Notion de transformation et de déformation

On se place dans une base cartésienne.

Soit la transformation qui convecte le point $P_o\,(X, Y, Z)$ au point $P\,(x, y, z)$ définie par le vecteur déplacement $\underline{u}$ (voir figure 1). Par définition, on peut écrire,

$$\underline{OP} = \underline{OP_o} + \underline{u} \qquad \text{où} \qquad \underline{x} = \underline{X} + \underline{u}$$

avec

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \underline{X} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

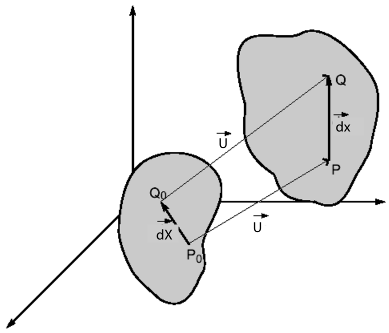

FIG. 1 – Transformation convectant Po en P

On s'interesse à la transformation définit par le vecteur déplacement suivant :

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} \lambda\, Y \\ \lambda\, X \\ 0 \end{pmatrix}$$

Question :

1) Représenter géométriquement la transformation d'un carré (OABC) de coté 1 (voir figure 2). (ce carré se transforme en parallélogramme noté (O'A'B'C'))

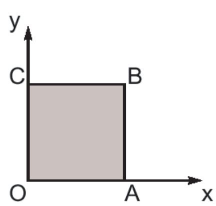

FIG. 2 – Carré d'un coté 1 dans sa configuration initiale

2) Donner le gradient de la transformation $\underline{\underline{F}}$.

(Rappel : par définition $\underline{\mathrm{d}x} = \underline{\underline{F}}.\underline{\mathrm{d}X}$, soit dans un repère cartésien $F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}$).

3) Donner le tenseur Lagrangien des déformations $\underline{\underline{E}}$.

(Rappel : par définition $\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2}\,(\underline{\underline{F}}^t.\underline{\underline{F}} - \underline{\underline{1}})$)

4) Calculer la variation de volume d'un cube d'arrête 1.

– Par une méthode géométrique

– En utilisant un produit mixte

– En utilisant la définition $\mathrm{d}V = \det(\underline{\underline{F}})\,\mathrm{d}V_o$

5) Soit le normale $\underline{N}$ à la surface $\overline{CB}$ (figure 2).

$$\underline{N} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La normale $\underline{N}$ se convecte par la transformation en la normale à la surface $\overline{C'B'}$ noté $\underline{n}$. Représenter graphiquement les normales n et N, pour la transformation du carré (OABC)

Calculer $\underline{\underline{F}}^{-1}$, puis déterminer par le calcul les coordonnées de la normale $\underline{n}$.

