

Chapitre 4

Chaleur et température

Table des matières

4	Chaleur et température	1
4.1	Introduction	4
4.2	Quelques ordres de grandeur	4
4.3	Conduction	7
4.3.1	En une dimension	7
4.3.2	En trois dimensions, et en coordonnées sphériques	8
4.4	Production de chaleur	9
4.5	Le géotherme de la lithosphère continentale	10
4.5.1	L'équation fondamentale	10
4.5.2	Contribution de la chaleur radiogénique	11
4.5.3	Conditions aux limites en flux de chaleur	12
4.5.4	Conditions aux limites en température	16
4.6	Refroidissement d'un demi-espace	16
4.6.1	L'équation générale	16
4.6.2	Application au refroidissement de la lithosphère océanique	19
4.7	Advection	24
4.8	Convection	24
4.8.1	Généralités	24
4.8.2	Le gradient adiabatique	25
4.8.3	Calcul du gradient adiabatique	26
4.8.4	Conséquences	27
4.8.5	Bref historique de la convection dans le manteau terrestre	30
4.8.6	Équations de la convection et cas simples	32
4.8.7	La convection : observations et état des lieux	37

4.1 Introduction

La Terre est une “machine thermique” : sa fonction essentielle est d’évacuer sa chaleur interne. On sait depuis que l’on exploite des mines souterraines que la température y augmente avec la profondeur, entre 10 et 30°C par kilomètre. De fait, la Terre perd de la chaleur par sa surface. La température étant l’un des facteurs qui déterminent la résistance mécanique des roches (voir chapitre “Forces et Rhéologie”), il est important de savoir comment elle varie avec la profondeur, c’est-à-dire de quantifier le gradient géothermique, encore appelé “géotherme”. La température agit aussi sur la densité des roches, elle est donc l’une des composantes de l’isostasie, donc des reliefs. Cela a été abordé notamment lorsque que nous avons établi la relation entre la profondeur et l’âge des océans. L’objectif de ce chapitre est donc de déterminer le géotherme, ce qui nous amènera à considérer la production et le transport de chaleur dans la Terre.

quantifier ridge push, cf treatise on geophysics, crust and lithosphere dynamics page 83

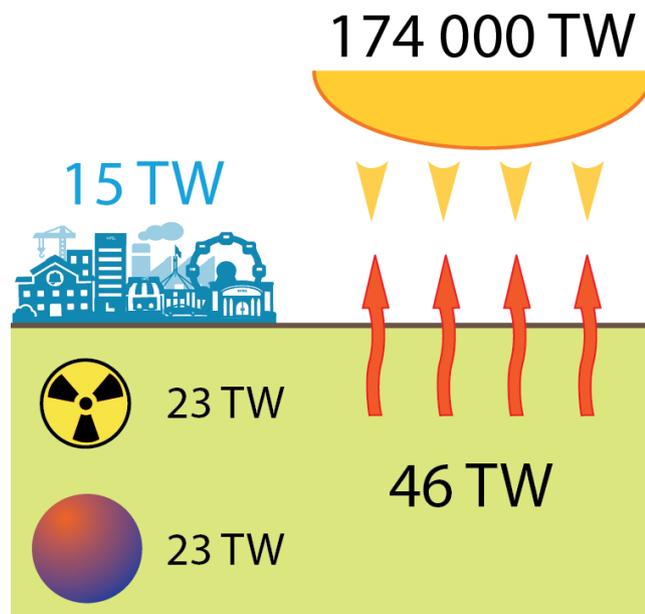


FIGURE 4.1 – Quelques ordres de grandeur de l’énergie thermique produite par la Terre, reçue du soleil, et consommée par l’humanité.

4.2 Quelques ordres de grandeur

On sait déterminer le flux de chaleur dans les premiers centaines de mètres de la Terre car la chaleur s’y propage par conduction selon la loi de Fourier :

$$q = -k \frac{dT}{dz} \quad (4.1)$$

où q est le flux de chaleur en W/m^2 , k la conductivité thermique des roches (de l'ordre de de 2.5 à $3 \text{ W}/\text{m}^2/\text{K}$), et dT/dz la variation de température avec la profondeur. Cette dernière se mesure directement sur le terrain, k est connu à partir de mesures en laboratoire. On trouve alors q que varie entre 50 et $300 \text{ mW}/\text{m}^2$, avec une moyenne d'environ 70 à $80 \text{ mW}/\text{m}^2$. Rapporté à la totalité de la surface terrestre, ce flux de chaleur moyen équivaut à une perte d'énergie thermique équivalente à une puissance de 42 à 47 TW (figure 4.1). S'y ajoute l'énergie thermique perdue par les éruptions volcaniques et les séismes, dont la puissance équivalente est de l'ordre de 2 TW . En résumé, la Terre perd $\sim 46 \text{ TW}$, l'essentiel ($\sim 44 \text{ TW}$) de manière invisible – c'est le flux géothermique – et une petite partie lors de séismes et d'éruptions volcaniques.

Par comparaison, la Terre reçoit du soleil une énergie thermique de $174\,000 \text{ TW}$, soit $5.5 \times 10^{24} \text{ J}$ par an, ou encore à une moyenne jour-nuit, été-hiver, pôles-équateur de $342 \text{ W}/\text{m}^2$. L'énergie totale consommée par l'humanité (combustibles fossiles, nucléaire, énergies renouvelables, etc.) est d'environ 15 TW , soit environ $5 \times 10^{20} \text{ J}$ par an. Nous consommons donc une énergie équivalente à environ $1/10\,000^{\text{ème}}$ de ce que nous procure le soleil. La perte de chaleur de la Terre est donc du même ordre de grandeur que notre consommation énergétique, mais trois ordres de grandeur inférieure à ce que nous recevons du soleil (figure 4.1).

