un « champ de vitesses ».
- Peut-être global ou régional.
- Exprimé dans un repère bien défini, par exemple l'ITRF.
- Vitesses associées à des incertitudes (dont estimation n'est pas nécessairement triviale).
- L'interprétation géophysique nécessite de pouvoir changer de repère: par rapport à une plaque fixe par exemple.



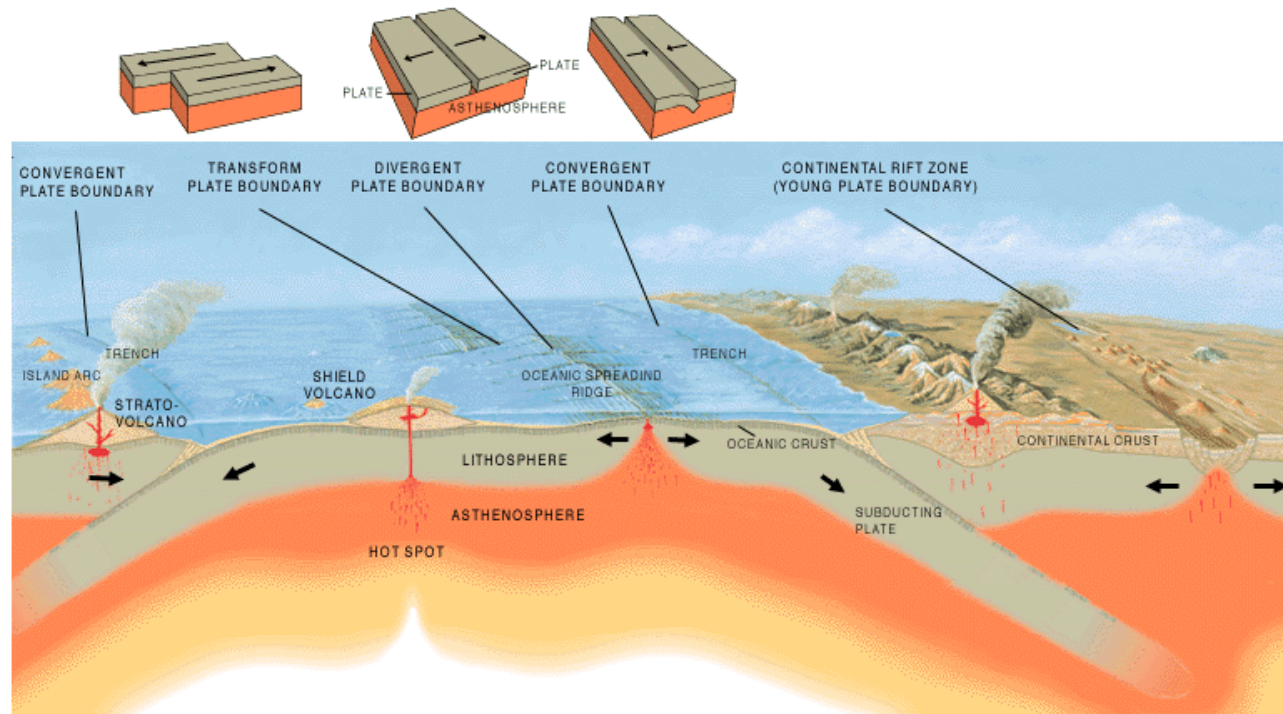


# La tectonique des plaques



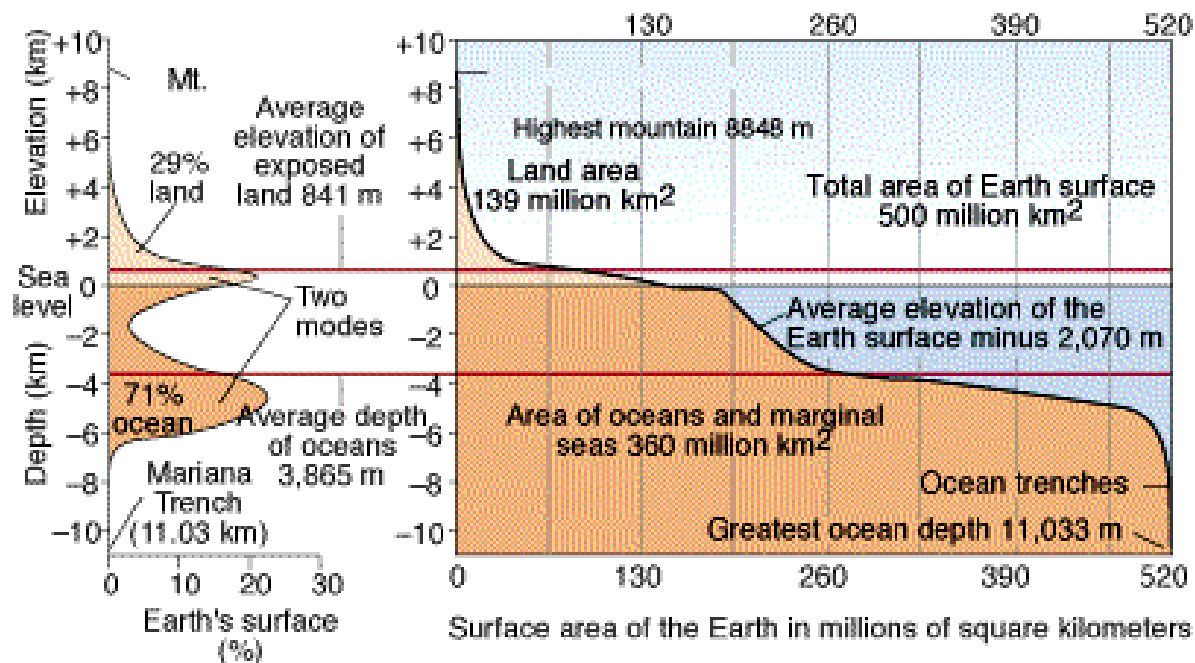
- La sismicité de la planète est structurée dans l'espace: les séismes sont concentrés dans des zones étroites, parfois le de marges continentales (Amérique du Sud), parfois au milieu des océans (Atlantique), parfois au travers des continents (Californie).
- On peut montrer que pour certaines les séismes indiquent des mouvements d'extension (divergence), ou de compression (convergence) ou horizontaux.
- Ces zones de sismicité délimitent les frontières entre des « plaques tectoniques », calottes sphériques rigides et ~asismiques de 100-150 km d'épaisseur.

# La tectonique des plaques



- Les plaques sont constituées par la pellicule superficielle de la Terre de comportement mécanique rigide = la lithosphère, une « couche limite thermo-mécanique » de 100-150 km d'épaisseur. Leurs frontières peuvent être:
  - Convergentes: subductions et collisions.
  - Divergentes: rides (ou dorsales) d'accrétion océanique et rift continentaux.
  - A mouvement horizontal: failles transformantes.
- Sous la lithosphère les roches du manteau se déforment de manière continue par fluage visqueux (à des vitesses de quelques cm/an).

# La tectonique des plaques



© 1998 Wadsworth Publishing Company/ITP

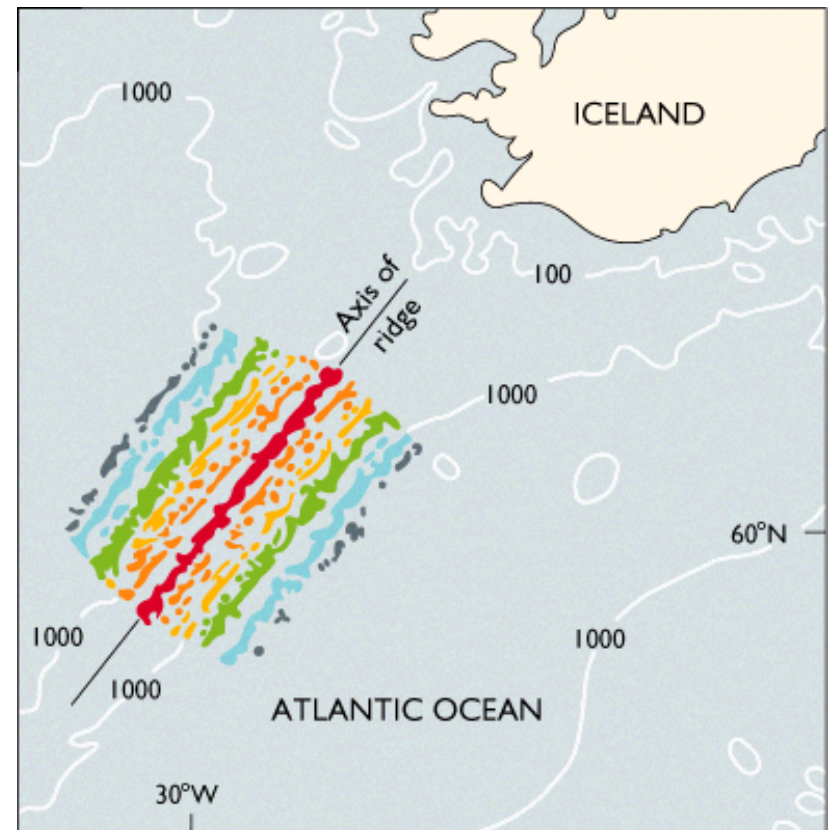
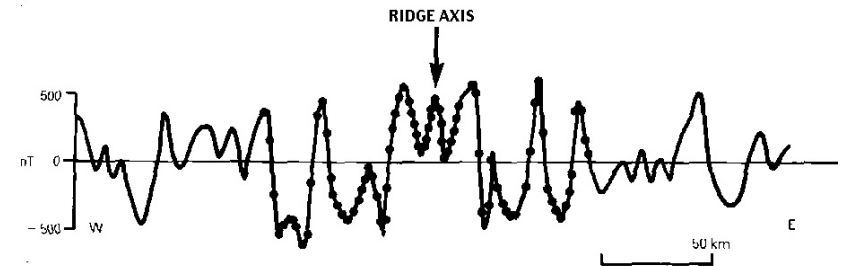


- La croûte océanique est composée de basaltes et gabbros, roches volcaniques/magmatiques denses.
- La croûte continentale est plus complexe mais pour l'essentiel composée de roches type granite, moins denses.
- De fait, la distribution des élévations sur la Terre est bimodale et la croûte terrestre est en équilibre lithostatique par rapport au manteau sous-jacent (= isotasie).



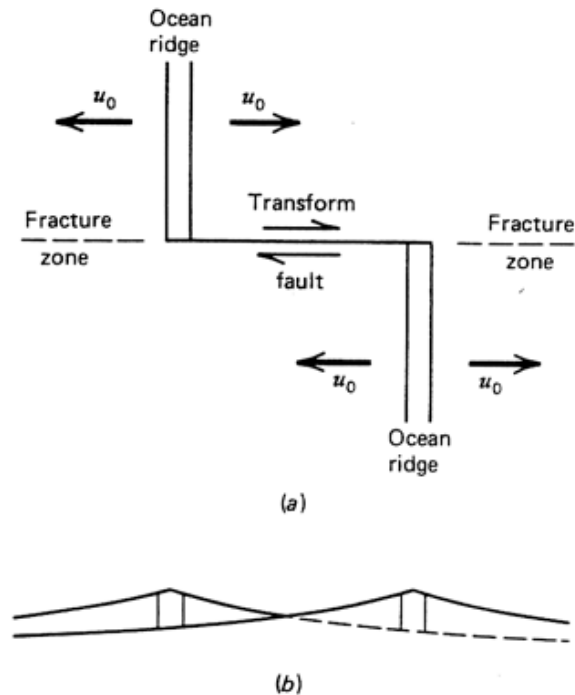
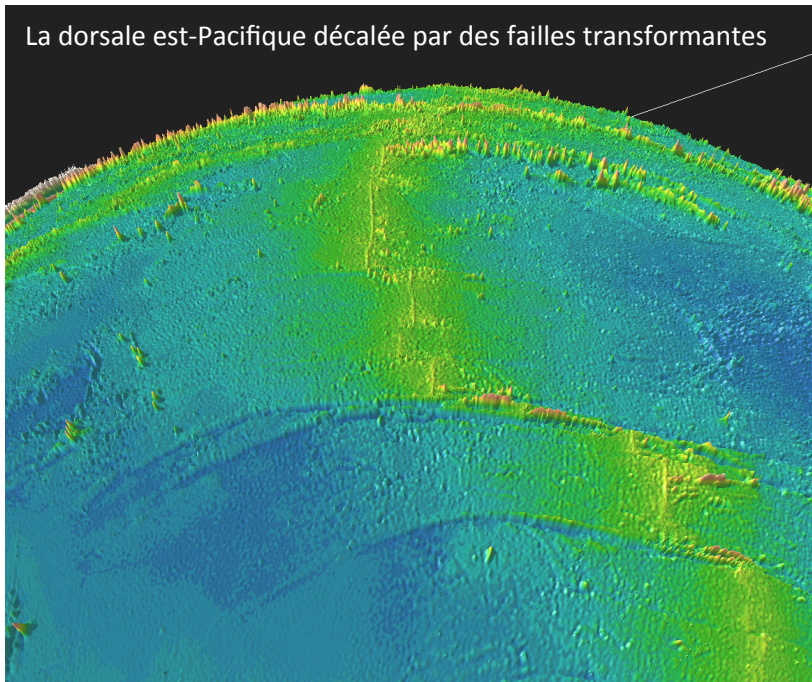
# La tectonique des plaques

- Les basaltes océaniques “fossilisent” le champ magnétique terrestre grâce à leurs minéraux ferro-magnétiques (magnétite).
- Le champ magnétique terrestre s’inverse régulièrement, ce qui donne une échelle chronologique que l’on peut dater à partir de laves sur les continents.
- On observe dans les océans des bandes d’anomalies magnétiques alternativement positives et négatives, parallèles aux rides d’accrétion (lieu de mise en place de la croûte océanique).
- La cartographie de ces anomalies magnétiques océaniques permet donc d’obtenir les “taux d’ouverture” aux rides d’accrétion, donc le module de la vitesse relative des plaques qu’elles séparent.
- Découverte de Vine and Matthew, 1963.





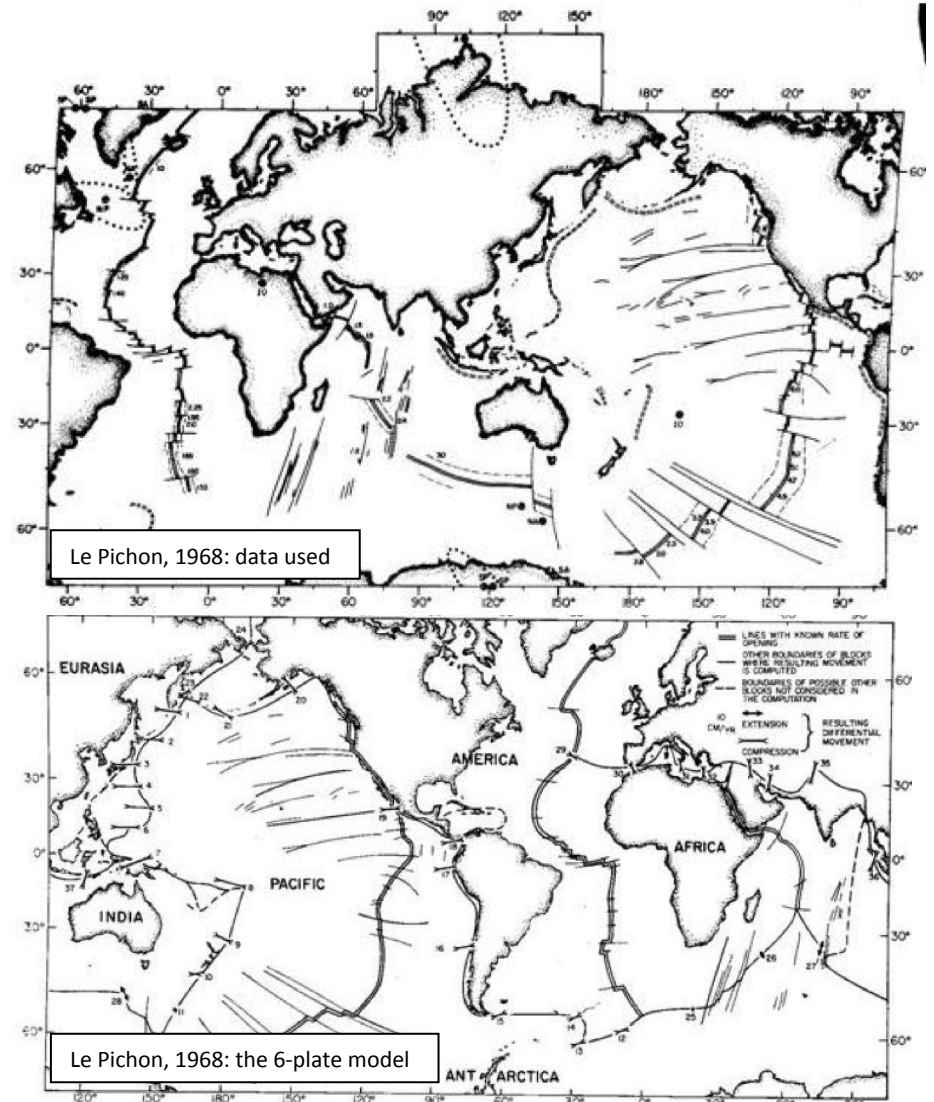
# La tectonique des plaques



- Les rides (ou dorsales) d'accrétion océaniques sont discontinues et séparées par des failles qui les décalent latéralement = les failles transformantes.
- La partie active des failles transformante donne la direction du mouvement relatif des plaques qu'elles séparent.
- Leur continuation au-delà des rides d'accrétion sont appelées « zones de fractures océaniques », elles donnent la direction des mouvements relatifs plus anciens.

# La cinématique des plaques en 1968

- Vers la fin des années 60 la plupart des concepts de la tectonique des plaques sont en place: accrétion océanique, anomalies magnétiques, failles transformantes, subduction.
- 1967: McKenzie and Parker (Nature) propose l'hypothèse de plaques rigides, en montrant qu'un fit d'une rotation à la faille de San Andreas permet de prédire les vecteurs glissement des séismes observés en Alaska, Kouriles, et Japon.
- 1968: Jason Morgan calcule une rotation angulaire pour 5 plaques sur la base de direction de failles transformantes et de la dernière anomalie magnétique identifiée dans l'Atlantique.
- 1968: Xavier Le Pichon calcule le premier modèle cinématique global à 6 plaques, basé sur l'anomalie magnétique 5 (10 Ma).
- De nombreux modèles suivront, basé sur des données de plus en plus nombreuses collectées dans les fonds océaniques.



