GÉOMÉCANIQUE – TD 2

Notion de forces et contraintes

1 Notion de Contrainte

1.1 Tenseur des Contrainte

Soit un élément de volume infinitesimal en 2-D soumis à un champs de contrainte representé par σ_{ij} dans le repère $\left(O, x_1, x_2\right)$ (Fig. 1). Soit f_1 et f_2 les composantes suivant x_1 et x_2 des forces de volumes s'applicant sur l'élément de volume dV. L'hypothèse 2-D permet d'écrire $dV = dx_1 \times dx_2 \times 1$, en prenant une longueur unité dans la direction x_3. Toutes les quantités physiques introduites seront considérées par unité de longueur dans cette troisième direction.

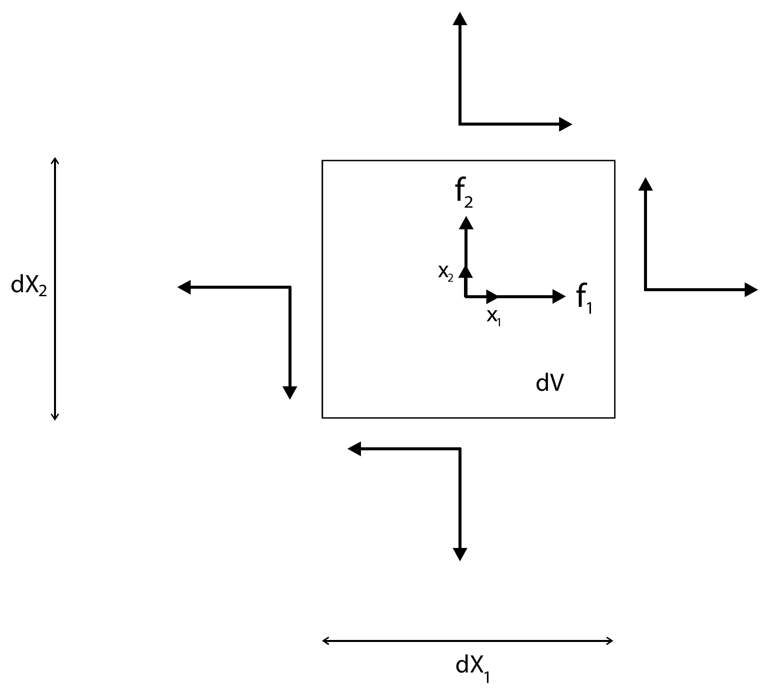

FIG. 1 – Elément de volume infinitesimal 2-D.

Questions :

a) Représenter les composantes du tenseur des contraintes sur les faces du cube.

b) Exprimer le bilan des **forces** s'applicant sur cet élément de volume. En déduire les équations d'équilibre.

c) Montrer que le tenseur des contraintes est symétrique.

e) Exprimer les contraintes normales et tangentielles s'appliquant sur le plan diagonal d'un carré.

1.2 Invariants du Tenseur des Contraintes

Soit un élément de volume infinitesimal en 3-D soumis à un champs de contrainte representé par $\underline{\underline{\sigma}}$ dans le repère $\left(O, x_1, x_2, x_3\right)$.

Questions :

a) Décomposer $\underline{\underline{\sigma}}$ en sa composante volumetrique $\underline{\underline{\sigma_m}}$ et déviatorique $\underline{\underline{S}}$.

(Par définition, $\underline{\underline{\sigma_m}}$ se rapporte à un champ de pression, et $\underline{\underline{\sigma}}_m = \frac{1}{3}\mathrm{tr}\underline{\underline{\sigma}}\,\underline{\underline{I}}$)

Rappel d'algèbre :

Soit une matrice A symétrique 3×3 possédant 3 valeurs propres. On peut écrire son polynôme caractéristique sous la forme

$\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0$

où I_1, I_2, I_3 sont les 3 invariants principaux (ils sont indépendants du repère dans lequel la matrice est écrite).

Pour un tenseur $\underline{\underline{\sigma}}$, il est d'usage d'utiliser les 3 invariants suivants qui sont combinaisons linéaires des 3 invariants principaux :

$I_1 = \mathrm{tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \qquad I_2 = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\underline{\underline{\sigma}}^2) \qquad I_3 = \frac{1}{3}\mathrm{tr}(\underline{\underline{\sigma}}^3)$

Par analogie, on peut calculer les invariants du tenseur $\underline{\underline{S}}$: $J_1 = \mathrm{tr}(\underline{\underline{\mathrm{S}}}) \qquad J_2 = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\underline{\underline{\mathrm{S}}}^2) \qquad J_3 = \frac{1}{3}\mathrm{tr}(\underline{\underline{\mathrm{S}}}^3)$

b) Que vaut J_1

c) Montrer que $J_2 = I_2 - \frac{I_1^2}{6}$

On montre également que $I_3 = J_3 + 2I_1J_2/3 + I_1^3/27$, ainsi il sera possible de caractériser tout tenseur $\underline{\underline{\sigma}}$, à partir du triplet I_1 I_2, I_3, ou I_1, J_2, J_3.

2 Application Numérique

Soit un élément de volume infinitesimal 3-D soumis à un champs de contrainte (en MPa) representé, dans le repère $\left(O, x_1, x_2, x_3\right)$, par

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ ? & 6 & 0 \\ ? & ? & -37 \end{pmatrix}_{\left(O, x_1, x_2, x_3\right)}$$

Questions :

a) Compléter le tenseur et expliquer les signes de ses termes diagonaux.

b) Calculer les contraintes principales $\left(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\right)$ et les directions principales associées $\left(e_1, e_2, e_3\right)$.

c) Calculer les composantes du vecteur contrainte $\underline{T}$ agissant sur un plan $\left(\mathcal{P}\right)$ dont les coordonnées de la normale $\underline{n}$ dans O, x_1, x_2, x_3 sont

$$\begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.4 \\ 0.44 \end{pmatrix}_{\left(O, x_1, x_2, x_3\right)}$$

Exprimer $\underline{T}$, d'abord dans le repère initial $\left(O, x_1, x_2, x_3\right)$, puis dans le repère principal $\left(O, e_1, e_2, e_3\right)$