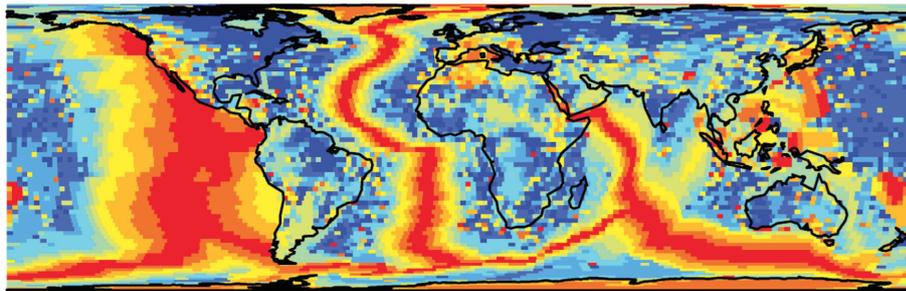
L'énergie thermique terrestre provient en grand partie de la radioactivité naturelle de quatre principaux isotopes radioactifs dont la désintégration produit de la chaleur : le thorium 232 (^{232}Th), l'uranium 238 (^{238}U), le potassium 40 (^{40}K) et l'uranium 235 (^{235}U), par ordre d'abondance. La demi-vie de ces éléments est grande, 0.7 Ga pour ^{235}U et 4.4 Ga pour ^{238}U par exemple. La production de chaleur par radioactivité naturelle est un phénomène durable à l'échelle de l'histoire de la Terre. Les concentrations de ces éléments radiogéniques dans la croûte et la manteau supérieur sont connues, ces éléments sont particulièrement concentrés dans la croûte continentale. On sait les extrapoler à peu près à l'ensemble de la Terre à l'aide d'un modèle de formation de planète à partir d'un corps chondritique. On montre alors que la puissance produite par la radioactivité naturelle est de 15 à 25 TW . Si l'on y ajoute le chaleur latente de cristallisation de la graine ($\sim 1 \text{ TW}$) et du noyau liquide ($\sim 1 \text{ TW}$), plus la chaleur engendrée par les déformations causées par les marées solides ($\sim 0.1 \text{ TW}$), on estime la puissance thermique de l'ensemble de ces sources à $23 \pm 4 \text{ TW}$. On voit donc qu'il manque environ la moitié des $\sim 46 \text{ TW}$ que perd la Terre. Cette moitié manquante provient du refroidissement séculaire de la Terre depuis la température initiale de la planète lors de sa formation, il y a 4.55 Ga .

Le flux géothermique présente des variations géographiques importantes, comme le montre la figure 4.5. L'essentiel de l'énergie thermique de la Terre est libérée dans les océans – les deux-tiers des 44 TW thermiques – le reste l'est par les continents.

- Le flux de chaleur moyen des continents est de $65 \text{ mW}/\text{m}^2$, avec des régions de flux de chaleur plus élevées qui correspondent généralement aux zones volcaniques actives (Andes par exemple) ou aux zones de rift (ouest des U.S.A par exemple, avec la croûte relativement fine de la Province du Basin and Range liée à une extension tectonique à grande échelle). Dans les régions continentales stables, on observe que le flux de chaleur en surface est fortement corrélé à la concentration d'isotopes

radiogéniques dans les roches. On estime qu'environ la moitié du flux de chaleur en surface résulte de la production de chaleur par les isotopes radiogéniques (U, Th, K). On observe aussi que le flux de chaleur en surface décroît systématiquement avec l'âge des roches, essentiellement en raison de l'érosion car les concentrations d'isotopes radiogéniques sont plus importantes en proche surface.

- Le flux de chaleur moyen dans les océans est de 101 mW/m^3 . La concentration d'isotopes radiogéniques est 10 fois plus faible dans la croûte océanique que continentale et contribue pour seulement 2% au flux de chaleur de surface. Dans les océans, la libération de chaleur est concentrée le long des dorsales, sur une largeur qui est fonction de leur vitesse d'accrétion. Cela indique que la lithosphère océanique se refroidit en s'éloignant des dorsales. Le chapitre "Forces et Rhéologie" utilise la variation de densité de lithosphère océanique avec le flux de chaleur pour expliquer, par isostasie thermique, sa relation âge – profondeur. On observe aussi des régions à fort flux thermique associées aux bassins arrière arcs du sud-est asiatique et du sud-ouest pacifique.



Final Estimate of Heat Flow (mW m^{-2}) (Area-weighted Median)

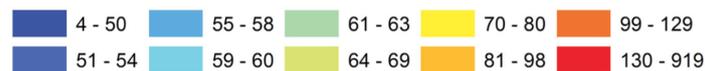


FIGURE 4.2 – Carte du flux de chaleur à la surface de la Terre. Cette carte résulte de la compilation de l'ensemble des mesures disponibles et fait l'hypothèse d'un modèle de conduction dans un demi-espace pour la croûte océanique de moins de 68 Ma (car les mesures de flux de chaleur y sont biaisées par la circulation hydrothermale), et une corrélation entre géologie de surface et flux de chaleur dans les régions où les données sont insuffisantes. Figure tirée de Davies, GCubed, 2013.

Si on extrapole le gradient géothermique mesuré en surface, disons de 30 K/km , à l'ensemble de la Terre, soit sur 6371 km , on obtient une température de $190\,000^\circ\text{C}$ au centre la Terre. Cette valeur est impossible, elle correspondrait à une matière à l'état de plasma alors que la sismologie montre que le noyau interne est solide. Si la chaleur se transmet essentiellement par conduction près de la surface, il doit exister un autre mode de transport de la chaleur en profondeur qui homogénéise la température et limite son augmentation. C'est la convection mantellique. On distingue généralement trois modes de transport de la chaleur :

- La conduction : la chaleur est transmise par les vibrations thermiques des atomes, qui se propagent de proche en proche. C’est un mode de transport de chaleur très lent. Il se modélise comme un processus de diffusion : le transport de chaleur (son flux) est proportionnel au gradient de température.
- L’advection : la chaleur est transportée par le déplacement d’un volume de matériau chaud. On emploie généralement le terme “advection” quand le transport se fait dans une seule direction, par exemple lors de la mise en place d’un dike volcanique qui advecte de la chaleur lors de la mise en place de magma dans une fracture verticale.
- La convection : le transport de chaleur se fait en circuit fermé entre une interface supérieure froide et inférieure chaude en combinant advection et conduction. Un volume de matériau initialement chaud a une flottabilité positive, il monte, se refroidit par conduction lors du transport, devient plus dense, tend alors à s’enfoncer, se réchauffe, et le cycle se répète. Une conséquence importante de ce mode de transport de la chaleur est d’homogénéiser la température sur la tranche de profondeur en convection.