**Figure 9-6**  
The locations of the boundaries of the six blocks used in the computations. The numbers next to the vectors of differential movement refer to Table 9-5. Note that the boundaries where the rate of shortening exceeds about 2 cm/yr account for most of the world earthquake activity

# La cinématique des plaques en 1990

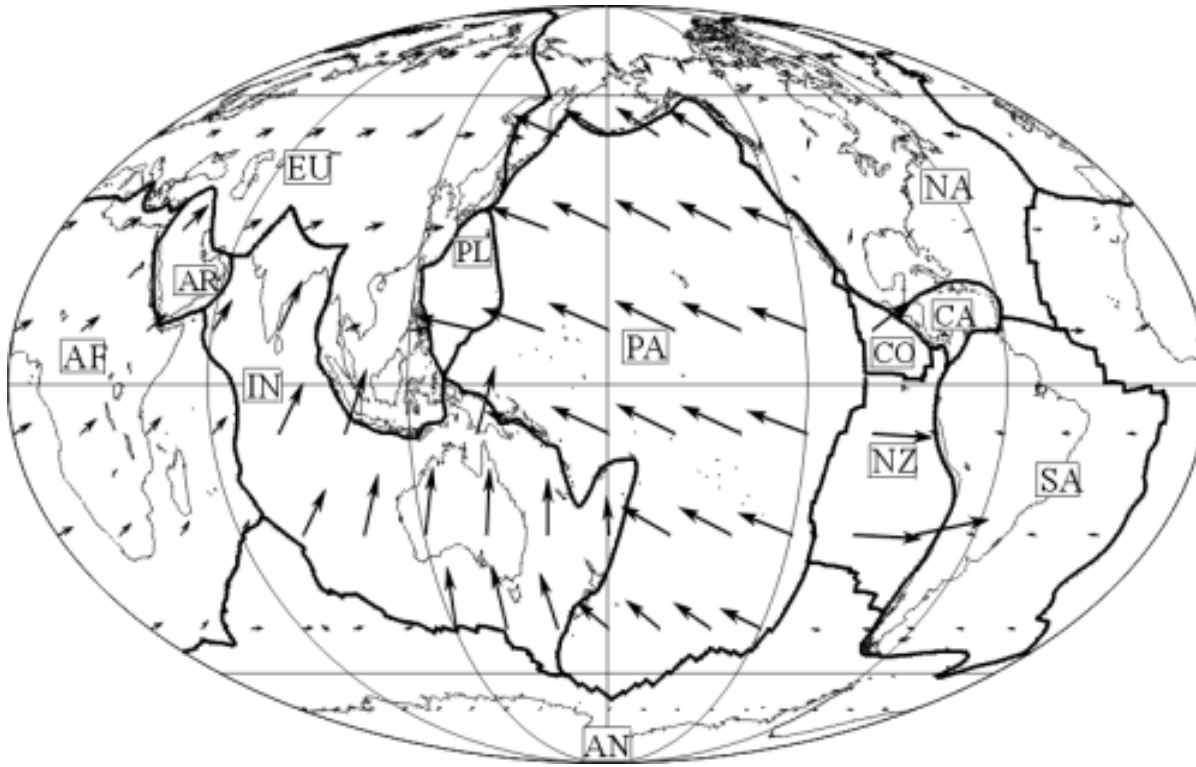


Plate	X	Y	Z
afrc	0.137567	-0.454871	0.795953
anta	0.039477	-0.374772	0.783577
arab	0.469539	-0.307163	0.958558
aust	0.535658	0.016272	0.931171
carb	0.076318	-0.471258	0.661824
coco	-0.510792	-1.515187	1.197195
aura	0.030309	-0.414535	0.751893
indi	0.468679	-0.275020	0.960277
nazc	-0.001261	-0.768737	1.121794
noam	0.101299	-0.483519	0.562473
soam	0.027044	-0.364115	0.521392
phil	0.664631	-0.687549	0.017189

NUVEL1A plate rotation vectors (w.r.t. Africa)

- De Mets et al. (1990, 1994) calculent un modèle à 12 plaques à partir d'une compilation alors inégalée de données océanographiques (direction de failles transformantes et cartographie de l'anomalie magnétique 2a = 3.16 Ma).
- Ce modèle cinématique, appelé NUVEL1 (1990) puis NUVEL1A (1994) deviendra le « standard » pour de nombreuses années et continue d'être utilisé.
- Il a été mis à jour en 2010 par les mêmes auteurs sous le nom de « MORVEL ».
- Comme toujours, ces modèles font les hypothèses d'un nombre limité de plaques rigides et que leur vitesse est constante sur 3 Ma.

# La cinématique des plaques en 1990

- Gordon compare le modèle « géologique » (3 Ma) Nuvel1 à des mesures géodésiques Satellite Laser Ranging (SLR, 10 ans).
- Il utilise des paires de sites SLR sur des plaques différentes, calcule les taux de variations des distances intersites (= lignes de base) à partir de SLR et les compares aux taux de variations prédits par le modèle géologique Nuvel1.
- Il observe un excellent accord => le mouvement des plaques est constant sur qqs Ma.
- Cela valide le modèle géologique... et le modèle géodésique.

## Plate Motions Are Steady

Richard G. Gordon Geophysics News, 1990

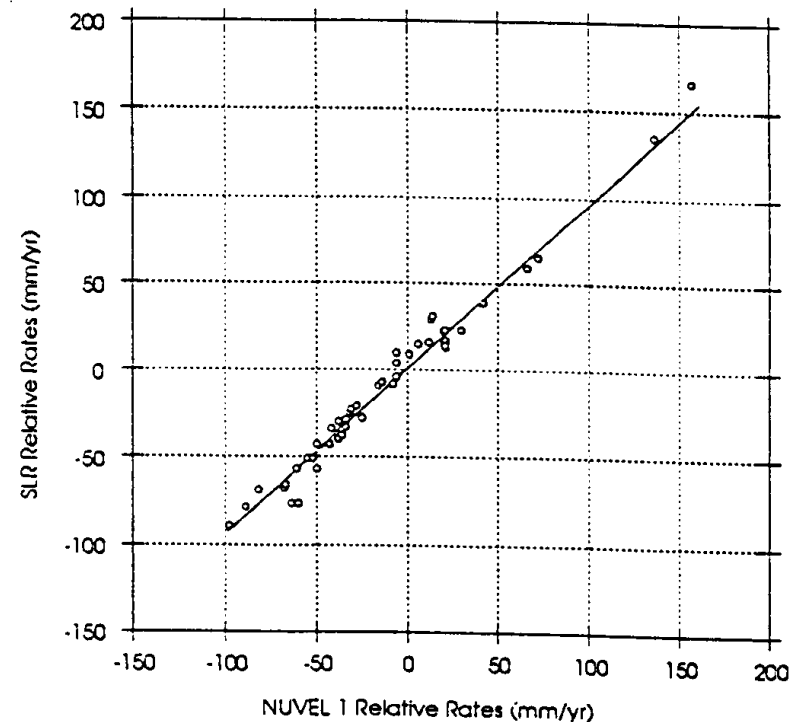
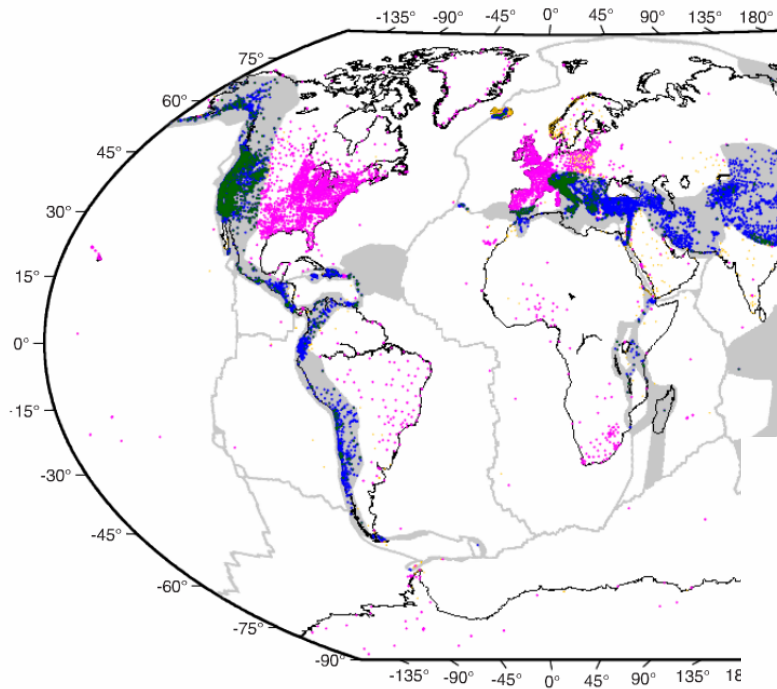


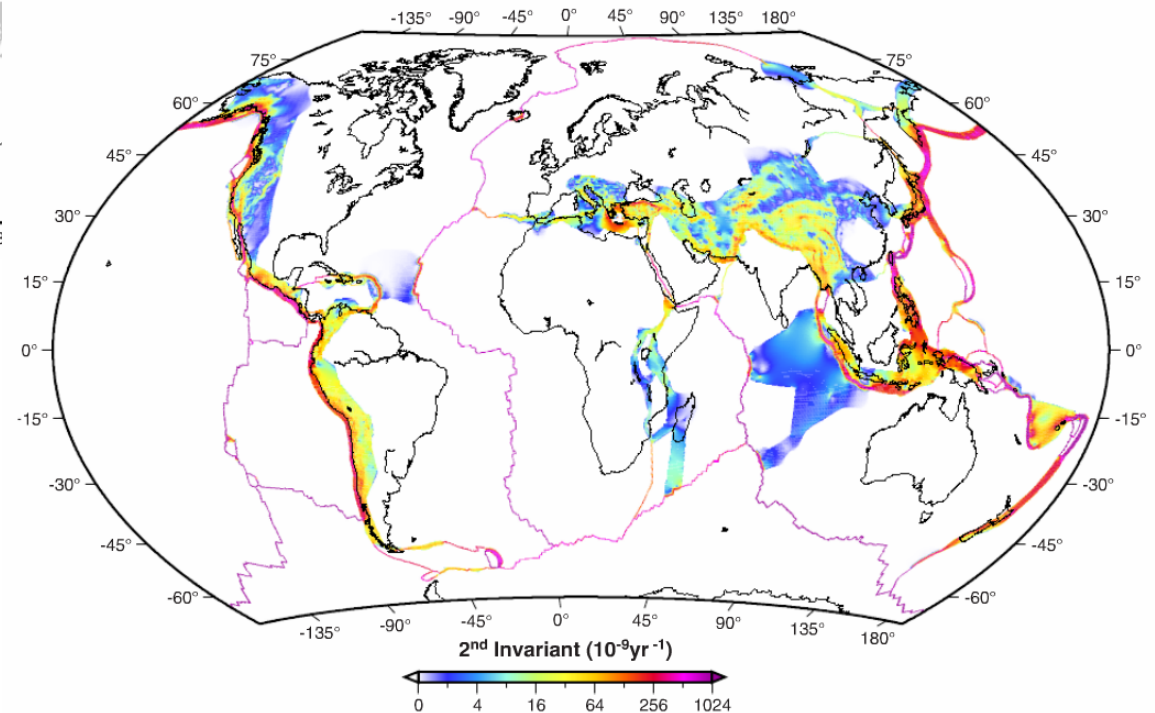
Fig. 11. Comparison of SLR determined geodesic rates with those implied by the NUVEL 1 geologic plate motion model for 54 lines connecting stations on five plates that are well within plate interiors and crossing at least one plate boundary. The slope of the line is  $0.949 \pm 0.019$ .

# La cinématique des plaques en 2015



La dernière décennie a vu une rapide croissance des données de géodésie spatiale, pour des fins pas nécessairement géophysiques ou géodésiques.

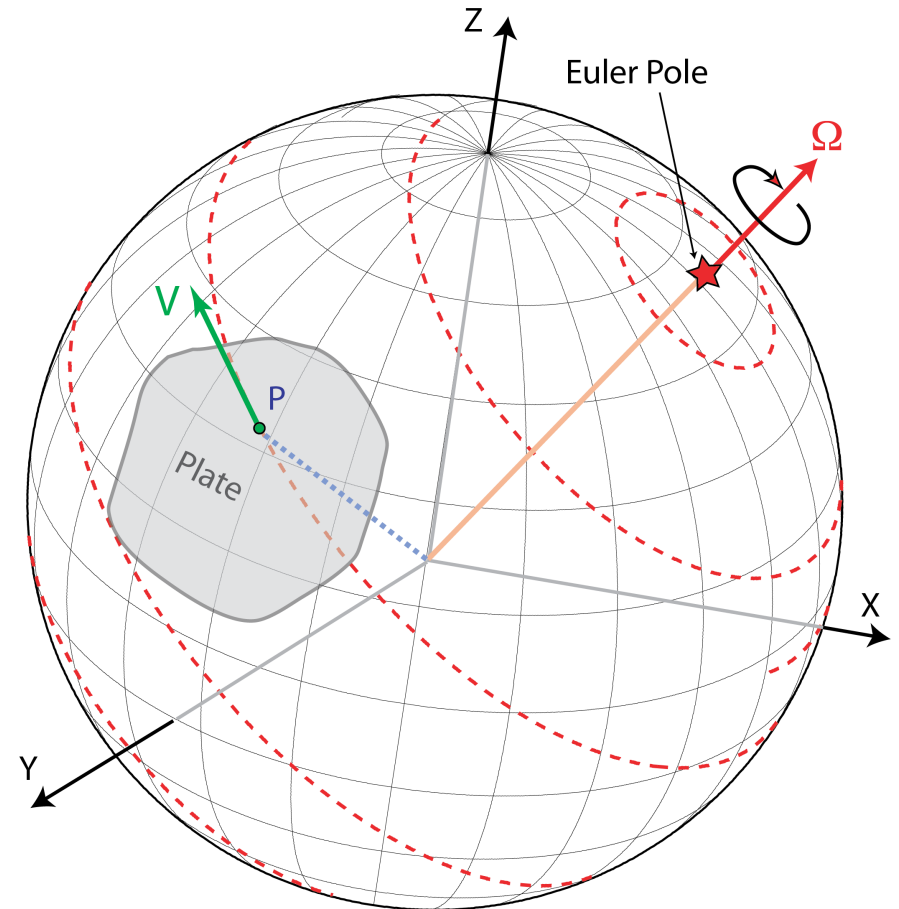
Les données GPS sur l'ensemble de la planète permet maintenant de déterminer à la fois (1) la cinématique des plaques et (2) les déformations intraplaques, par exemple en Asie ou ouest des USA.



# Cinématique sur la sphère

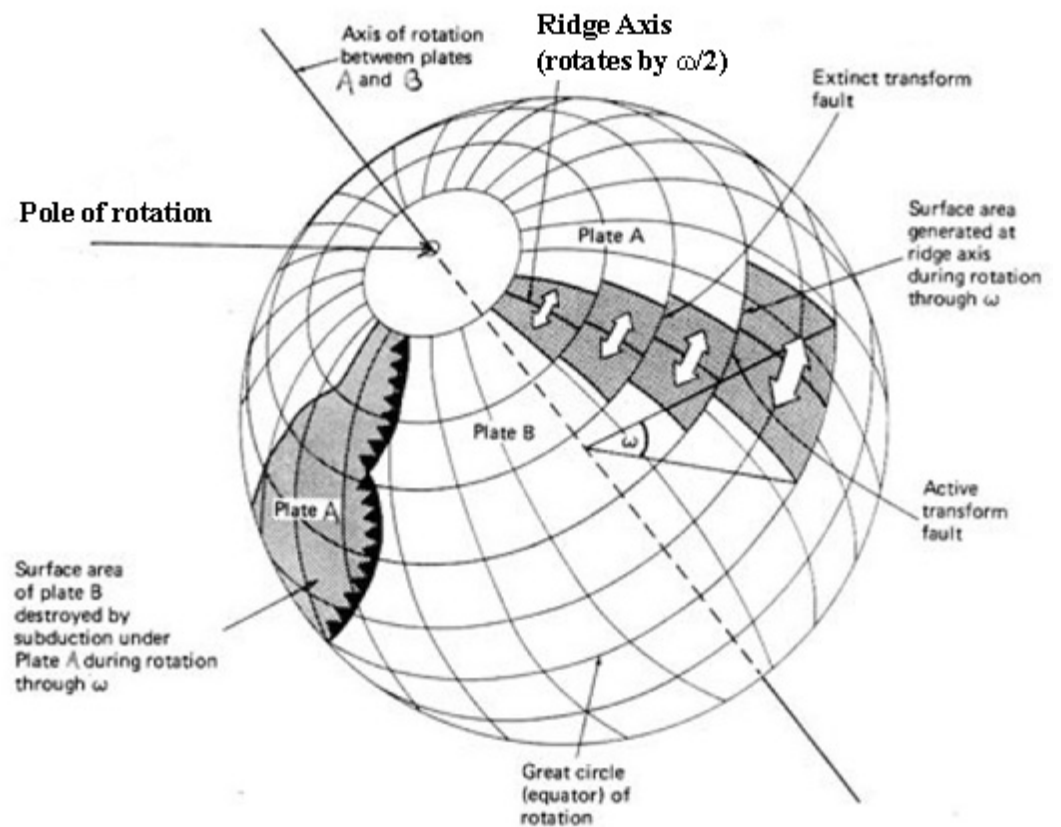
- Les déplacements des plaques (= calottes rigides) sur une sphère sont décrits par une rotation autour d'un axe avec un taux de rotation angulaire donné.
- On représente cette rotation par un vecteur rotation  $\Omega(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$  exprimé dans un repère cartésien géocentrique dont la norme est égale au taux de rotation angulaire.
- Une représentation équivalente est:
  - le point où le vecteur rotation perce la sphère = le pôle de rotation (latitude  $\lambda$ , longitude  $\varphi$ ), aussi appelé pôle eulérien.
  - une vitesse de rotation angulaire ( $a$ , généralement en degrés/Ma).
- Le passage des coordonnées sphériques aux géocentriques (et vice versa est donnée par:

$$\begin{aligned}
 \omega_x &= a \cos(\lambda) \cos(\varphi) \\
 \omega_y &= a \cos(\lambda) \sin(\varphi) \\
 \omega_z &= a \sin(\lambda)
 \end{aligned}
 \quad \longleftrightarrow \quad
 \begin{aligned}
 \lambda &= \tan^{-1} \left( \frac{\omega_z}{\sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2}} \right) \\
 \varphi &= \tan^{-1} \left( \frac{\omega_y}{\omega_x} \right) \\
 a &= \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}
 \end{aligned}$$



# Cinématique sur la sphère

- Les indicateurs cinématiques géologiques, qui donnent les mouvements relatifs de plaques partageant une frontière, sont:
  - Les directions des failles transformantes = petits cercles centrés sur le pôle de rotation relatif des deux plaques
  - Les taux de mouvement relatif des deux plaques déduits des anomalies magnétiques figées dans les basaltes océaniques.
- On utilise le fait que:
  - Connaissant plusieurs directions de failles transformantes, le pôle se trouve sur le grand cercle qui leur est perpendiculaire
  - Les anomalies magnétiques (= isochrones) permettent de déterminer le taux de rotation.
- On peut aussi utiliser les vecteurs glissement des séismes (mais plus incertain).