4.3 Conduction

Nous allons montrer ici que le transfert de chaleur par conduction peut se traiter comme un processus de diffusion.

4.3.1 En une dimension

La loi de Fourier, donnée dans l’équation 4.1, dit que le flux de chaleur q est proportionnel au gradient de température. Le flux de chaleur s’y exprime en énergie par unité de temps et de surface : $\text{J s}^{-1} \text{m}^{-2} = \text{W m}^{-2}$. Le coefficient de proportionnalité k , que l’on appelle conductivité thermique, s’exprime donc en $\text{J s}^{-1} \text{m}^{-1} \text{K}^{-1}$. Imaginons un cube de roche, la chaleur y est transférée d’autant plus facilement que le gradient de température entre le haut (froid) et le bas (chaud) est important – et que la conductivité thermique de la roche est forte.

Écrivons aussi l’équilibre énergétique pour ce cube de roche. En effet, la quantité de chaleur (= énergie par unité de volume, exprimée en J m^{-3}) au sein de ce cube de roche augmente en fonction du temps ($\partial H/\partial t > 0$) si la chaleur qui y entre est supérieure à celle qui en sort ($(\partial q/\partial z > 0)$ – et inversement. Il y a de fait une relation de proportionnalité entre la variation de quantité de chaleur avec le temps et la variation de flux de chaleur avec la distance :

$$\frac{\partial H}{\partial t} \propto - \frac{\partial q}{\partial z} \quad (4.2)$$

Le signe – dans cette équation vient du fait que l’on considère que $\partial q = q_{out} - q_{in}$.

Nous avons aussi une relation entre quantité de chaleur et température. Cette relation décrit l’énergie H (ou quantité de chaleur) stockée dans un volume

de roche donné dont la température est T . Cette énergie dépend du type de roche/matériau. On montre qu'elle est proportionnelle à la température, à la densité du matériau ρ et à sa "chaleur spécifique" c_p . En d'autres termes, si la chaleur spécifique d'un matériau est faible, alors il faut beaucoup plus d'énergie (de Joules) pour que sa température augmente, disons, d'un degré que dans le cas d'un matériau de chaleur spécifique plus grande. On écrit :

$$H = T \rho c_p \quad (4.3)$$

où ρ est en kg m^{-3} et c_p en $\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$.

La combinaison des équations 4.2 et 4.3 donne :

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = - \frac{\partial q}{\partial z} \quad (4.4)$$

Cette équation nous dit que si la chaleur qui entre dans un volume de roche est supérieure à celle qui en sort ($\partial q / \partial z > 0$), alors la température y augmente – en se rappelant que, par convention, $\partial q = q_{out} - q_{in}$!

On insère maintenant dans l'équation précédente l'équation de Fourier (4.1) pour trouver :

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial (k \frac{\partial T}{\partial z})}{\partial z} \quad (4.5)$$

C'est la forme générale de l'équation de diffusion thermique en une dimension. Si k est indépendant de la profondeur z , alors cette équation se simplifie en :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (4.6)$$

où k , ρ et c_p font maintenant partie d'une nouvelle quantité $\kappa = k / (\rho c_p)$ qui est la diffusivité thermique et dépend donc du type de matériau considéré. Pour la majorité des roches crustales, $c_p \sim 1000 \text{ J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$ et $\rho = 2800 \text{ kg m}^{-3}$. La valeur de k varie plus mais est en moyenne de $2.75 \text{ J}^{-1} \text{ m}^{-1} \text{K}^{-1}$. De fait, on utilise souvent pour la diffusivité thermique la valeur de $\kappa = 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$.

Nous obtenons donc le résultat fondamental que le changement de température dans un matériau dépend de la courbure spatiale des isothermes dans ce milieu. Les coins d'un carré de métal (ou d'un toast!) se refroidissent donc plus vite que ses côtés ou son intérieur. La résolution de l'équation 4.6 n'est cependant pas simple et dépend d'hypothèses sur les conditions aux limites du système considéré.

4.3.2 En trois dimensions, et en coordonnées sphériques

L'équation 4.6 étant linéaire, elle peut se généraliser en trois dimensions en sommant selon x , y , et z . Il est raisonnable de supposer que la diffusivité thermique est identique dans ces trois directions. On a alors :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = \kappa \nabla^2 T \quad (4.7)$$

L'opérateur ∇^2 décrit la courbure des isothermes en trois dimensions.

La Terre étant un objet quasi-sphérique, il est intéressant d'exprimer l'équation précédente de coordonnées sphérique. La conversion cartésien \rightarrow sphérique demande un peu de mathématique, que nous ne rappellerons pas ici, pour trouver :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (4.8)$$

où r est la distance radiale du point considéré.

Lord Kelvin en 1864 – et avant lui Fourier en 1820! – ont appliqué l'équation précédente pour calculer l'âge de la Terre à partir du flux de chaleur actuel en surface. Kelvin fit les hypothèses que (1) la Terre avait une température homogène de 4000 °C lors de sa formation, (2) la température de surface est restée constante depuis lors, et (3) le refroidissement de la Terre s'effectue uniquement par conduction. Kelvin utilisa alors l'équation 4.8 pour trouver que l'âge de la Terre devait être de l'ordre de 100 Ma.

Nous savons aujourd'hui que ce résultat était faux pour deux raisons essentielles :

1. Les roches terrestres produisent de la chaleur par radioactivité naturelle. La radioactivité était inconnue du temps de Kelvin. Cette radioactivité augmente le temps de refroidissement de la Terre.
2. La convection dans le manteau y homogénéise la température et diminue le temps de refroidissement de la Terre.

La somme de ces deux processus fait que la Terre se refroidit beaucoup plus lentement que si l'on assistait simplement à la perte de chaleur par conduction d'une sphère de température initiale donnée.

4.4 Production de chaleur

L'équation 4.3 donne la relation entre la quantité de chaleur H stockée dans un volume de roche donné dont la température est T . On peut donc relier la **production de chaleur**, c'est-à-dire la variation de H avec le temps, à la variation de température avec le temps comme suit :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{S}{\rho c_p} \quad (4.9)$$

S est le taux de production volumique de chaleur en $\text{J s}^{-1} \text{ m}^{-3} = \text{W m}^{-3}$. Si $S > 0$, alors de la chaleur est produite et la température de la roche augmente. À l'inverse, si $S < 0$ de la chaleur est consommée et la roche se refroidit.

Dans le cas d'une production de chaleur interne, en plus de la conduction d'une chaleur aux limites, on peut donc écrire l'équilibre thermique d'un cube de roche :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{S}{\rho c_p} \quad (4.10)$$

La première partie du second terme de cette équation est le terme diffusif, qui quantifie la capacité de la roche à permettre le transport de chaleur par conduction. La seconde partie du second terme de cette équation est le terme de production de chaleur interne de la roche. Si le temps caractéristique de la

diffusion est beaucoup plus long que la durée d'un événement de production de chaleur, alors le changement de température sera dominé par la production de chaleur. À l'inverse, si le temps caractéristique de la diffusion est petit par rapport à la durée d'un événement de production de chaleur, alors celle-ci sera évacuée rapidement. Dans ce cas la production de chaleur, même si elle est importante, aura peu d'influence sur la température.

4.5 Le géotherme de la lithosphère continentale

4.5.1 L'équation fondamentale

Nous avons vu dans le chapitre "Les Objets de la Géodynamique" que la lithosphère est définie thermiquement comme la pellicule terrestre externe dans laquelle la chaleur est transportée par conduction, par opposition à la convection dans l'asthénosphère sous-jacente. La lithosphère est donc une couche limite thermique : elle perd de la chaleur vers l'espace par sa surface, perte qui est compensée par un flux de chaleur venant du manteau et par la production de chaleur radiogénique surtout dans la croûte. Une lithosphère non perturbée par un orogène ou un rift a un profil de température – un géotherme – qui est constant dans le temps : on dit qu'il est à l'état stationnaire. En d'autres termes, il y a l'équilibre entre la chaleur qui entre et celle qui sort. Le profil de température ne change pas, on a donc $\partial T/\partial t = 0$. L'équation 4.10 se simplifie alors :

$$\frac{k}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{S}{\rho c_p} = 0 \quad (4.11)$$

soit :

$$k \frac{d^2 T}{dz^2} = -S \quad (4.12)$$

Cette équation, qui n'est plus aux dérivées partielles car elle ne contient plus qu'une seule variable z , est celle qu'il va falloir intégrer pour déterminer un géotherme.

Le cas le plus simple est celui où la production de chaleur radiogénique serait nulle ($S = 0$), l'intégration de (4.12) donne alors de manière triviale :

$$T = C_1 z + C_2 \quad (4.13)$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes d'intégration qu'il faut maintenant déterminer à partir de conditions aux limites géologiques. On peut fixer par exemple la température à $z = 0$ (en surface). Le plus simple est de choisir la valeur de 0 de telle sorte que $C_2 = 0$. On peut aussi fixer la température à la base de la lithosphère z_L à la valeur de T_L , que l'on prend généralement égale à 1200°C. Dans ce cas on a évidemment $C_1 = T_L/z_L$. Le géotherme est une droite d'équation :

$$T = \frac{T_L}{z_L} z \quad (4.14)$$

Calculons le flux de chaleur correspondant en utilisant l'équation 4.1, qui donne :

$$q = k \frac{T_L}{z_L} \quad (4.15)$$

Avec les valeurs numériques $k = 2-3 \text{ W m}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$, $T_L = 1200^\circ\text{C}$ et $Z_L = 100 \text{ km}$ on trouve $q = 24-36 \text{ mW m}^2$. Cette valeur est bien inférieure au flux de chaleur moyen mesuré, de l'ordre de 65 mW m^2 . Cette différence est due principalement à la production de chaleur radiogénique dans la croûte, qui n'était pas prise en compte ici.

4.5.2 Contribution de la chaleur radiogénique

Une valeur typique pour la production de chaleur radiogénique dans des roches échantillonnées en surface est $S = 3 \text{ W m}^{-3}$. Si l'on suppose que cette valeur est valide pour toute la croûte, cela correspond à un flux de chaleur $q = S z_c$, soit $q = 30 \text{ mW m}^{-2}$ pour une croûte d'épaisseur $z_c = 30 \text{ km}$. L'équation de Fourier (4.1) donne alors le géotherme associé $dT/dZ = q/k = 50^\circ\text{C km}^{-1}$ pour une conductivité thermique $k = 3 \text{ W m}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$. Cette valeur, à laquelle il faudrait encore ajouter la contribution de la chaleur venant du manteau, est bien supérieure au gradient géothermique mesuré sur Terre. Cela implique donc que la production de chaleur radiogénique doit être supérieure en surface que dans la moyenne de la croûte.

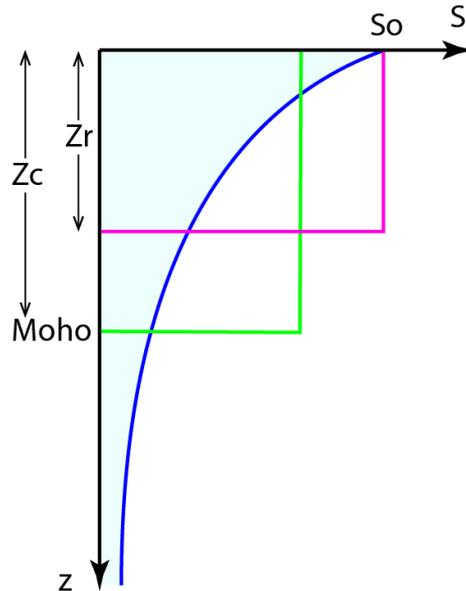


FIGURE 4.3 – Quelques conditions aux limites possibles pour déterminer le géotherme de la lithosphère continentale stable. La surface sous chacune des courbes rouge, bleue et verte donne la production de chaleur radiogénique totale, qui est (schématiquement ici) la même pour les trois hypothèses. Vert et magenta : production de chaleur radiogénique constante avec la profondeur jusqu'à, respectivement, le Moho ou z_{rad} . Bleu : production de chaleur radiogénique diminuant exponentiellement avec la profondeur selon l'équation 4.16.