# Cinématique sur la sphère

- During a time interval  $t$ ,  $P$  travels an angle  $\omega t$ , which corresponds to a distance:

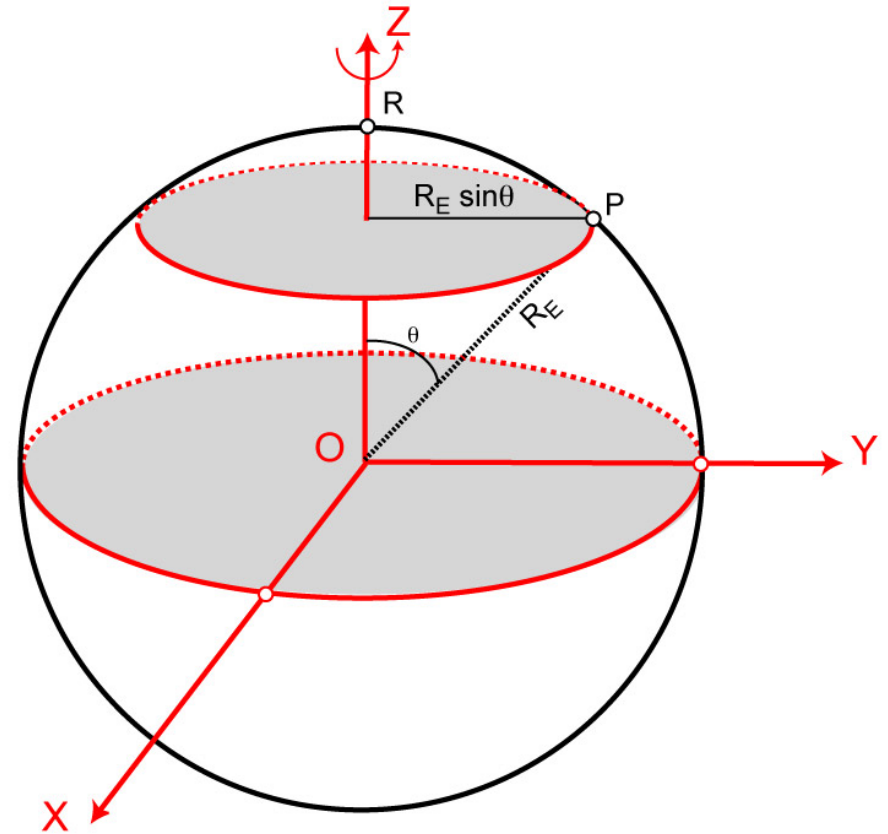
$$d = \omega_{rad} t r$$

where  $r$  is the radius of the (small) circle perpendicular to the axis of rotation.

- Since:  $\sin\theta = \frac{r}{R_E}$
- one gets:  $d = \omega_{rad} t R_E \sin\theta$
- and the velocity at  $P$  is:  $v = \frac{d}{t} = \omega_{rad / yr} R_E \sin\theta$
- The velocity is obviously maximum when  $\theta = \pi/2$  (i.e. at the "equator" to the rotation pole  $R$ ), therefore:

$$v_{max} = \omega_{rad / yr} R_E$$

- and the velocity at  $P$  becomes:  $v = v_{max} \sin\theta$
- The velocity at  $P$  is a vector tangent to a small circle perpendicular to  $(O,z)$  and its direction is obviously perpendicular to the great circle passing through  $R$  and  $P$ .



(O,x,y,z) orthogonal geocentric coordinate system.  
 Plate rotation axis coincides with (O,z) coordinate axis.  
 Angular velocity of the plate is  $\omega$ .  
 Point  $R$  is the rotation pole of the plate.  
 Point  $P$  is located at angle  $\theta$  to the rotation pole.  
 $R_E$  is mean Earth radius = 6,378,137 m.



# Cinématique sur la sphère

- Since by definition the cross-product of 2 unit vectors is the sine of the angle between them, one can write:

$$\sin\theta = \vec{\omega}_U \times \vec{P}_U$$

- With  $\omega_u$  and  $P_u =$  unit vectors in the (O,z) and (O,P) directions, respectively. The expression for the velocity vector becomes:

$$\vec{v} = \omega R_E \vec{\omega}_U \times \vec{P}_U = R_E (\omega \vec{\omega}_U \times \vec{P}_U) = R_E (\vec{\omega}_{rad/yr} \times \vec{P}_U)$$

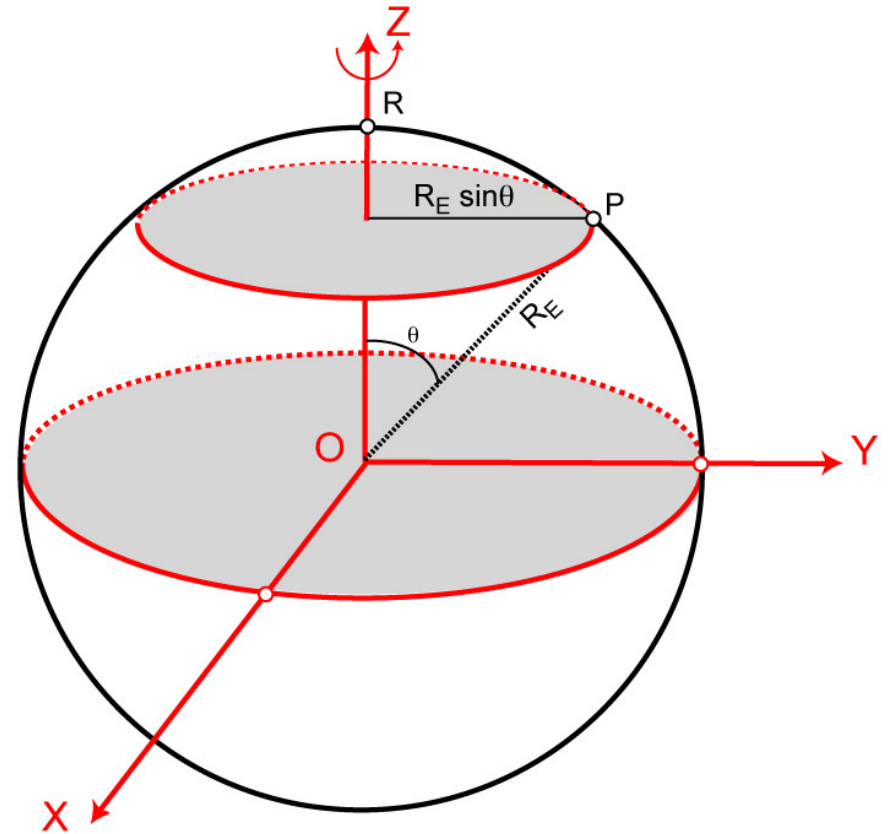
- Since angular velocities are usually given in degree per My, one can write:

$$\vec{v} = R_E \frac{\pi}{180} 10^{-6} (\vec{\omega}_{deg/Myr} \times \vec{P}_U)$$

- Or:

$$\vec{V} = R \frac{\pi}{180} 10^{-6} \begin{pmatrix} Z\omega_y - Y\omega_z \\ X\omega_z - Z\omega_x \\ Y\omega_x - X\omega_y \end{pmatrix}$$

- Velocity is a vector, with 3 components  $v_x, v_y, v_z$  in the geocentric coordinate system defined above, in units of m/year.



(O,x,y,z) orthogonal geocentric coordinate system.  
 Plate rotation axis coincides with (O,z) coordinate axis.  
 Angular velocity of the plate is  $\omega$ .  
 Point R is the rotation pole of the plate.  
 Point P is located at angle  $\theta$  to the rotation pole.  
 $R_E$  is mean Earth radius = 6,378,137 m.

# Cinématique sur la sphère

- On est généralement intéressé par les vitesses horizontales et verticales dans un repère orthogonal NEU dont l'origine est le point considéré (= topocentrique, local).
- La conversion du repère géocentrique au topocentrique est la combinaison des 3 rotations nécessaires à aligner ces repères:

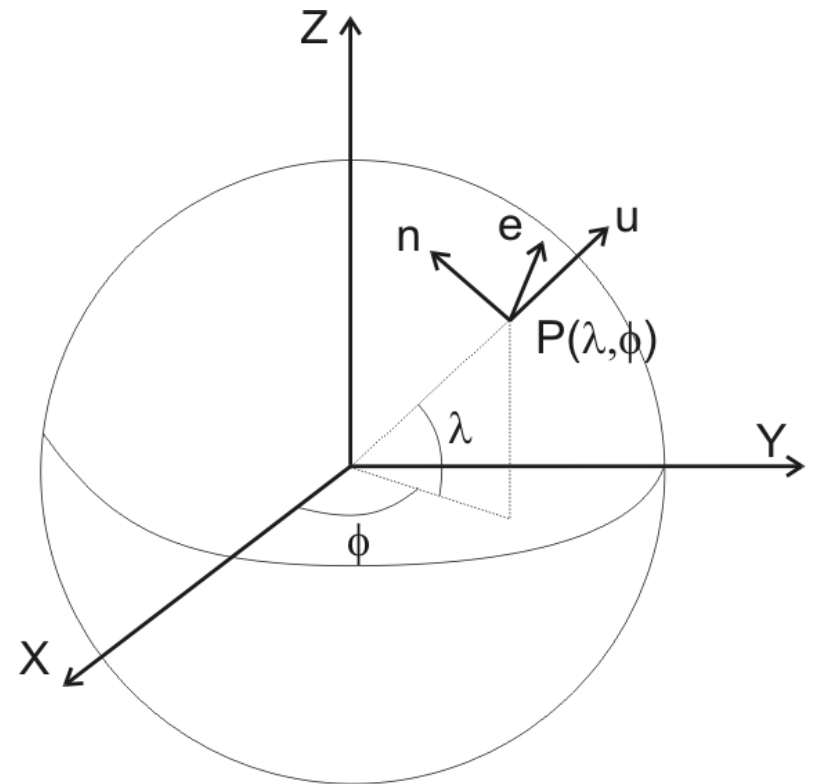
$$\vec{L} = R\vec{V}$$

$$\text{with } R = \begin{bmatrix} -\sin \lambda \cos \varphi & -\sin \lambda \sin \varphi & \cos \lambda \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ \cos \lambda \cos \varphi & \cos \lambda \sin \varphi & \sin \lambda \end{bmatrix}$$

- La matrice inverse permet de passer de topocentrique à géocentrique – puisque R est une matrice rotation, son inverse est aussi sa transposée, donc:

$$R^{-1} = R^t$$

$$\vec{V} = R^t \vec{L}$$



Valide au point  $(\lambda, \phi, h)$

$L(\text{North, East, Up})$  = vitesses dans le repère local  
 $V(V_x, V_y, V_z)$  = vitesses dans le repère géocentrique

# Cinématique: problème inverse

- On va utiliser le fait que les vitesses horizontales géodésiques sont tangentes aux petits cercles centrés sur le pôle de rotation = perpendiculaires à un grand cercle passant par ce pôle.

- Dans un repère géocentrique on a vu que:

$$\vec{V} = R \frac{\pi}{180} 10^{-6} \begin{pmatrix} Z\omega_y - Y\omega_z \\ X\omega_z - Z\omega_x \\ Y\omega_x - X\omega_y \end{pmatrix}$$

- On peut l'écrire sous forme matricielle comme:

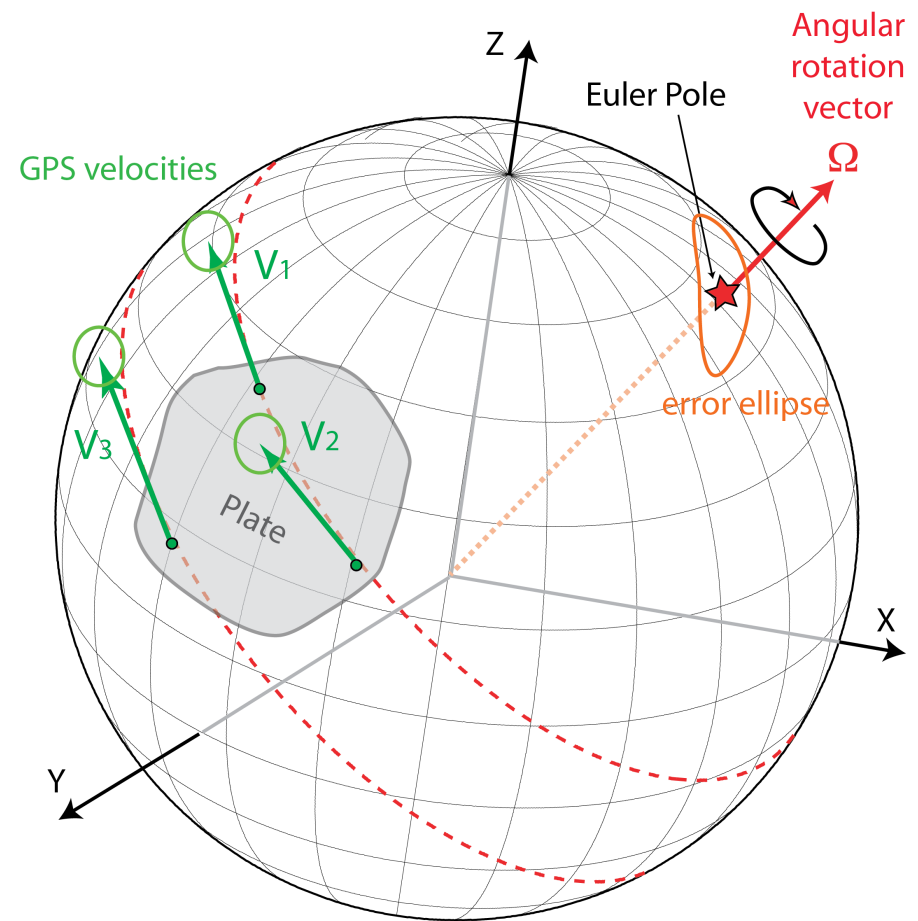
$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & Z & -Y \\ -Z & 0 & X \\ Y & -X & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

or

$$V = A\Omega$$

- Si on dispose de n (n >= 2) mesures de vitesse sur une plaque donnée, on peut alors estimer  $\Omega$  étant donné  $V_{i=1,\dots,n}$  en minimisant l'écart du modèles aux données (les résidus):

$$\sum_{i=1}^n \|\Omega \times P_i - V_i\|$$



# Cinématique: problème inverse

- On utilise classiquement la norme L2 qui permet une inversion rapide et permet d'effectuer des tests statistiques sur l'estimation.

- Pour  $n$  vitesses, on écrit le système linéaire:

$$V = A\Omega, \quad C_V \quad V = \begin{bmatrix} V_1 \\ \dots \\ V_n \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} A_1 \\ \dots \\ A_n \end{bmatrix}$$

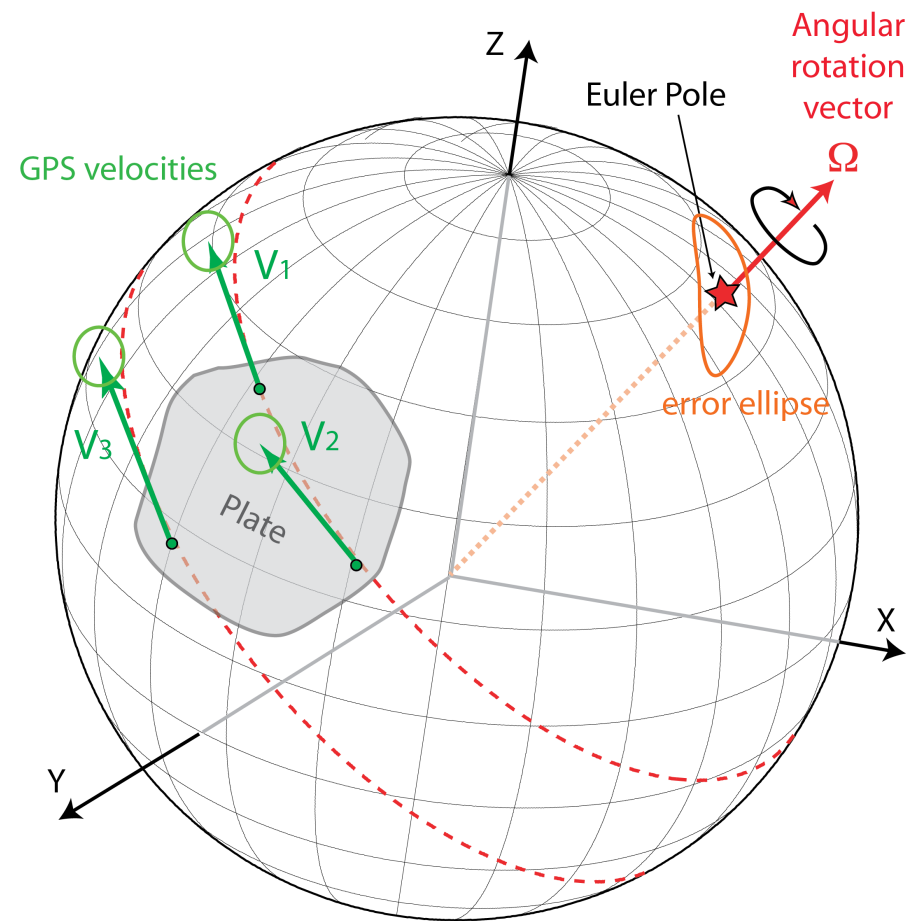
(où  $C_V$  est la matrice de covariance des données)

- Sa solution des moindres carrés est:

$$\Omega = (A^T C_V^{-1} A)^{-1} A^T C_V^{-1} V$$

- Avec la matrice de covariance des inconnues (composantes du vecteur rotation angulaire de la plaque):

$$C_\Omega = (A^T C_V^{-1} A)^{-1}$$

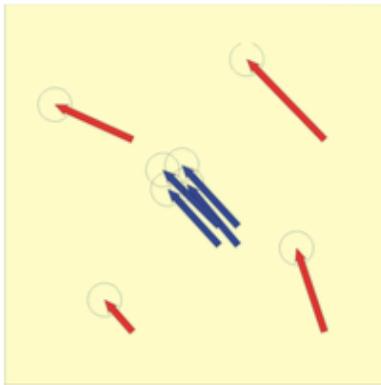


# Cinématique: problème inverse

- Puisque:  $C_{\Omega} = (A^T C_V^{-1} A)^{-1}$

la précision de la détermination d'un vecteur rotation angulaire est donc fonction de:

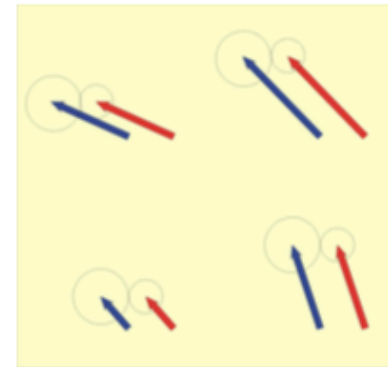
## Influence de la géométrie



- Cas réel : 2 sites dans le Sahara permettraient d'améliorer l'incertitude sur la cinématique de la plaque Nubie de 20%

/

## précision des données



- La précision de la détermination des vitesses se transmet directement à la précision du pôle