La distribution de production de chaleur radiogénique S avec la profondeur n'est pas connue directement. On doit donc faire une hypothèse, et plusieurs

sont possibles, schématisées sur la figure 4.3. On peut par exemple supposer que S est constant jusqu'à une certaine profondeur, puis nul en-dessous. On peut aussi supposer que S décroît de manière exponentielle avec la profondeur :

$$S(z) = S_0 e^{-z/h_t} \quad (4.16)$$

où h_t est la profondeur caractéristique à laquelle la production de chaleur radiogénique est $1/e$ de la production en surface S_0 .

Enfin, l'intégration de l'équation 4.12 va nécessiter des conditions aux limites. Celles-ci peuvent soit de type flux de chaleur, soit de type température. Ce second cas semble plus logique car on fait généralement l'hypothèse que la température de la base de la lithosphère est de 1200°C . Mais on peut aussi faire l'hypothèse que le flux de chaleur à la profondeur du Moho (en tous cas en-dessous de la région qui produit de la chaleur radiogénique) est constant et vaut q_m .

4.5.3 Conditions aux limites en flux de chaleur

Production de chaleur radiogénique constante

Nous nous plaçons maintenant dans le cas de conditions aux limites en flux de chaleur. Considérons tout d'abord le cas d'une production de chaleur radiogénique constante de la surface jusqu'au Moho. L'équation à intégrer, pour la croûte, s'écrit donc :

$$k \frac{d^2 T}{dz^2} = -S_0 \quad (4.17)$$

Une première intégration donne :

$$k \frac{dT}{dz} = S_0 z + C_1 \quad (4.18)$$

La constante C_1 se détermine en supposant un flux de chaleur au Moho, de profondeur z_c , est constant et vaut q_m . Comme tous les termes de l'équation précédente sont des flux, on a :

$$C_1 = S_0 z_c + q_m \quad (4.19)$$

On insère C_1 dans l'équation différentielle du premier degré ci-dessus pour obtenir :

$$k \frac{dT}{dz} = S_0 z + S_0 z_c + q_m \quad (4.20)$$

que l'on intègre pour obtenir :

$$k T = -\frac{S_0 z^2}{2} + S_0 z_c z + q_m z + C_2 \quad (4.21)$$

On détermine la constante C_2 en posant que la température à $z = 0$ est $T = 0$. On trouve $C_2 = 0$. On a donc :

$$T = \frac{S_0 z}{k} \left(z_c - \frac{z}{2} \right) + \frac{q_m z}{k} \quad (4.22)$$

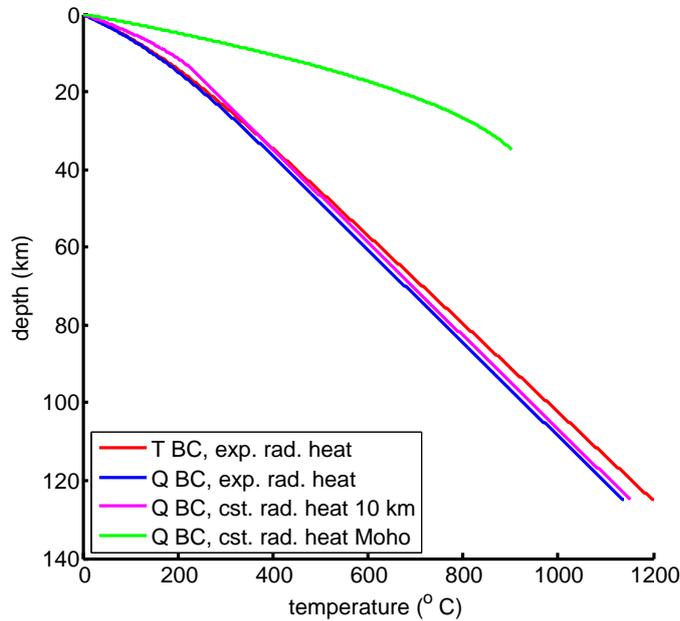


FIGURE 4.4 – Géotherme d’une lithosphère continentale stable pour différentes hypothèses concernant la production de chaleur radiogénique et les conditions aux limites. Vert et magenta : production de chaleur radiogénique constante entre 0 et, respectivement, 35 km et 10 km. Ces deux cas supposent un flux de chaleur donné à la profondeur du Moho. Bleu et rouge : production de chaleur radiogénique variant de manière exponentielle avec la profondeur. Conditions aux limites en flux de chaleur pour la courbe bleue, en température pour la courbe rouge. Valeurs numériques utilisées : température à la base de la lithosphère $T_L = 1200^\circ\text{C}$, “skin depth” de la décroissance exponentielle de production de chaleur radiogénique $h_r = 10$ km, production de chaleur radiogénique $S_0 = 3 \times 10^{-6} \text{ W m}^{-3}$, conductivité thermique $k = 3 \text{ J s}^{-2} \text{ m}^{-1} \text{ K}^{-1}$, flux de chaleur au Moho $q_m = 0.025 \text{ W m}^{-2}$, $z_{rad} = 15$ km.

Pour les valeurs numériques données ci-dessous, on trouve une température de 903°C à la profondeur du Moho (courbe verte sur la figure 4.4). Cette valeur est très improbable car elle placerait les roches dominantes à cette profondeur, de type granite, sous le solidus. En d’autres termes, on devrait y observer de la fusion partielle, ce qui n’est pas le cas en général, sauf dans des situations d’hyper-extension continentale où la lithosphère est très amincie (type Basin and Range?). La raison pour cela est bien sûr que la production de chaleur radiogénique n’est pas constante sur toute l’épaisseur de la croûte supérieure, mais est concentrée dans sa partie superficielle.