# Cinématique: problème inverse

- On représente classiquement le résultat sous la forme d'un pôle de rotation (= lieu  $(\lambda, \phi)$  où le vecteur rotation angulaire perce la surface terrestre) et de la vitesse angulaire ( $a$ , deg/Ma).
- La conversion  $(\omega_x, \omega_y, \omega_z) \rightarrow (\lambda, \phi, a)$  est triviale
- On propage la covariance du repère géocentrique au repère local centré sur le pôle de rotation en utilisant la matrice de passage cartésien/local suivante:

$$R = \begin{bmatrix} -\sin \lambda \cos \varphi & -\sin \lambda \sin \varphi & \cos \lambda \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ \cos \lambda \cos \varphi & \cos \lambda \sin \varphi & \sin \lambda \end{bmatrix}$$

pour propager la matrice de covariance dans ce repère:

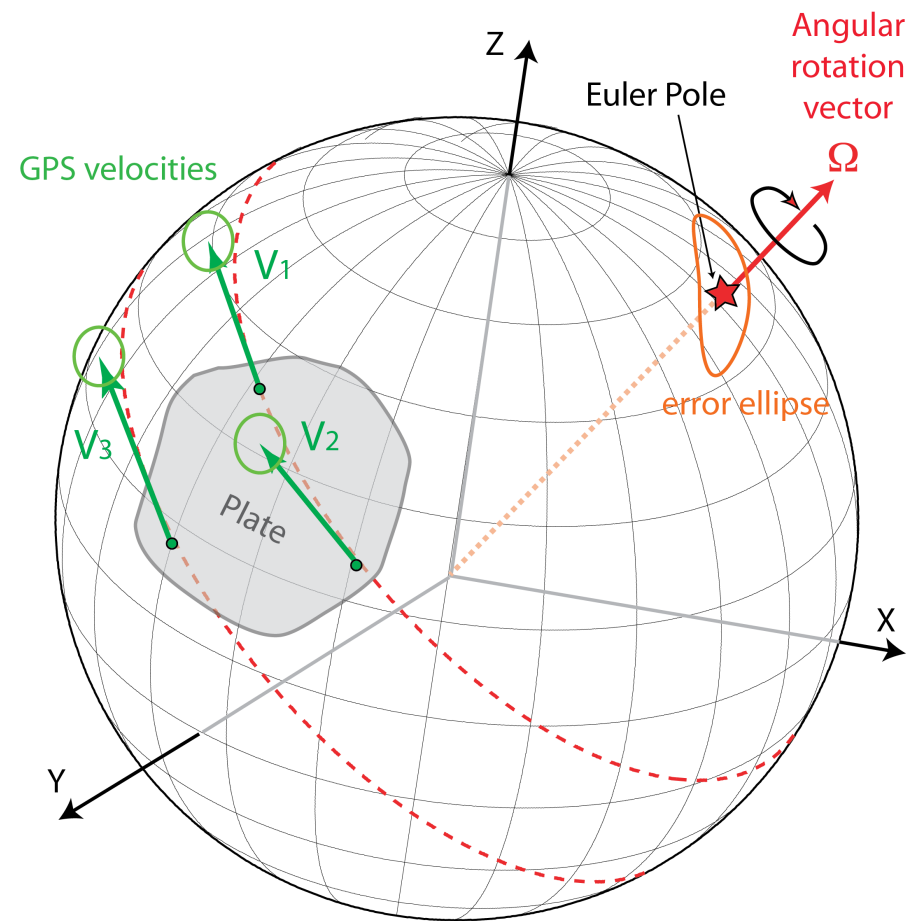
$$C_{\Omega}^{local} = R C_{\Omega}^{geo} R^T$$

- La sous-matrice 2x2 de  $C^{local}$  contient l'incertitude sur la position du pôle de rotation, représentée classiquement par une ellipse d'erreur:

$$\gamma = 2 \tan^{-1}(2c_{1,2} / (c_{1,1} - c_{2,2}))$$

$$a = \frac{1}{2}(c_{1,1} + c_{2,2} + \sqrt{(c_{1,1} - c_{2,2})^2 + 4c_{1,2}^2})$$

$$b = \frac{1}{2}(c_{1,1} + c_{2,2} - \sqrt{(c_{1,1} - c_{2,2})^2 + 4c_{1,2}^2})$$



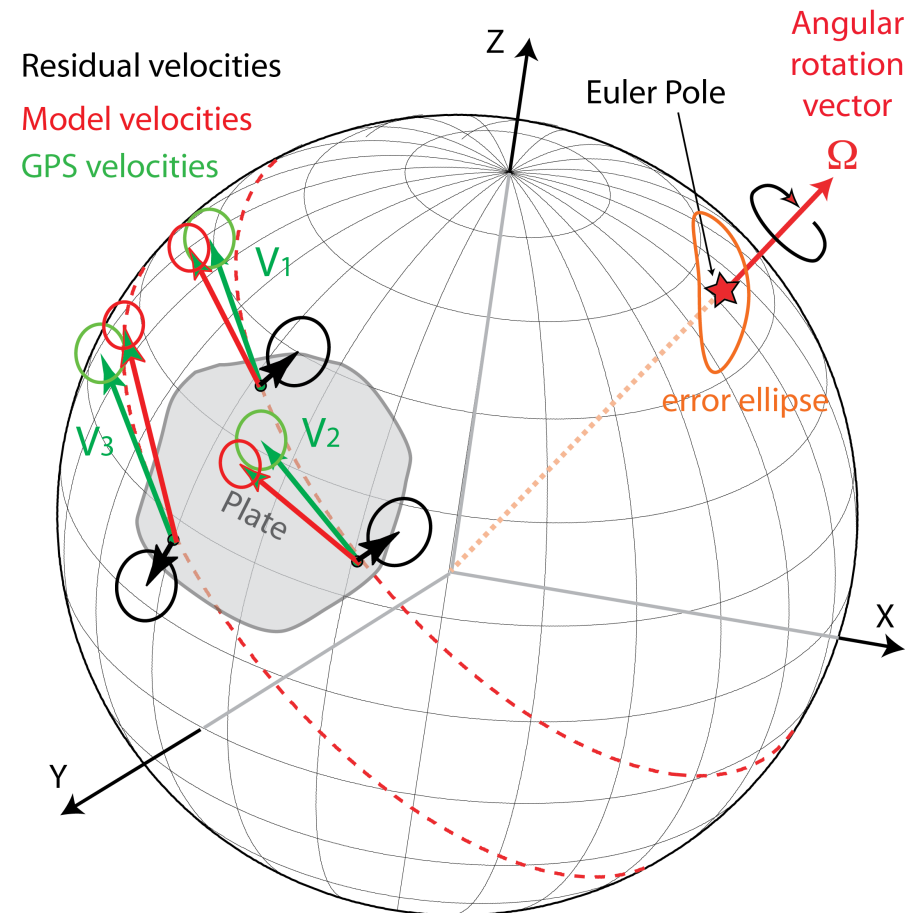
# Représentation de l'estimation

- Une représentation usuelle est d'indiquer la localisation  $(\lambda, \phi)$  où le vecteur taux de rotation perce la surface terrestre et la vitesse angulaire en degrés/Ma.
- Cette représentation est pratique car les vitesses cohérentes avec un pôle d'Euler doivent « tourner » autour de ce pôle et croître en norme avec le sinus de la distance angulaire entre le point et le pôle.
- Cela permet aussi de représenter certains éléments de la matrice variance-covariance du pôle.
- On dispose de résidus et des incertitudes associées.
- Les résidus par rapport à l'estimation d'une plaque rigide s'écrivent:

$$u_{EN} = v_{EN} - R^T A^T \Omega$$

- La loi de propagation de la variance donne la matrice de covariance de ces résidus:

$$C_{U,EN} = C_{EN} + (RA)C_{\Omega}(RA)^T$$



# Les ellipses de confiance

- Pour une matrice de covariance des résidus:

$$C_{U,EN} = \begin{bmatrix} \sigma_n^2 & \sigma_{ne} \\ \sigma_{en} & \sigma_e^2 \end{bmatrix}$$

- Symétrique => il existe un système de coordonnées  $(x', y')$  où les variances sont maximale/minimale => rotation d'angle  $\phi$ :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \phi & \cos \phi \\ -\cos \phi & \sin \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ e \end{bmatrix} \Leftrightarrow X' = RX$$

- La loi de propagation des variances donne la matrice de covariance dans le repère  $(x', y')$ :

$$C_{X'} = RC_X R^T$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_{x'}^2 = \sigma_x^2 \sin^2 \phi + 2\sigma_{xy} \sin \phi \cos \phi + \sigma_y^2 \cos^2 \phi \\ \sigma_{y'}^2 = \sigma_x^2 \cos^2 \phi + 2\sigma_{xy} \sin \phi \cos \phi + \sigma_y^2 \sin^2 \phi \end{cases}$$

- Minimiser  $\sigma_x$  et  $\sigma_y$  revient à chercher:

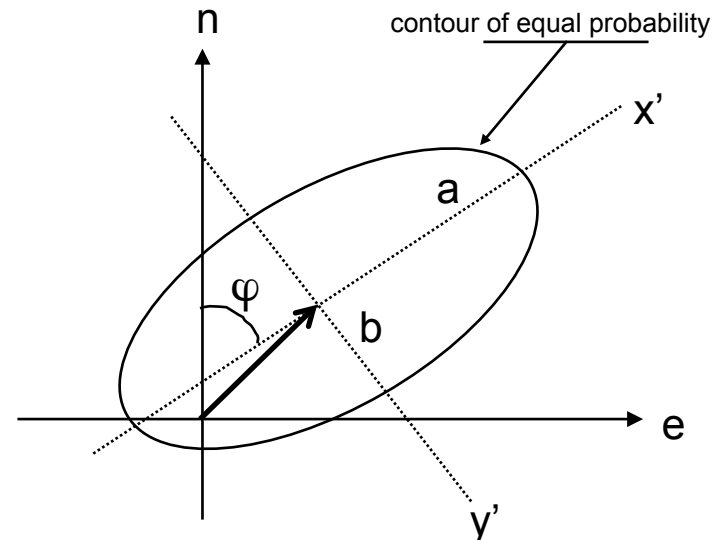
$$\frac{d(\sigma_{x'}^2)}{d\phi} = 0$$

$$\Rightarrow 2\sigma_x^2 \sin \phi \cos \phi - 2\sigma_y^2 \sin \phi \cos \phi - 2\sigma_{xy}^2 \sin^2 \phi + 2\sigma_{xy}^2 \cos^2 \phi = 0$$

$$\Rightarrow 2 \sin \phi \cos \phi [\sigma_x^2 - \sigma_y^2] + 2\sigma_{xy}^2 (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) = 0$$

$$\Rightarrow \sin(2\phi) [\sigma_x^2 - \sigma_y^2] + 2\sigma_{xy}^2 \cos(2\phi) = 0$$

$$\Rightarrow \phi = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( \frac{-2\sigma_{xy}}{\sigma_x^2 - \sigma_y^2} \right)$$





# Les ellipses de confiance

- On a donc l'orientation du nouveau système de coordonnées  $\phi$  et les valeurs de  $\sigma_{x'}$  and  $\sigma_{y'}$ :

$$\phi = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( \frac{-2\sigma_{xy}}{\sigma_x^2 - \sigma_y^2} \right)$$

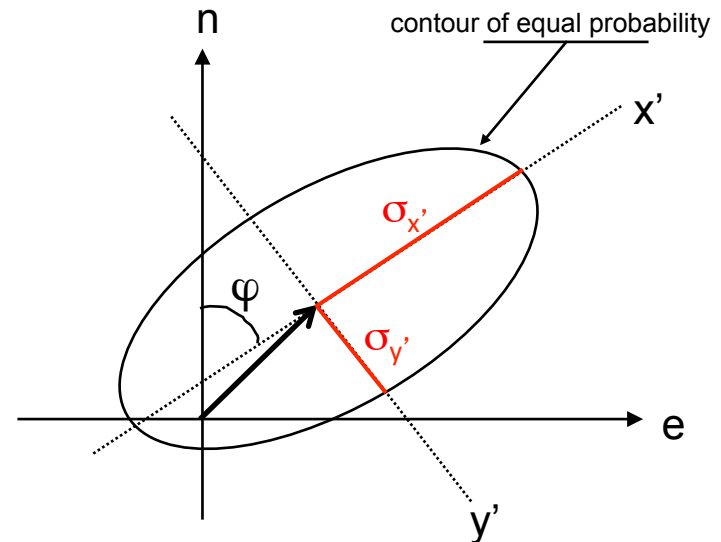
$$\text{and } \begin{cases} \sigma_{x'}^2 = \sigma_x^2 \sin^2 \phi + 2\sigma_{xy} \sin \phi \cos \phi + \sigma_y^2 \cos^2 \phi \\ \sigma_{y'}^2 = \sigma_x^2 \cos^2 \phi + 2\sigma_{xy} \sin \phi \cos \phi + \sigma_y^2 \sin^2 \phi \end{cases}$$

- On substitue  $\phi$  dans équations ci-dessus pour écrire  $\sigma_{x'}$  et  $\sigma_{y'}$  sous la forme:

$$\left. \begin{matrix} \sigma_{x'}^2 \\ \sigma_{y'}^2 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \left[ \sigma_x^2 + \sigma_y^2 \pm \sqrt{(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)^2 - 4(\sigma_x^2 \sigma_y^2 - \sigma_{xy}^2)} \right]$$

- On a alors l'équation de l'ellipse standard dont le demi-grand axe est  $\sigma_{x'}$  et le demi-petit axe  $\sigma_{y'}$  :

$$\frac{x'^2}{\sigma_{x'}^2} + \frac{y'^2}{\sigma_{y'}^2} = 1$$



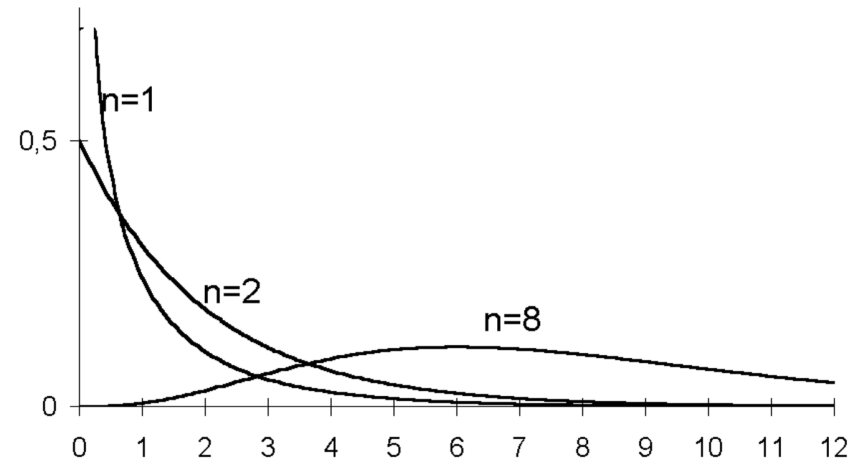
Error ellipse standard  
 = ses axes sont  $\sigma_{x'}$  and  $\sigma_{y'}$   
 (axes = vecteurs propres de  $C_X$ )

# Les ellipses de confiance

- On considère qu'un résidu est significatif lorsqu'il « sort » de son ellipse d'erreur, pour un niveau de confiance (1-risque) donné.

$$P\left(\frac{x'^2}{\sigma_{x'}} + \frac{y'^2}{\sigma_{y'}} \leq c^2\right)$$

- La loi du  $\chi^2$  nous donne la probabilité associée à une valeur donnée de  $c^2$
- On se place dans le cas deux degrés de liberté (planimétrie)
- L'ellipse standard ( $1\sigma$ ) > l'ellipse détermine un intervalle de confiance de 39%.
- En géophysique on utilise une probabilité de 95% => on cherche donc la valeur de la loi du  $\chi^2$  correspondant à une probabilité que le  $\chi^2 < 0.95$
- $c^2_{\alpha} = 1$  = Pour avoir un intervalle de confiance de 95% =>  $c^2_{\alpha} = 5.991$
- Pour 95% de confiance il faut multiplier les axes de l'ellipse standard par  $\sqrt{5.991} = 2.45$



$c$	$K_2(c^2)$
$1\sigma$	0.3935
$2\sigma$	0.8647
$3\sigma$	0.9889

$K_2(c^2)$	$c$
0.90	2.146
0.95	2.448
0.99	3.035

# Les ellipses de confiance

- Matrice de covariance:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

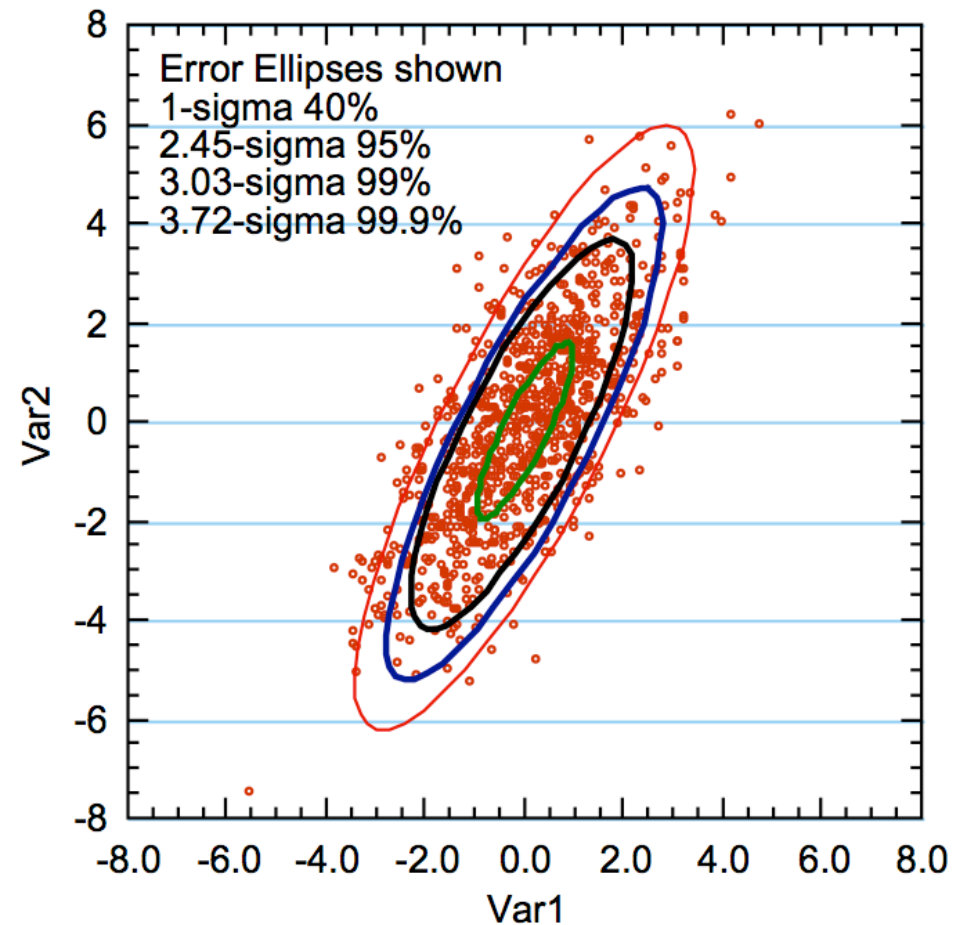
- Valeurs propres:

$$\lambda_1 = 0.87$$

$$\lambda_2 = 3.66$$

- Angle:

$$\varphi = 63$$



# Qualité de l'estimation

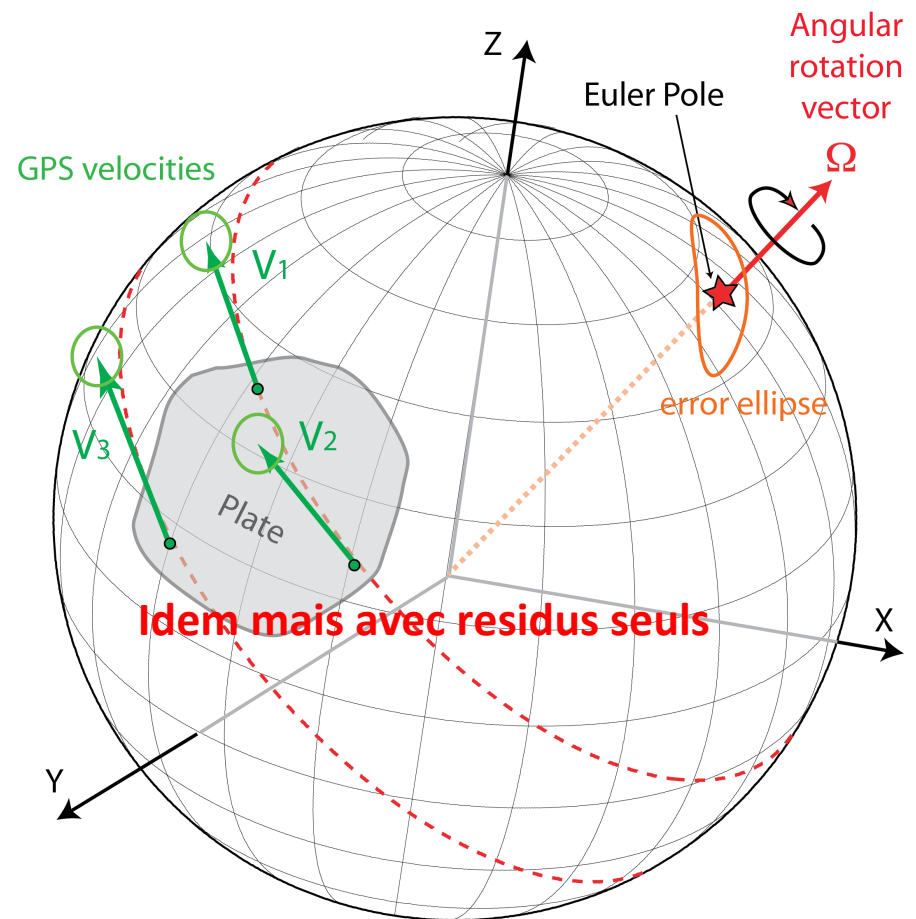
- Un indicateur du niveau de rigidité (= non déformation) d'un bloc est le wrms des vitesses résiduelles :

$$WRMS = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \left( \frac{u_{ei}^2}{\sigma_{ei}^2} + \frac{u_{ni}^2}{\sigma_{ni}^2} \right)}{\sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{\sigma_{ei}^2} + \frac{1}{\sigma_{ni}^2} \right)}}$$

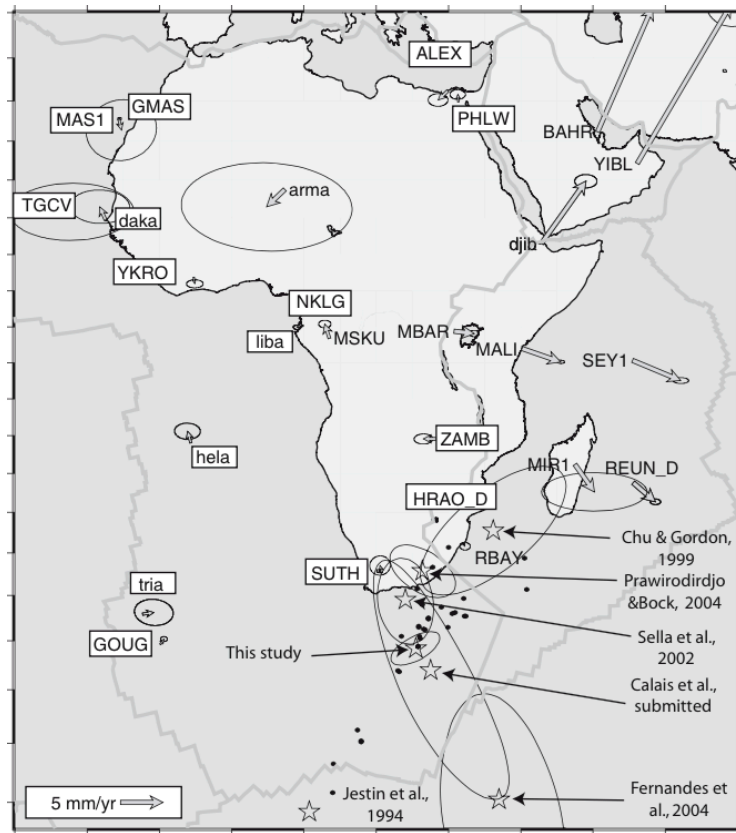
- Une autre quantité importante est le facteur de variance a posteriori

$$\hat{\sigma}_o = \frac{U_{EN}^T C^{-1} U_{EN}}{N - p} = \chi_r^r$$

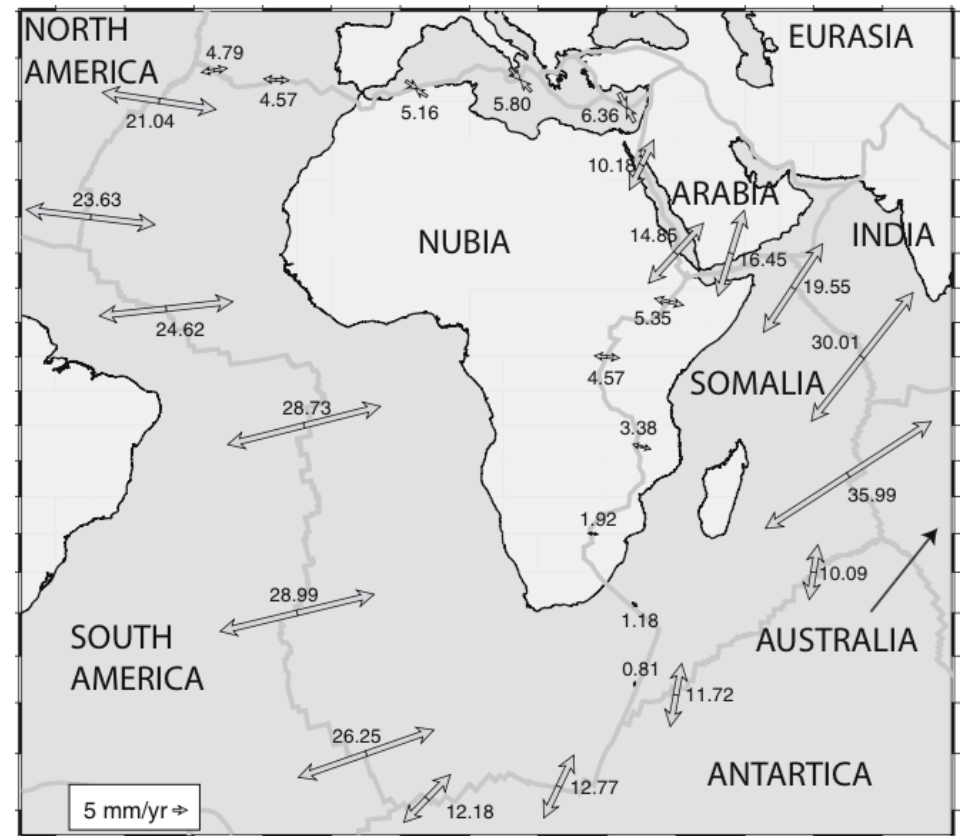
- Une valeur proche de 1 indique un bon accord entre l'hypothèse de non-déformation du bloc et les résidus effectivement obtenus lors de l'estimation du vecteur taux de rotation
- Autres critères:
  - Approche la plus intuitive: si tous les résidus sont inclus dans leur ellipse d'erreur, alors ils ne sont pas significatifs.
  - Est-ce que la distribution des résidus suit une loi significativement différente d'une distribution aléatoire?



# Exemple: plaques Nubie-Somalie



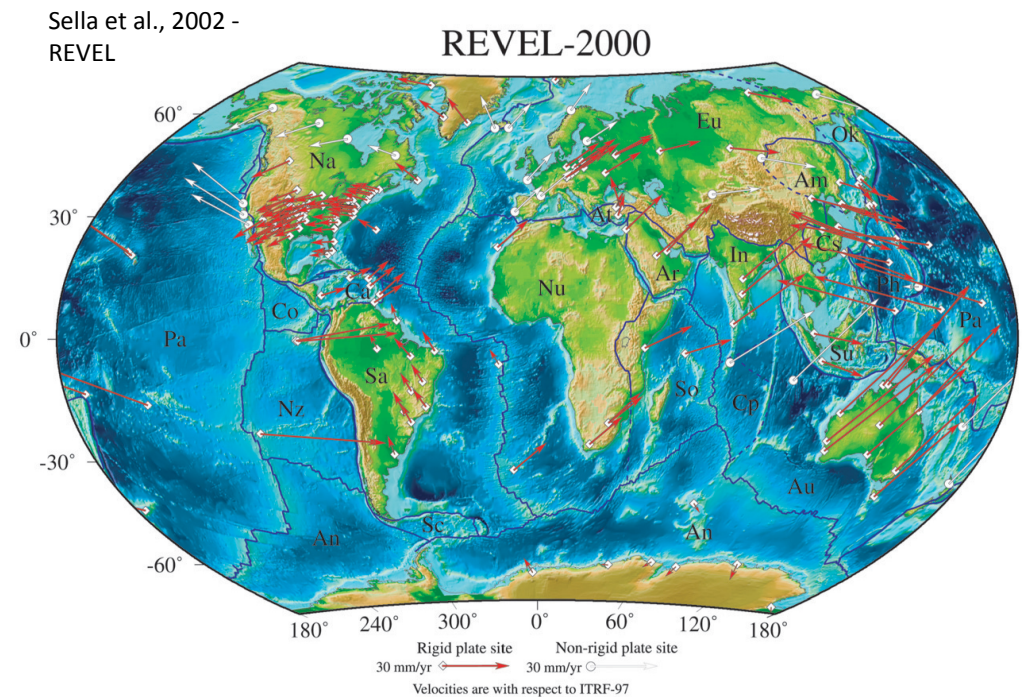
Vitesse mesurées par rapport à la plaque Nubie



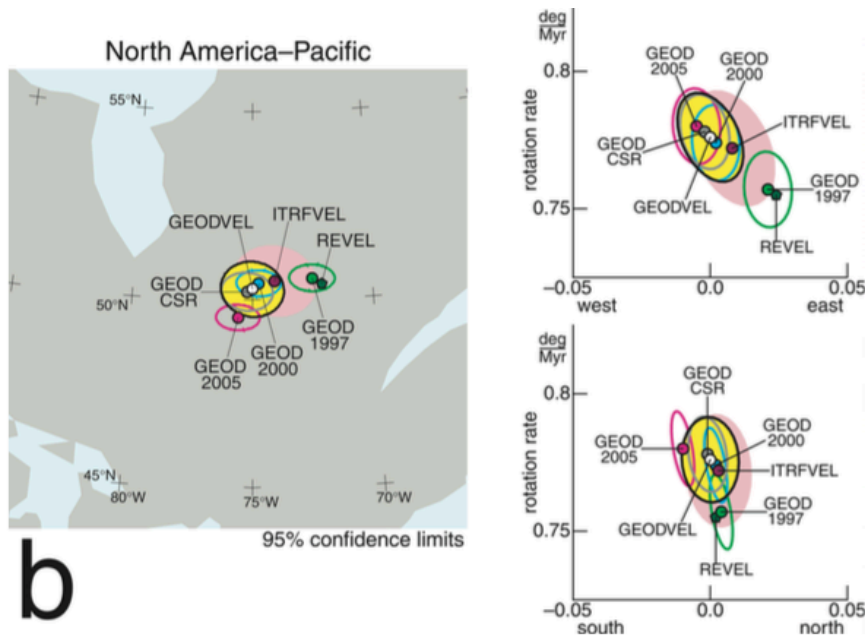
Taux d'extension déduits du meilleur modèle cinématique

# Modèles cinématiques globaux

- Global plate motion model can be computed directly from geodetic velocities.
- Many attempts since ~1995, among them:
  - Argus, D.F., and M.B. Heflin, 1995: 43 sites, 6 plates
  - Larson et al. 1997
  - Kreemer et al., 2003: includes deformation at plate boundaries, own NNR frame
  - Sella et al., 2002: REVEL, 200 sites, 19 plates, ITRF97
  - Prawirodirjo and Bock, 2004, ITRF2000
  - Kogan et al., 2008: 71 sites, 10 plates, accounts for offset between center of mass and “center of plate rotation”, ITRF2005
  - Argus et al., 2010: GEODVEL (11 plates, geocenter, XX velocities)



# Modèles cinématiques globaux



Les estimations de la cinématique actuelle Amérique du Nord – Pacifique sont très proches, quels que soient les données géodésiques utilisées. Noter que l'incertitude sur l'estimation de la rotation des plaques est  $3\sigma$  = un ellipsoïde.

Le dernier modèle cinématique global en date dérivé uniquement de données de géodésie spatiale: GEODVEL (Argus et al., 2010)



Noter les valeurs des résidus de vitesse par rapport à l'Eurasie, ainsi que les résidus aberrants dus à des zones de déformation tectonique (Méditerranée, Islande).

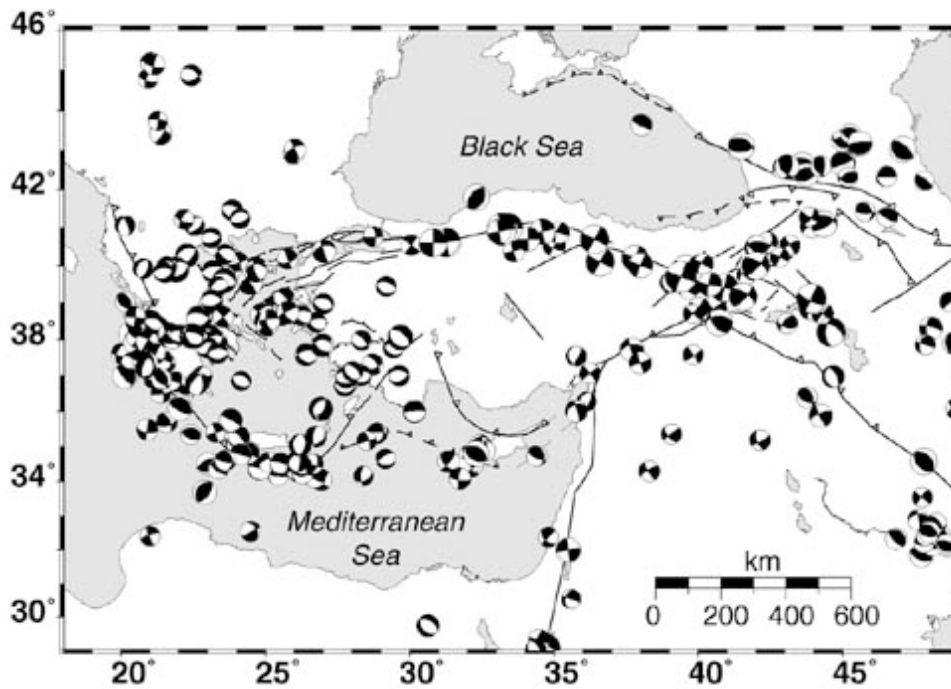


# Comparaison 3 Ma – actuel

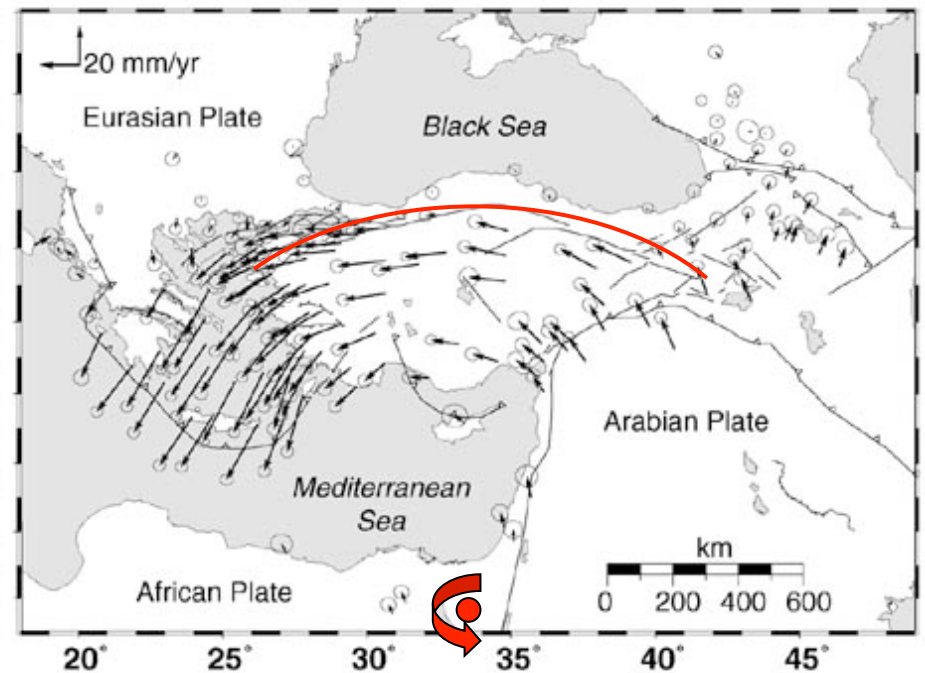
- Modèles géologiques:
  - Moyenne sur 3 My
  - NUVEL1A (DeMets et al., 1994)
  - Plus récemment MORVEL (DeMets et al., 2012)
- Modèles géodésiques:
  - Instantanés (< 20 ans)
  - REVEL (Sella et al., 2002), plus récemment GEODVEL (Argus et al., 2010)
- Très bon accord entre modèles géologiques/géodésiques pour les 2/3 des plaques, mais:
  - Il manque des plaques dans les modèles géologiques
  - Désaccord Ca/Na, Ca/Sa, et Na/Pa: erreurs dans Nuvel1
  - Ar/Eu, Ar/Nu, et In/Eu plus lents que Nuvel1
  - Nz/Pa, Nz/Sa plus lents que Nuvel1
  - Eu/Na et Eu/Nu: le pole de rotation a bougé