Considérons alors le cas d’une production de chaleur radiogénique constante de la surface jusqu’à une profondeur z_{rad} . L’intégration doit maintenant se faire de

la surface à z_{rad} , selon la même procédure que ci-dessus. On trouve donc :

$$T = \frac{S_0 z}{k} \left(z_{rad} - \frac{z}{2} \right) + \frac{q_m z}{k} \quad (4.23)$$

On poursuit le géotherme vers le bas au travers d'un domaine où la production de chaleur radiogénique est nulle. La température y augmente donc linéairement avec la profondeur selon :

$$T = \frac{q_m}{k} (z - z_{rad}) \quad (4.24)$$

Le géotherme qui résulte de cette hypothèse est reporté en magenta sur la figure 4.4. Pour les valeurs numériques données ci-dessous, on trouve une température de 402°C à la profondeur du Moho. On trouve que l'on atteint la température de 1200°C à une profondeur proche de 125 km. Ces valeurs sont raisonnables.

Production de chaleur radiogénique exponentielle

Considérons maintenant le cas d'une production de chaleur radiogénique qui décroît exponentiellement avec la profondeur selon l'équation 4.16. L'équation à intégrer s'écrit donc :

$$k \frac{d^2 T}{dz^2} = -S_0 e^{-z/h_r} \quad (4.25)$$

Une première intégration donne :

$$k \frac{dT}{dz} = h_r S_0 e^{-z/h_r} + C_1 \quad (4.26)$$

La constante C_1 se détermine en posant que flux de chaleur à grande profondeur est constant et vaut q_m . En d'autres termes, $q \rightarrow q_m$ quand $z \rightarrow \infty$ (et donc $e^{-z/h_r} \rightarrow 0$). Comme tous les termes de l'équation précédente sont des flux, on a :

$$C_1 = q_m \quad (4.27)$$

On insère C_1 dans l'équation différentielle du premier degré ci-dessus que l'on intègre pour obtenir :

$$k T = -h_r^2 S_0 e^{-z/h_r} + q_m z + C_2 \quad (4.28)$$

On détermine la constante C_2 en posant que la température à $z = 0$ est T_0 . On trouve :

$$C_2 = h_r^2 S_0 + T_0 \quad (4.29)$$

Le géotherme dans la croûte est donc finalement donné par :

$$k T = -h_r^2 S_0 e^{-z/h_r} + q_m z + h_r^2 S_0 + T_0 \quad (4.30)$$

Comme précédemment, on prolonge le géotherme vers le bas au travers d'un domaine où la production de chaleur radiogénique est nulle. La température y augmente donc linéairement avec la profondeur selon :

$$T = \frac{q_m}{k} (z - z_c) \quad (4.31)$$

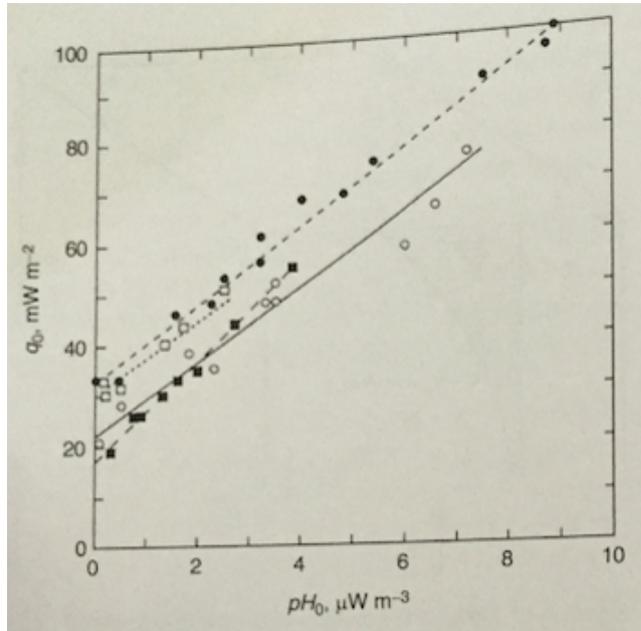


FIGURE 4.5 – Relation entre flux de chaleur en surface q_0 et la production de chaleur radiogénique $S_0 = \rho H_0$ dans divers contextes tectoniques. Carrés noirs = Sierra Nevada, east des U.S.A = cercles noirs, Norvège et Suède = cercles blancs, carrés blancs = bouclier canadien. On observe une relation linéaire entre q_0 et S_0 , conformément à la prédiction de l'équation 4.33. Les pentes des régressions linéaires donnent la “*skin depth*” h_r de la production de chaleur radiogénique, l'intersection avec l'axe des ordonnées donne q_m .

La courbe bleue sur la figure 4.4 montre le géotherme selon ces hypothèses. Il implique une température proche de 1200°C à la base de la lithosphère ($z_L = 125$ km) et de 389°C à la profondeur du Moho, des valeurs raisonnables.

On note au passage que l'équation 4.26 donne le flux de chaleur en fonction de la profondeur, car elle peut s'écrire :

$$q(z) = h_r S_0 e^{-z/h_r} + q_m \quad (4.32)$$

Le flux de chaleur en surface, où $z = 0$, est donc donné par :

$$q_0 = q_m + h_r S_0 \quad (4.33)$$

On obtient donc qu'une production de chaleur radiogénique décroissant exponentiellement avec la profondeur implique un flux de chaleur en surface qui est une fonction linéaire de la production de chaleur radiogénique S_0 . Ce résultat doit donc aussi permettre de déterminer le flux de chaleur mantellique q_m et la “*skin depth*” h_r car on sait mesurer le flux de chaleur en surface q_0 et la production de chaleur radiogénique S_0 dans divers contextes tectoniques. La figure 4.33 montre des données réelles. On observe bien une relation linéaire entre q_0 et S_0 . La pente de la droite est h_r , qui est proche de 10 km dans tous les cas. L'intersection avec l'axe des ordonnées donne q_m , ce qui est très pratique.

4.5.4 Conditions aux limites en température

Si l'on définit la lithosphère thermiquement, il paraît logique d'imposer une température à la base de celle-ci plutôt qu'un flux de chaleur au niveau du Moho. On utilise par exemple $T_L = 1280^\circ\text{C}$ pour $z_L = 125 \text{ km}$.