# L'Anatolie: absente des modèles géologiques

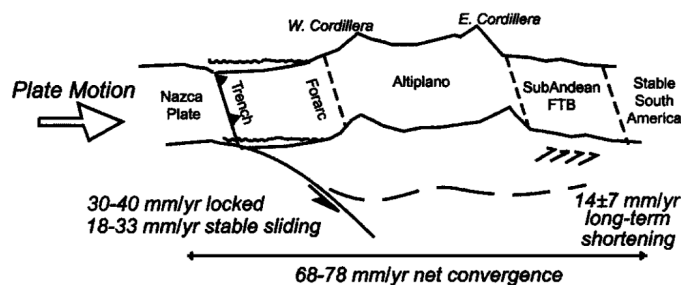
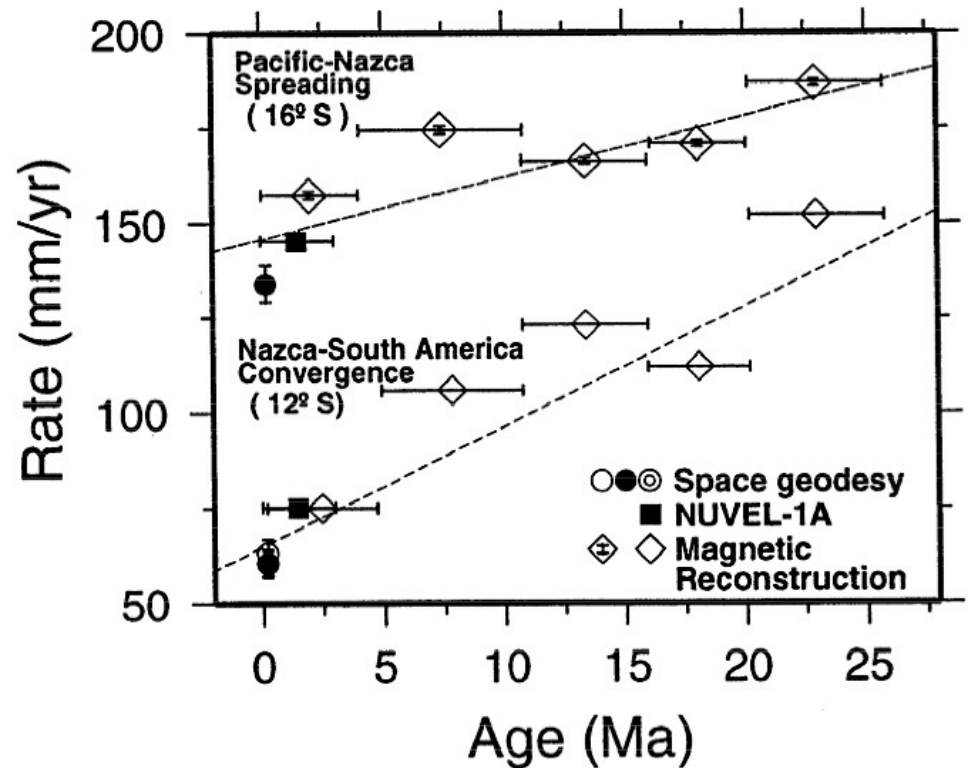
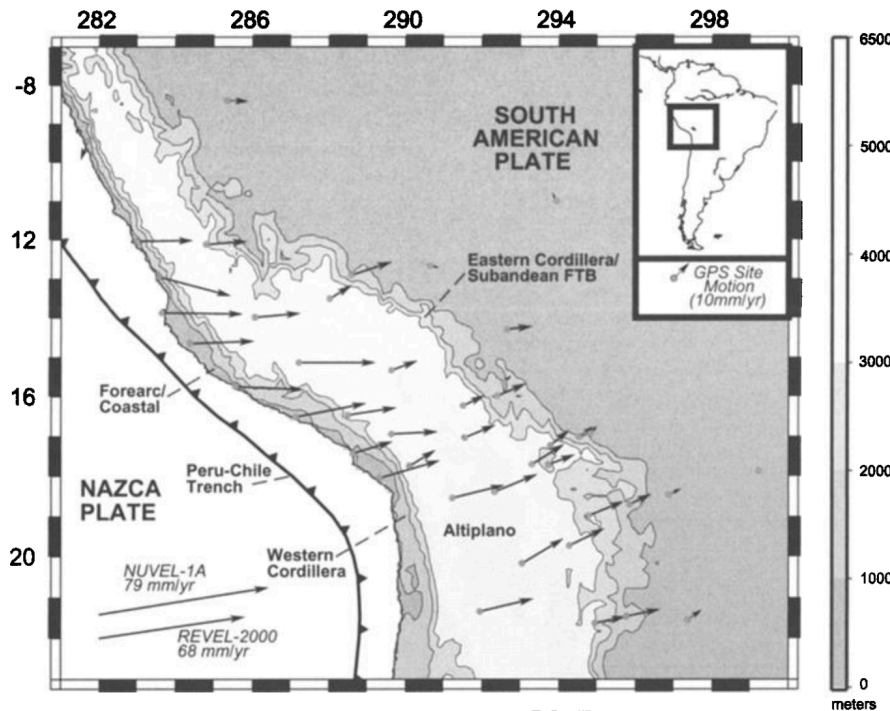


Mécanismes au foyer des séismes



Vitesses GPS par rapport à l'Eurasie. La faille nord anatolienne est un petit cercle du pôle de rotation Anatolie/Eurasie

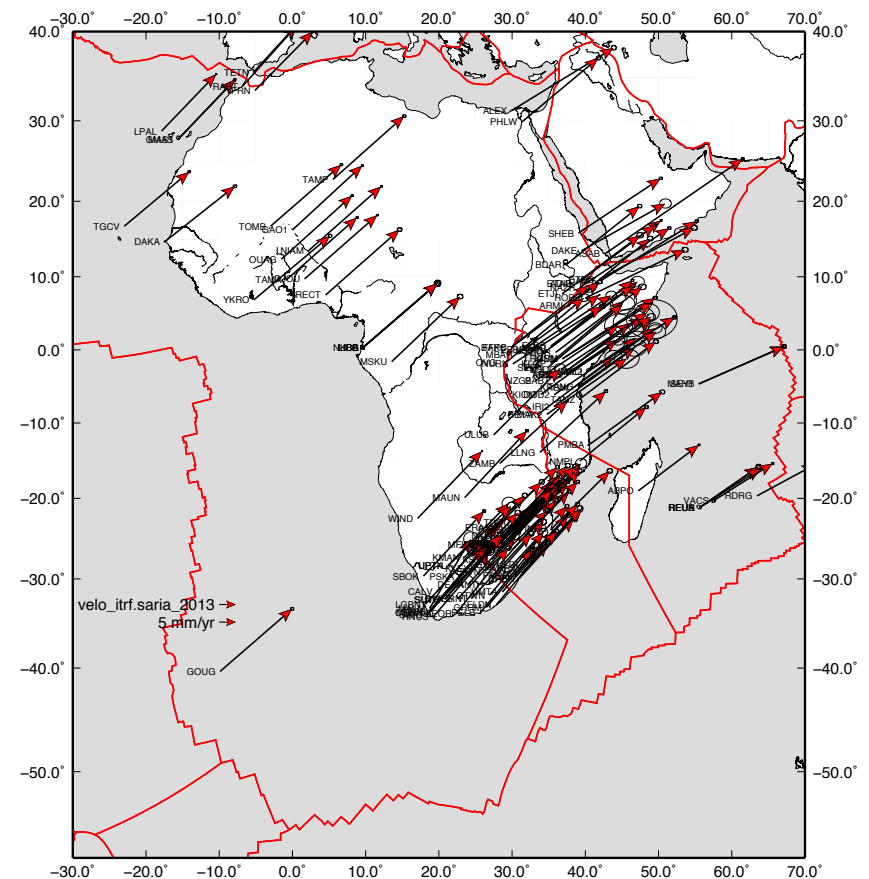
# Ralentissement de la convergence Nazca – Amérique du Sud



La décélération coïncide avec la croissance de la topographie andine => augmentation de la friction interplaque et du frottement visqueux à la base de la lithosphère à mesure que la croûte s'épaissit?

# Du repère ITRF à celui lié à une plaque

- Les positions (donc les séries temporelles, donc vitesses) sont généralement exprimées dans l'ITRF.
- L'interprétation géophysique est plus directe dans un repère lié à une plaque.
- En pratique, la recette est donc:
  - Estimer la rotation rigide plaque X / ITRF.
  - Travailler à partir des résidus, qui sont les vitesses par rapport à l'estimation optimale d'un repère lié à la plaque X.
- Généralement on choisit le sous-ensemble de sites définissant la plaque X sur des critères géophysiques:
  - Éloignement des zones de déformation tectonique/volcanique actives
  - Qualité de la mesure.



# Du repère ITRF à celui lié à une plaque

ANGULAR VELOCITY:    Wx            Wy            Wz  
 0.0298            -0.1720            0.2003            (deg/My)  
 5.2025e-04       -3.0025e-03       3.4965e-03       (rad/My)

COVARIANCE ELMTS:    XX        XY        XZ        YY        YZ        ZZ  
 0.4650    0.1289   -0.0984    0.1023   -0.0341    0.0993    (10<sup>5</sup> deg/My)\*\*2  
 14.1647    3.9263   -2.9971    3.1174   -1.0393    3.0250    (10<sup>10</sup> rad/My)\*\*2

ROTATION PARAMETERS:    Lon (deg)    Lat (deg)    Ang +- (deg/My)  
 48.9273        -80.1699        0.2657    0.0010

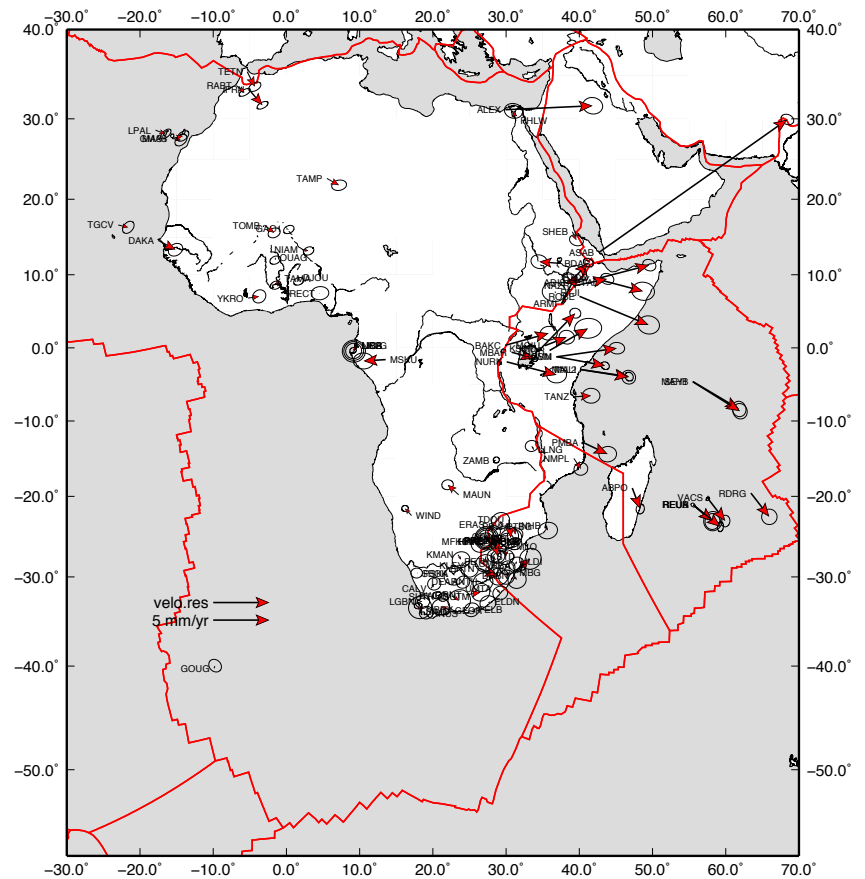
STANDARD ERROR ELLIPSE:    Semi-max    Semi-min    Azim (deg CCW from N)  
 0.6811        0.2451        177.1

STATISTICS:  
 CHI\*\*2            : 42.66  
 DEGREES OF FREEDOM: 41  
 REDUCED CHI\*\*2    : 1.04

RESIDUALS (mm/yr):

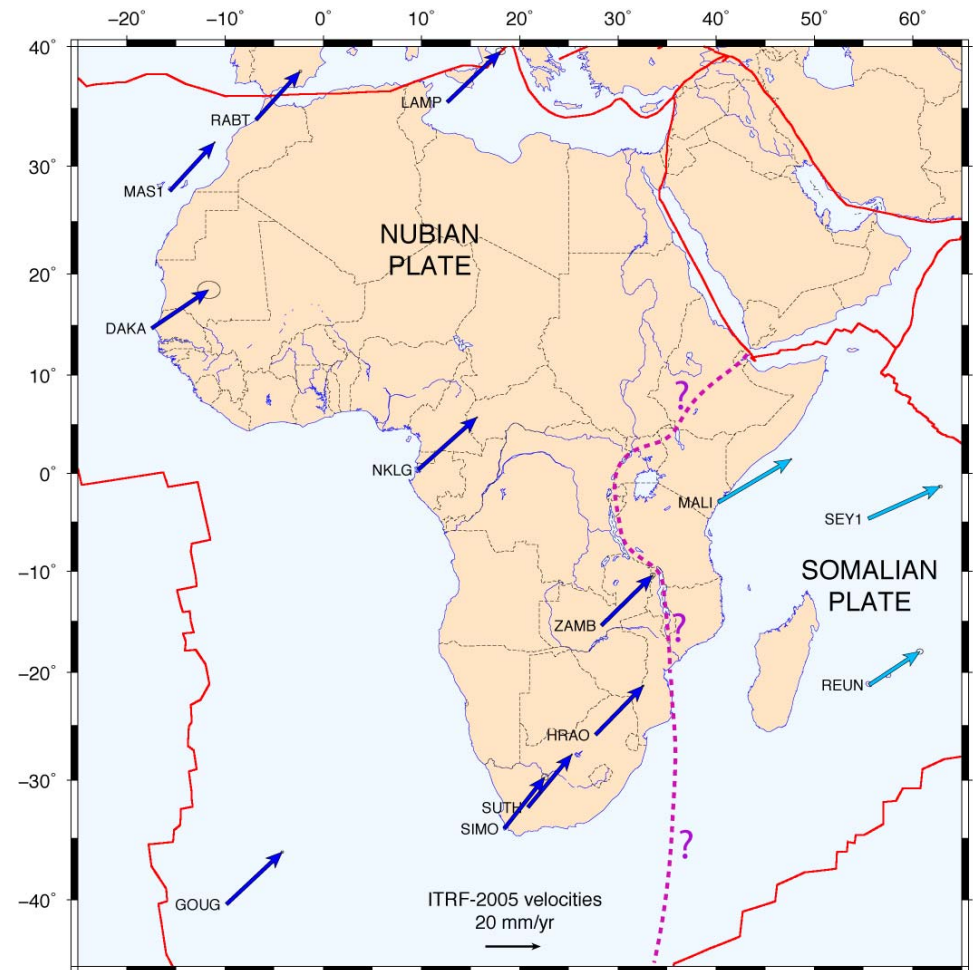
Lon	Lat	Ve	Vn	Sve	Svn	Corr	Site	Res	Azim
-15.630	27.760	0.98	0.22	0.70	0.64	0.04009	MAS1	1.00	12.8
5.530	22.790	1.08	-0.61	1.20	0.91	0.00657	TAMP	1.24	-29.
20.810	-32.380	0.38	-0.10	0.69	0.68	0.00330	SUTH	0.40	-14.6
20.810	-32.380	-0.15	0.07	0.58	0.57	0.00443	SUTM	0.16	154.5
9.670	0.350	-0.37	-0.47	0.30	0.30	0.02282	NKLG	0.60	-128.5
17.090	-22.570	-0.59	0.63	0.35	0.35	0.00160	WIND	0.86	132.9
28.310	-15.430	0.23	0.07	0.35	0.35	0.00581	ZAMB	0.24	16.0
-9.880	-40.350	0.09	0.23	1.08	1.03	-0.00882	GOUG	0.25	69.1
36.820	7.670	-0.17	0.03	2.32	1.87	-0.00142	ETJI	0.18	169.9
28.220	-25.750	0.15	0.13	0.41	0.35	0.01682	PRE1	0.19	40.7
28.220	-25.750	0.43	0.26	0.41	0.35	0.01740	PRE2	0.50	31.0
-1.510	12.360	-0.02	-0.22	0.75	0.58	0.01931	OUAG	0.22	-94.8
13.550	-1.630	-1.98	-0.12	1.98	1.59	-0.00151	MSKU	1.98	-176.4
33.790	-13.950	-0.20	0.33	1.19	0.97	0.00339	LLNG	0.39	121.4
35.380	-23.870	0.21	-0.43	1.87	1.59	0.00416	INHB	0.47	-64.0
30.380	-23.080	0.18	-1.65	2.15	1.87	0.00431	TDOU	1.66	-83.7
19.220	-34.420	-0.08	0.10	1.19	1.19	0.00428	HNUS	0.13	128.0
31.420	-28.290	-0.01	-0.21	1.42	1.31	0.00503	ULDI	0.21	-91.4
-0.010	16.250	0.21	-0.07	0.70	0.58	0.02182	GAO1	0.22	-18.2
39.050	15.850	0.36	-0.76	1.14	0.91	-0.00955	SHEB	0.84	-64.7
27.480	-11.630	-1.03	1.04	3.96	3.62	0.00063	ULUB	1.46	134.7
2.180	13.480	0.54	-0.13	0.69	0.58	0.01741	NIAM	0.56	-13.7

WEIGHTED MEAN OF RESIDUALS AT PLATE SITES:  
 North = 0.0 +- 0.4 mm/yr  
 East = 0.0 +- 0.4 mm/yr  
 Horiz = 0.0 +- 0.4 mm/yr



# Le test de Fisher

- Problème: les vitesses mesurées sont-elles mieux décrites par une plaque ou deux plaques?
- Si on divise les données en 2 plaques on a alors plus de paramètres à estimer => le  $\chi^2$  décroît.
- A l'inverse si on ajoute des données le  $\chi^2$  augmente.
- Est-ce que le changement de  $\chi^2$  d'un modèle à  $p_1$  degrés de liberté vers un modèle à  $p_2$  ( $p_1 > p_2$ ) est significatif?
- Test de Fisher-Snedecor test: compare le résultat de de estimation par moindres carrés en prenant en compte leur degrés de libertés respectifs.
- Introduit en cinématique des plaques par Stein et al. (1984) et Gordon et al. (1987), aussi appelé "F-ratio test", ou "F-test".



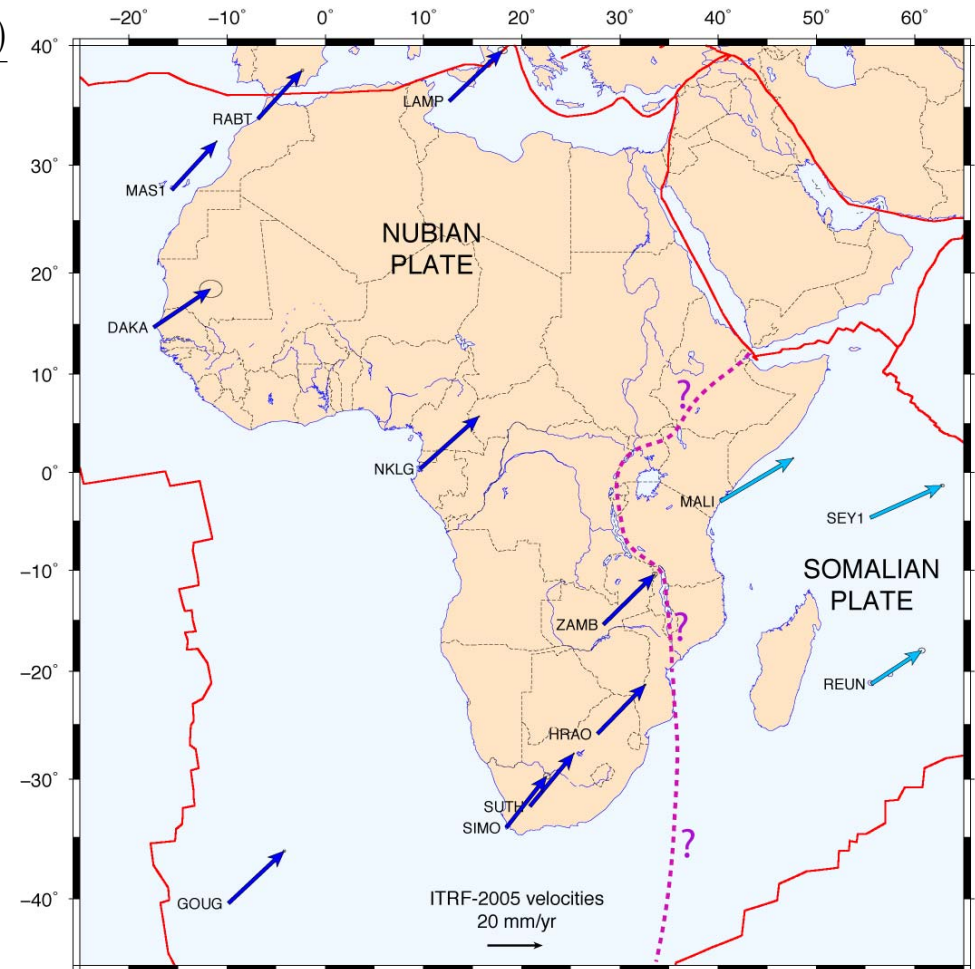


# Le test de Fisher

- On peut montrer que le ratio:  $F = \frac{[\chi_{p_1}^2 - \chi_{p_2}^2] / (p_1 - p_2)}{\chi_{p_2}^2 / p_2}$

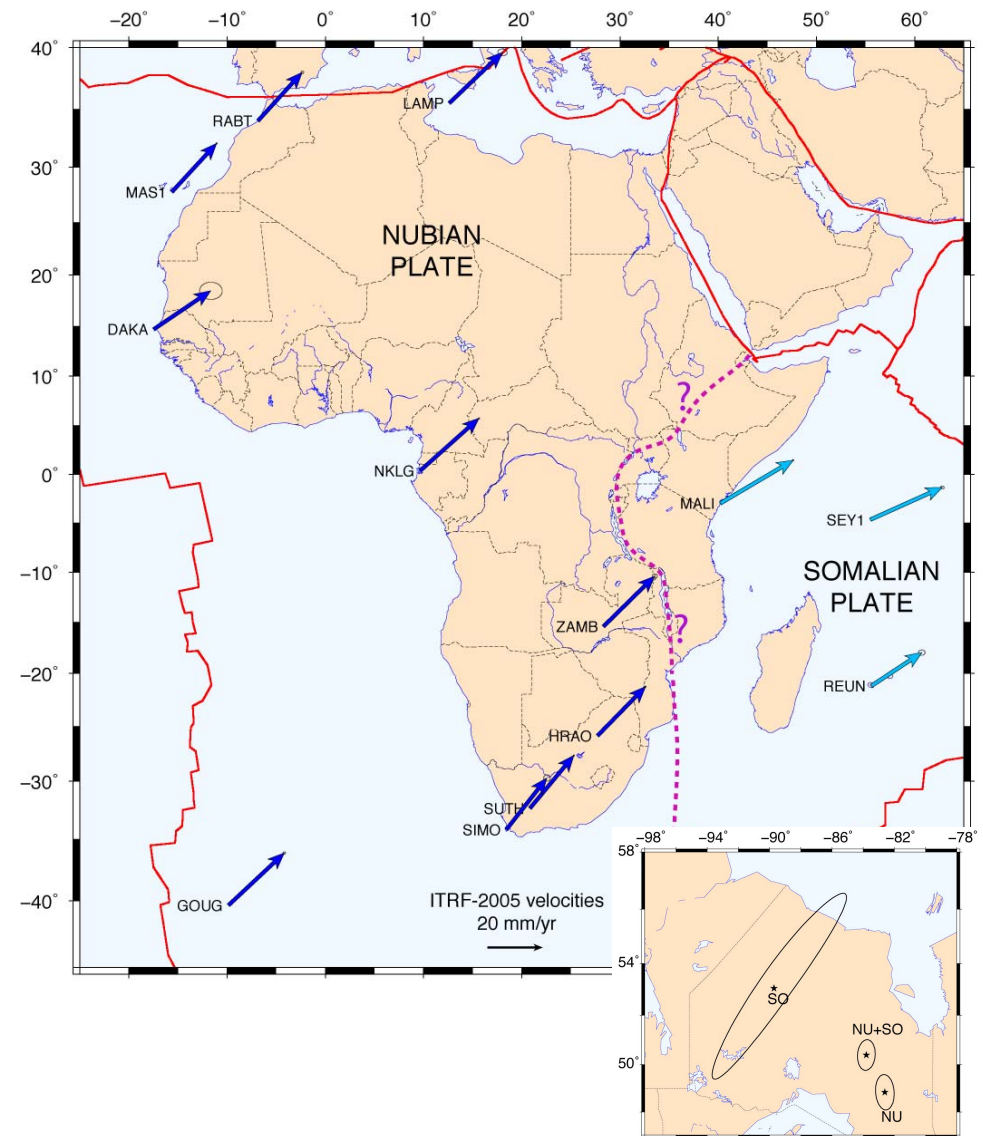
suit une distribution de Fisher-Snedecor à  $(p_1 - p_2, p_2)$  degrés de liberté.

- Ce ratio "expérimental" est comparé au ratio  $f_\alpha$  d'une distribution  $F(p_1 - p_2, p_2)$  ( $p_1 > p_2$ ), pour un niveau de risque  $\alpha$  (ou un niveau de confiance  $1 - \alpha$ ) que l'hypothèse nulle peut être rejetée.
- $f_\alpha$  pour  $(p_1 - p_2, p_2)$  est donnée dans des tables.
- Hypothèse nulle (= la plus conservatrice) = les données sont mieux satisfaites par la rotation d'une plaque unique.
- Si  $F > f_\alpha$ , alors la diminution du  $\chi^2$  est significative => l'hypothèse nulle ne tient pas avec un niveau de confiance de  $1 - \alpha\%$  (généralement  $\alpha = 0.99$ ).
- Si  $F \leq f_\alpha$ , alors l'hypothèse nulle est suffisante.
- Noter que  $F$  n'est pas modifié si les incertitudes sont sur- ou sous-estimées dans leur ensemble.



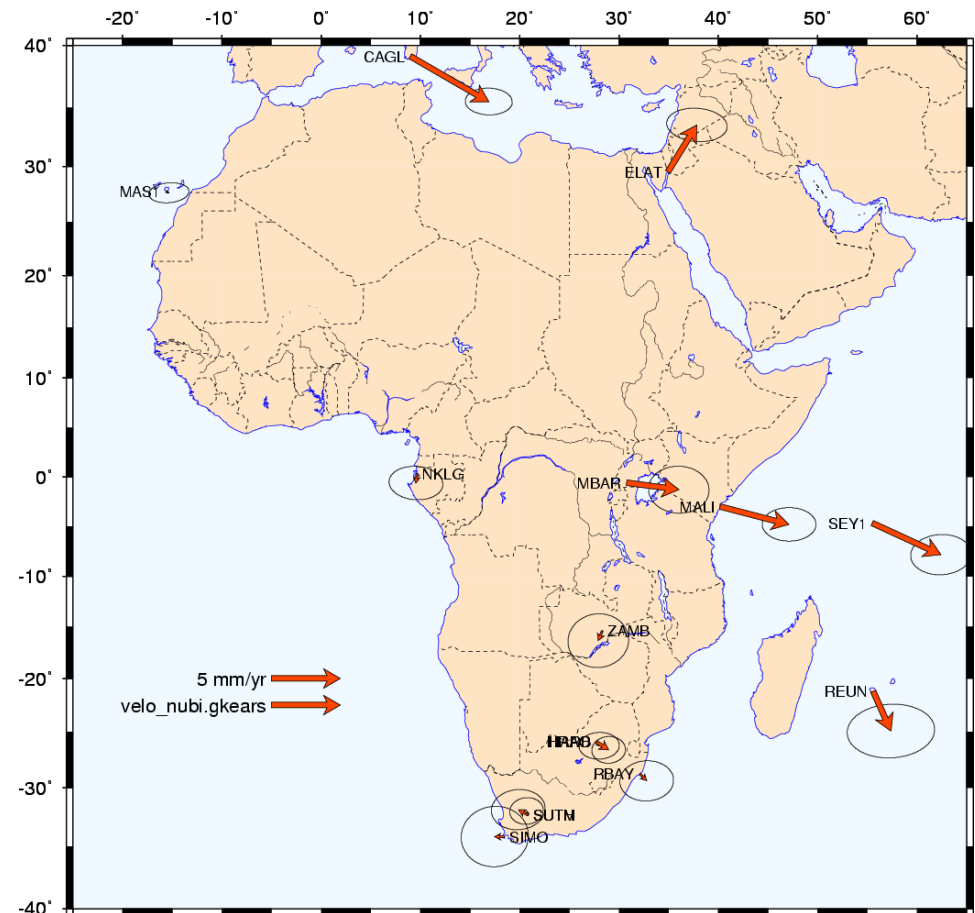
# Exemple des plaques Nubie-Somalie

- Les vitesses GPS en Afrique sont-elles mieux décrites par la rotation rigide d'une seule plaque ou bien de deux plaques séparées par le rift est africain?
- 13 sites GPS => N=26 données
- Plaque Afrique unique
  - $\chi^2 = 2562.913$
  - dof:  $p_1 = N - 3 = 23$
- Deux plaques, Nubie et Somalie
  - $\chi^2 = 211.067$
  - dof:  $p_2 = N - 6 = 20$
- F-ratio:
  - $F(3,26) = [(2562.913 - 211.067) / 3] / [211.067 / 26] = 96.57$
  - Correspond à une probabilité de 99.999% que l'hypothèse nulle peut être rejetée.



# Autre application du F-test

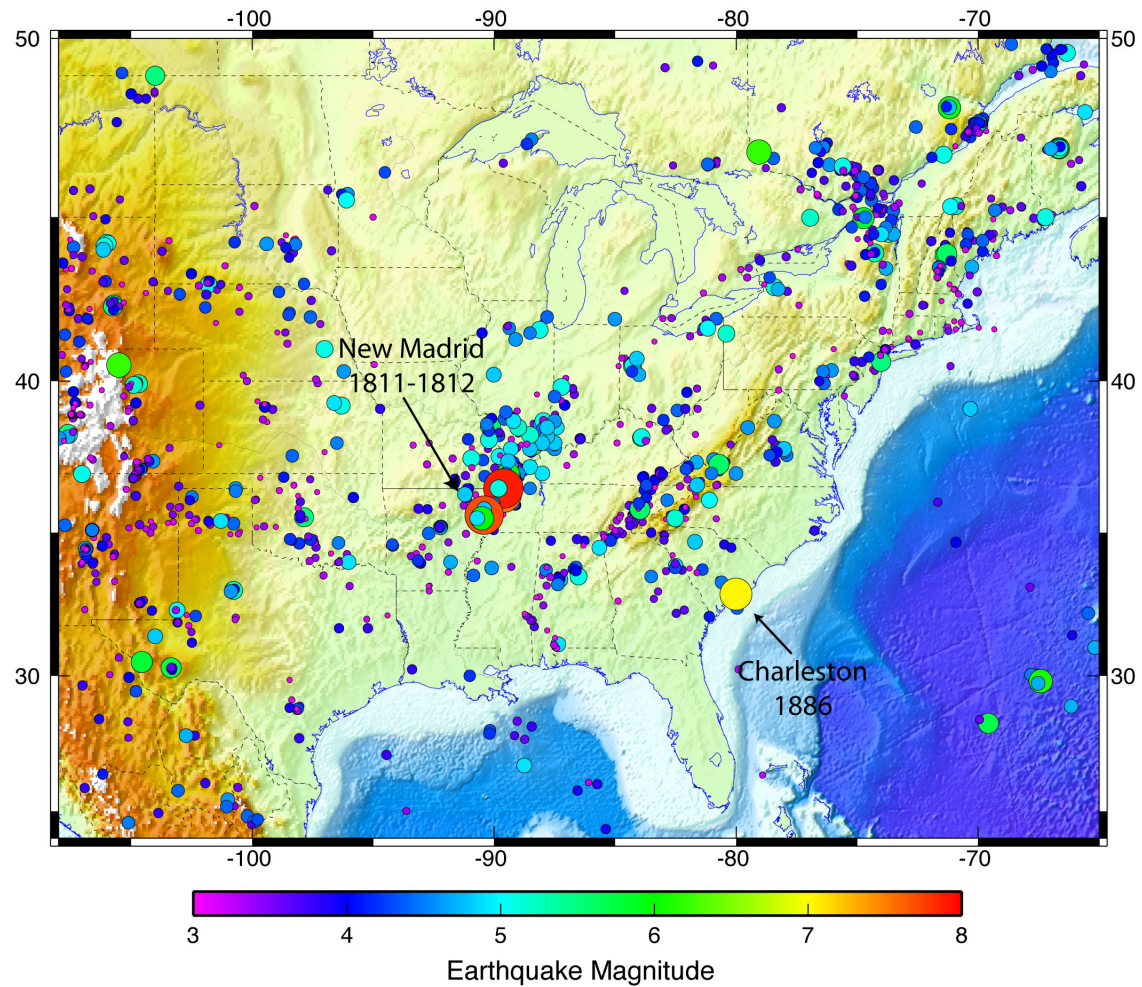
- Le F-test est aussi applicable au problème: « est-ce que le site *D* appartient à la plaque rigide telle que définie par les sites *A, B, C*? »
- On compare les résultats d'une estimation par moindres carrés avec *N* vitesses GPS (dof =  $2 \times N - 3$ ) avec une estimation avec *N*+1 vitesses (dof =  $2 \times (N + 1) - 3$ )
- Exemple: On définit la plaque Nubie à partir des sites MAS1, NKLG, SUTH, GOUG – est-ce que le site ZAMB appartient à cette plaque?
  - Nubie:  $\chi^2 = 7.918$ , dof = 7
  - Nubie + ZAMB:  $\chi^2 = 9.010$ , dof = 9
  - $F(2,7) = 0.482698 \Rightarrow$  ZAMB cohérent avec la Nubie à un niveau de confiance de 63.6 %
- Test réalisé de manière systématique sur un ensemble de sites  $\Rightarrow$  permet de déterminer le sous-ensemble optimal définissant une plaque rigide.



Vitesses par rapport à la plaque Nubie

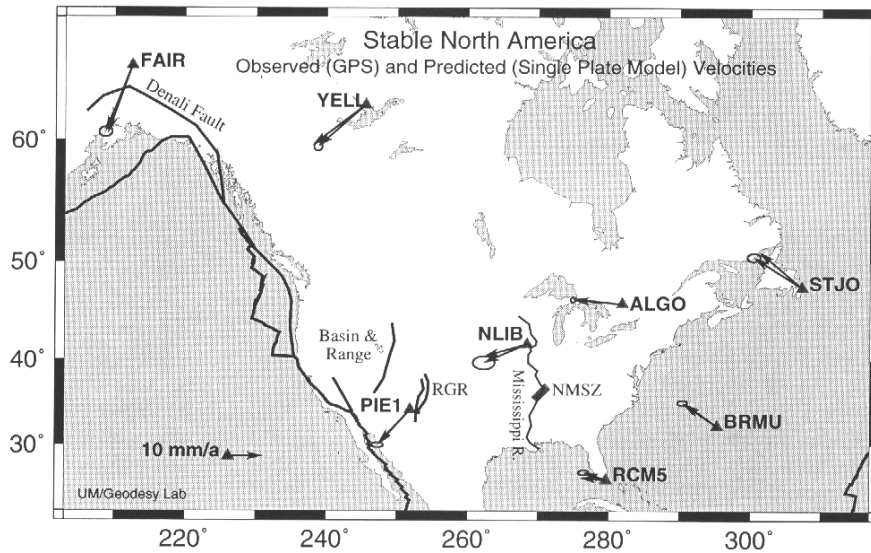


# Rigidité des plaques? L'Amérique du Nord



Exemple du centre-est des USA, zone intraplaque éloigné de toute frontière de plaque, mais sismiquement active...