Faisons à nouveau l'hypothèse d'une production de chaleur radiogénique qui décroît exponentiellement avec la profondeur selon l'équation 4.16, cette fois-ci sur la totalité de l'épaisseur de la lithosphère. L'équation à intégrer est 4.25, comme ci-dessus. On obtient, après deux intégrations :

$$kT = -h_r^2 S_0 e^{-z/h_r} + C_1 z + C_2 \quad (4.34)$$

La constante C_2 se détermine en posant que la température à $z = 0$ est $T = 0$. On trouve :

$$C_2 = h_r^2 S_0 \quad (4.35)$$

La constante C_1 se détermine en réarrangeant l'équation ci-dessus :

$$C_1 = \frac{zT_L}{z_L} + \frac{h_r^2 S_0 e^{-z_L/h_r}}{z_L} - \frac{C_2}{z_L} \quad (4.36)$$

On insère les deux constantes d'intégration pour trouver :

$$T = \frac{zT_L}{z_L} + \frac{h_r^2 S_0}{k} \left(\left(1 - e^{-z/h_r}\right) - \left(1 - e^{-z_L/h_r}\right) \frac{z}{z_L} \right) \quad (4.37)$$

La courbe rouge sur la figure 4.4 montre le géotherme selon ces hypothèses.

4.6 Refroidissement d'un demi-espace

Un demi-espace est simplement un espace infini vers le bas et limité vers le haut par une discontinuité, par exemple la surface terrestre. On peut utiliser cette simplification pour décrire, par exemple, une Terre initiale de température donnée se refroidissant par conduction – c'est le problème de l'âge de la Terre tel que l'avais posé Lord Kelvin en 1864. On peut aussi décrire la lithosphère océanique comme un demi-espace qui perd sa chaleur par conduction. Il semble plus logique dans ce cas de modéliser la lithosphère océanique comme une plaque plutôt qu'un demi-espace, mais (1) le demi-espace permet déjà d'expliquer beaucoup des observations océaniques (flux de chaleur et profondeur du plancher océanique n fonction de la distance à la ride d'accrétion), (2) le problème "plaque" est mathématiquement plus compliqué que celui du demi-espace, et (3) historiquement, c'est l'approximation demi-espace qui a permis de comprendre, au premier ordre, la profondeur des océans.

4.6.1 L'équation générale

Contrairement à la section précédente où nous avons fait l'hypothèse d'un régime stationnaire ($\partial T/\partial t = 0$) pour calculer le géotherme d'une lithosphère continentale stable, nous devons maintenant autoriser la température à varier

en fonction de la profondeur et du temps. Réécrivons l'équation de la chaleur en une dimension spatiale z , en l'absence d'advection ou de production de chaleur :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (4.38)$$

où T est la température, z la profondeur, t le temps et κ la constante de diffusivité thermique (en $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$) :

$$\kappa = \frac{k}{\rho c_p} \quad (4.39)$$

où ρ est la densité du matériau, k est la conductivité thermique et c_p est la chaleur spécifique. Dans le cas d'un demi-espace qui se refroidit par conduction par sa surface les conditions aux limites sont :

$$\begin{aligned} T &= T_L \text{ au temps } t = 0 \\ T &= T_s \text{ à la profondeur } z = 0 \\ T &\rightarrow T_i \text{ pour la profondeur } z \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Il est pratique d'introduire une variable adimensionnelle nouvelle :

$$\theta = \frac{T - T_L}{T_s - T_L} \quad (4.41)$$

Comme θ est une fonction ni de t ni de z , l'équation de la chaleur ci-dessus n'est pas modifiée et s'écrit :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \quad (4.42)$$

Les conditions aux limites sont plus simples, elles deviennent :

$$\begin{aligned} \theta &= 0 \text{ au temps } t = 0 \\ \theta &= 1 \text{ à la profondeur } z = 0 \\ \theta &\rightarrow 0 \text{ pour la profondeur } z \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (4.43)$$

La résolution de cette équation aux dérivées partielles n'est pas triviale mais est un problème classique en algèbre linéaire. La méthode classique de résolution est dite par "similarité". Elle est basée sur l'idée de combiner les deux variables t et z en une seule variable sans dimension : la variable de similarité. On peut par exemple remarquer que la quantité $\sqrt{\kappa t}$ a la dimension d'une distance : c'est en fait la "distance caractéristique de diffusion thermique", soit la distance à laquelle l'effet d'un changement de température instantanée et local est ressenti après un temps t .

Définissons une variable de similarité comme suit :

$$\eta = \frac{z}{2\sqrt{\kappa t}} \quad (4.44)$$

Il faut maintenant réécrire l'équation 4.42 en terme de η . On utilise la *chain rule* pour écrire la différentiation en fonction du temps :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{d\theta}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{d\theta}{d\eta} \left(-\frac{y}{4t\sqrt{\kappa t}} \right) = \frac{d\theta}{d\eta} \left(-\frac{\eta}{2t} \right) \quad (4.45)$$

et en fonction de la distance :

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{d\theta}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{d\theta}{d\eta} \left(\frac{1}{2\sqrt{\kappa t}} \right) \quad (4.46)$$

avec une seconde différentiation qui donne :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = \frac{1}{2\sqrt{\kappa t}} \frac{d^2 \theta}{d\eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{4\kappa t} \frac{d^2 \theta}{d\eta^2} \quad (4.47)$$

L'équation 4.42 peut maintenant s'écrire :

$$-\eta \frac{d\theta}{d\eta} = \frac{1}{2} \frac{d^2 \theta}{d\eta^2} \quad (4.48)$$

Il s'agit d'une équation différentielle ordinaire. Son intégration demandera deux conditions aux limites qui se déduisent des 3 conditions aux limites données plus haut pour θ :

$$\begin{aligned} \theta(y, 0) = 0 & \text{ devient } \theta(\infty) = 0 \\ \theta(0, t) = 1 & \text{ devient } \theta(0) = 1 \\ \theta(\infty, t) = 0 & \text{ devient } \theta(\infty) = 0 \end{aligned} \quad (4.49)$$