# Rigidité des plaques? L'Amérique du Nord



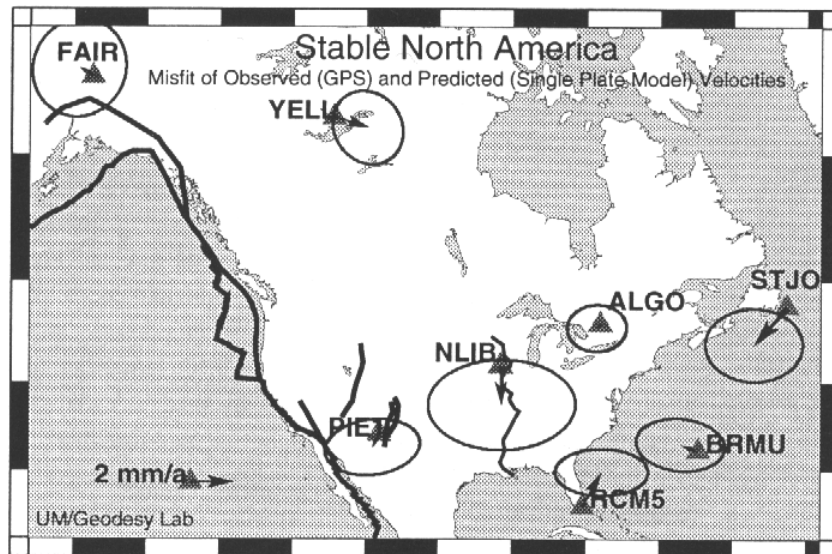
**Table 1.** Observed<sup>1</sup>, Predicted<sup>2</sup> and Residual<sup>3</sup> GPS Site Velocities (mm/yr)

	North Velocity		West Velocity		Residual Vector Magnitude <sup>3</sup>
	Observed <sup>1</sup>	Predicted <sup>2</sup>	Observed <sup>1</sup>	Predicted <sup>2</sup>	
ALGO	1.3 ± 0.3 (3.9)	1.5	14.4 ± 0.3 (4.5)	14.2	0.2
BRMU	6.9 ± 0.3 (3.5)	6.6	10.1 ± 0.6 (6.6)	9.3	0.9
FAIR	-19.9 ± 0.6 (4.1)	-20.3	7.9 ± 0.8 (5.1)	7.3	0.7
NLIB	-5.6 ± 0.8 (3.0)	-3.8	12.7 ± 1.3 (5.5)	12.8	1.8
PIE1	-10.5 ± 0.3 (3.6)	-9.9	9.5 ± 0.7 (6.9)	9.2	0.7
RCM5	2.2 ± 0.3 (3.3)	0.6	6.5 ± 0.6 (6.6)	7.4	1.9
STJO	9.1 ± 0.5 (3.9)	10.9	14.2 ± 0.8 (6.3)	12.7	2.3
YELL	-12.5 ± 0.5 (3.9)	-12.0	13.9 ± 0.5 (5.0)	15.5	1.7

1. Relative to ITRF-94. Numbers in parentheses are weighted root mean square scatter of daily position estimates (mm).

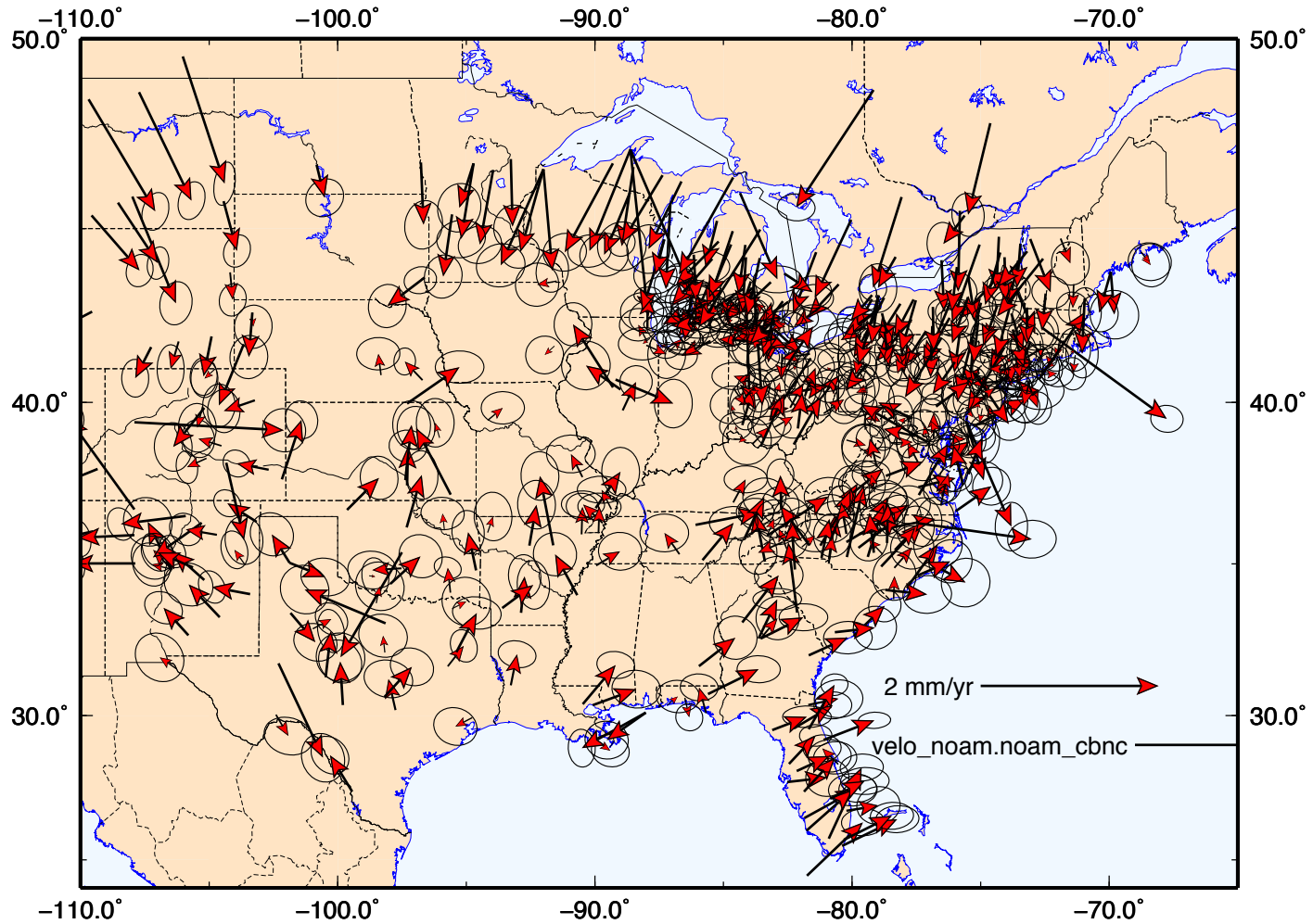
2. Based on a rigid plate model with pole at 6.3°N, 278.2°E.  $\omega=0.202^\circ/\text{my}$ .

3.  $(R_n^2 + R_w^2)^{1/2}$  where  $R_n, R_w$  are the north or west Residuals (Observed - Predicted) (mm/yr).



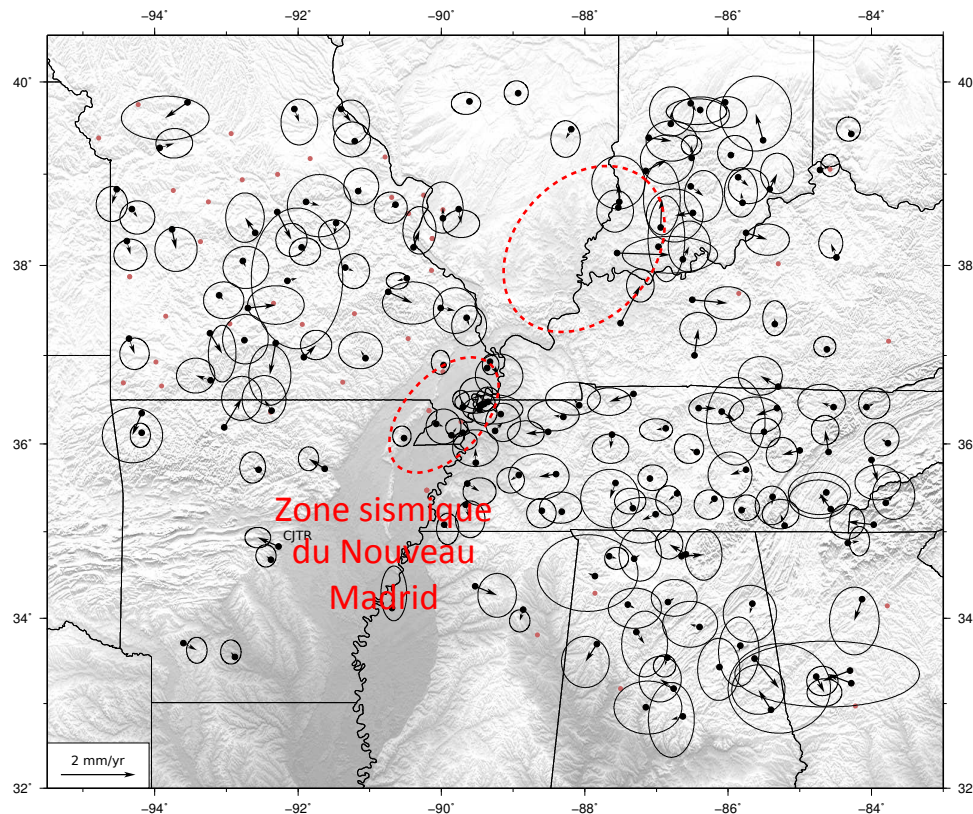
- Dixon et al., GRL, 1996: "How rigid is the stable interior of the North American plate?"
- Rigidité = RMS misfit of geodetic velocities to a rigid plate model
- Answer = 2 mm/yr over the entire North American plate (= RMS)

# Rigidité des plaques? L'Amérique du Nord

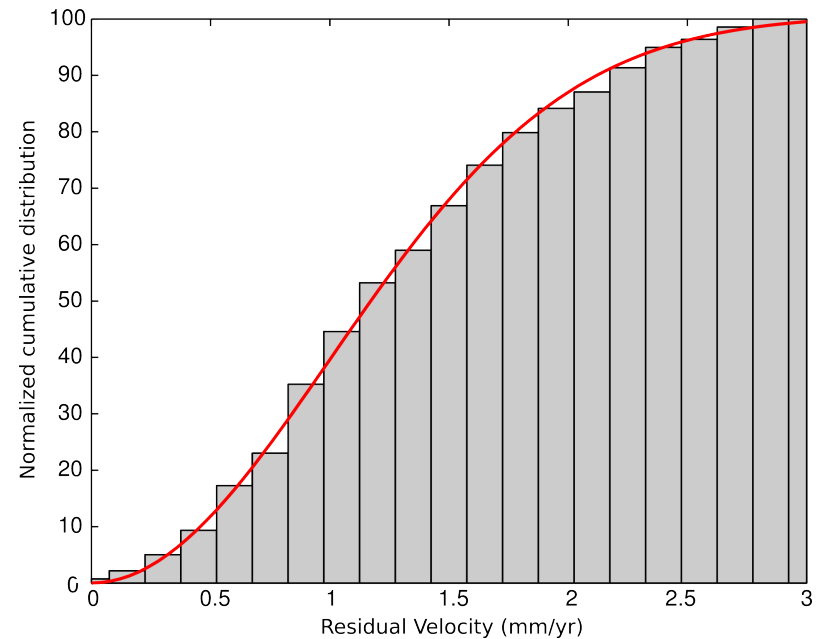




# Rigidité des plaques? L'Amérique du Nord

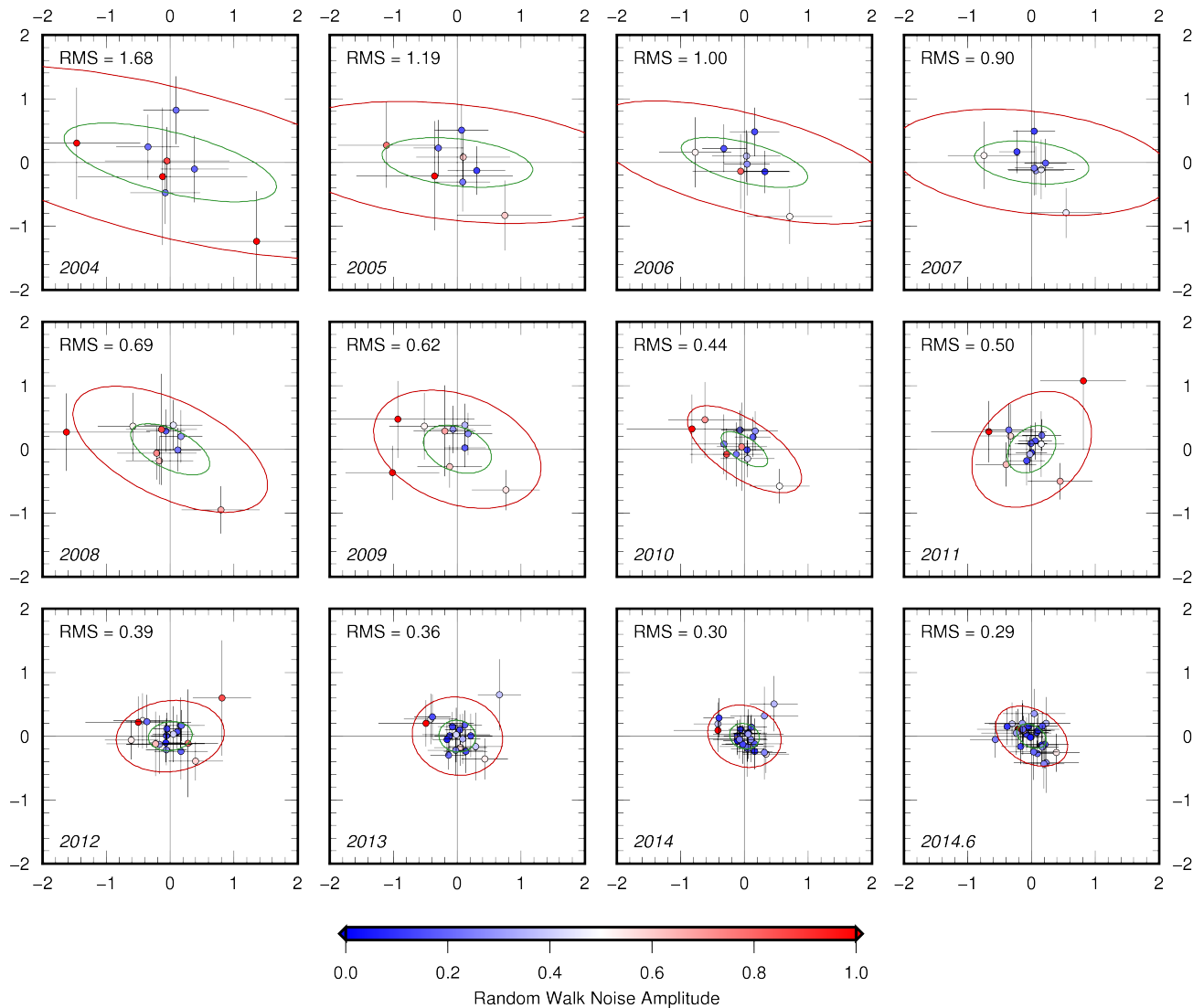


Problème: les résidus observés sont-ils aléatoires ou bien contiennent-ils une structure spatiale indiquant une autre plaque, ou bien de la déformation interne?



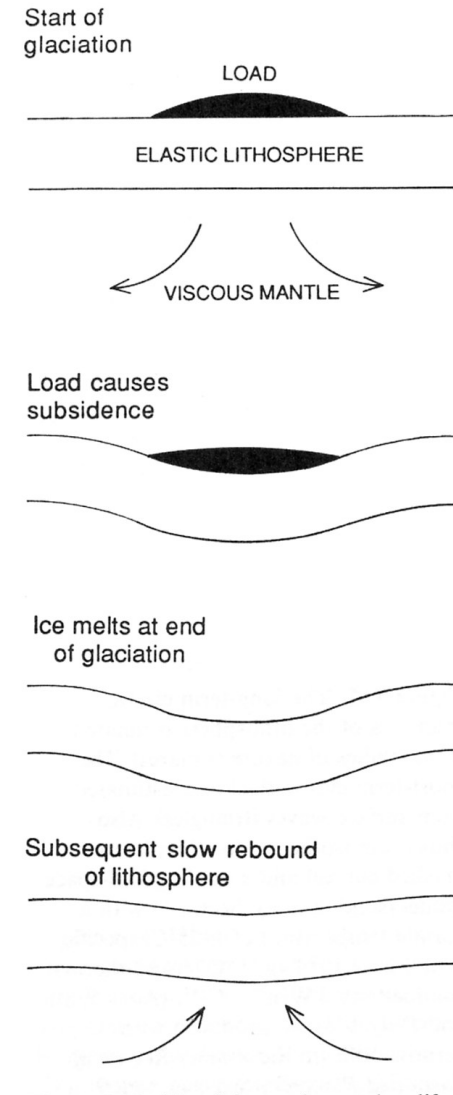
Outil possible: comparer la distribution des résidus avec la distribution du  $\chi^2$  théorique d'un jeu de données aléatoire.

# Rigidité des plaques? L'Amérique du Nord



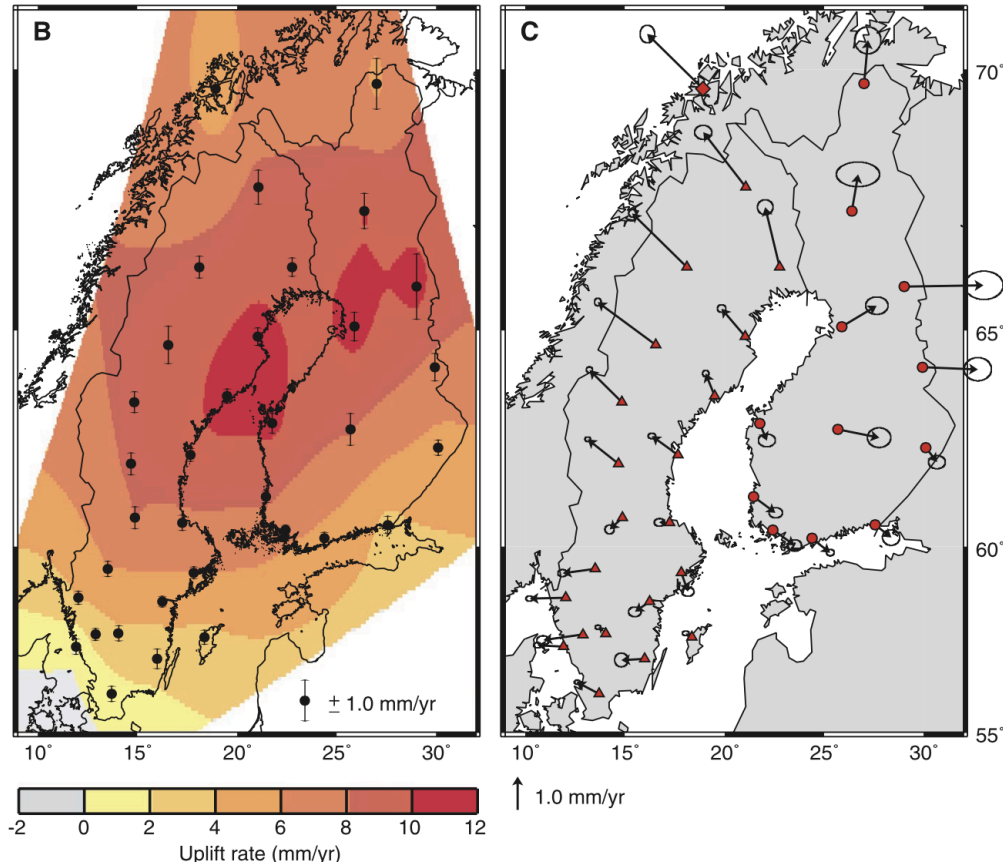
# Le rebond postglaciaire

- Des calottes glaciaires (épaisses de plusieurs kilomètres) recouvraient tout le Canada et l'Arctique (calotte Laurentide) et tout la Scandinavie (calotte Fennoscandienne) lors de la dernière glaciation, qui s'est terminée vers -9000 ans.
- Leur poids défléchit la lithosphère (élastique) ce qui induit des mouvements de matière vers l'extérieur dans le manteau => la surface terrestre subside.
- Lors de leur fonte (rapide: -16000 ~a -9000 ans) la charge disparaît, le manteau et la lithosphère reprennent leur place => la surface terrestre monte.
- La vitesse de ce processus, donc des mouvements observés à la surface, dépend:
  - De l'histoire géologique de la déglaciation.
  - Des propriétés mécaniques de la lithosphère (épaisseur et rigidité) et du manteau (viscosité)
- De fait, la mesure géodésique du « résidu » actuel du rebond postglaciaire renseigne sur ces quantités.





# Exemple en Europe



La mesure des mouvements actuels, verticaux et horizontaux, par un réseau GPS permanent en Scandinavie permet de contraindre la viscosité du manteau (Milne et al., 2001)