Une méthode classique pour intégrer l'équation différentielle 4.48 consiste à introduire une variable intermédiaire $\phi = d\theta/d\eta$ pour la réécrire :

$$-\eta \phi = \frac{1}{2} \frac{d\phi}{d\eta} \quad (4.50)$$

soit :

$$-\eta d\eta = \frac{1}{2} \frac{d\phi}{\phi} \quad (4.51)$$

que l'on intègre facilement sous la forme :

$$-\eta^2 = \ln \phi - \ln c_1 \quad (4.52)$$

où $\ln c_1$ est la première constante d'intégration. Prenons l'exponentielle des termes de cette dernière équation, on obtient :

$$\phi = c_1 e^{-\eta^2} \quad (4.53)$$

D'après la définition de la variable intermédiaire ϕ , on a donc :

$$\frac{d\theta}{d\eta} = c_1 e^{-\eta^2} \quad (4.54)$$

que l'on intègre en écrivant :

$$\theta = c_1 \int_0^\eta e^{-\eta'^2} d\eta' + c_2 \quad (4.55)$$

La condition aux limites $\theta(0) = 1$ implique que $c_2 = 1$. On a donc :

$$\theta = c_1 \int_0^\eta e^{-\eta'^2} d\eta' + 1 \quad (4.56)$$

L'autre condition aux limites $\theta(\infty) = 0$ implique que :

$$0 = c_1 \int_0^{\infty} e^{-\eta'^2} d\eta' + 1 \quad (4.57)$$

La valeur de l'intégrale est connue et vaut :

$$\int_0^{\infty} e^{-\eta'^2} d\eta' = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (4.58)$$

donc la constante d'intégration c_1 vaut $-2/\sqrt{\pi}$ et on obtient :

$$\theta = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta} e^{-\eta'^2} d\eta' + 1 \quad (4.59)$$

Le second terme de cette équation est une fonction connue appelée "fonction erreur" *erf* :

$$\text{erf}(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta} e^{-\eta'^2} d\eta' \quad (4.60)$$

dont la fonction erreur complémentaire est $\text{erfc}(\eta) = 1 - \text{erf}(\eta)$.

On a donc finalement la solution recherchée, en remplaçant θ par sa définition :

$$\frac{T - T_L}{T_S - T_L} = \text{erfc}\left(\frac{z}{\sqrt{4\kappa t}}\right) \quad (4.61)$$

que l'on va réarranger en écrivant :

$$\frac{T - T_L}{T_S - T_L} = 1 - \frac{T - T_S}{T_S - T_L} \quad (4.62)$$

soit, en terme de T :

$$T = T_S + (T_L - T_S) \text{erf}\left(\frac{z}{\sqrt{4\kappa t}}\right) \quad (4.63)$$

4.6.2 Application au refroidissement de la lithosphère océanique

La lithosphère océanique consiste, en la simplifiant à l'extrême, en un matériau asthénosphérique (manteau) refroidit dans lequel la chaleur se transporte par conduction. Simplifions le processus d'accrétion océanique – figure 4.6 – en imaginant une colonne de manteau de température T_L qui se met en place à l'axe de la dorsale et se refroidit instantanément en surface à la température T_S , température qu'elle conserve en surface à mesure qu'elle s'éloigne de la dorsale. Des colonnes de roche à des distances x croissantes d'une dorsale océanique se refroidissent depuis un temps t qui est aussi croissant avec la distance à la dorsale. On peut donc appliquer le modèle décrit par l'équation 4.63 à des colonnes de roches s'éloignant d'une dorsale à une vitesse $u = x/t$ et qui perdent leur chaleur par conduction en une dimension, vers le haut.

Ce modèle de demi-espace qui se refroidit en fonction du temps en perdant de la chaleur par sa surface est très simple. Le flux de chaleur y est seulement fonction du refroidissement et n'inclut ni production ou consommation de chaleur à l'intérieur de la lithosphère océanique, ni advection de chaleur sous celle-ci.

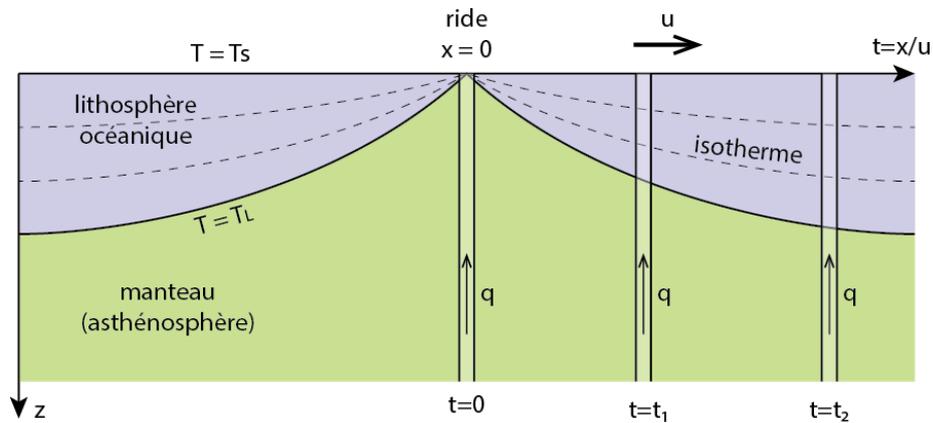


FIGURE 4.6 – Représentation schématique du refroidissement d’une colonne de manteau de température T_L à l’aplomb d’une dorsale, qui s’éloigne à une vitesse u . Des colonnes de roches à une distance $x = u/t$ croissante se refroidissent depuis un temps t qui est aussi croissant avec la distance à la dorsale.

Forme des isothermes

La forme des isothermes est donnée directement par l’équation 4.63. $T = \text{constante}$ implique que $z/\sqrt{4\kappa t} = \text{constante}$. La solution en z est un ensemble de paraboles telles que $z \propto \sqrt{t}$. Comme $t = x/u$, la forme de ces isothermes dans l’espace est aussi un ensemble de paraboles telles que $z \propto \sqrt{x/u}$.

La figure 4.7 donne la forme de ces isothermes en racine carré du temps pour un ensemble de températures. L’isotherme 1200°C est proche de la base de la lithosphère. Il implique une épaisseur de lithosphère de l’ordre de 120 km pour un âge de 80 Ma et 168 km pour 150 Ma. La comparaison entre ce modèle en demi-espace et l’épaisseur de la lithosphère océanique déterminée sismologiquement est bonne jusqu’à environ 60 Ma, puis se dégrade. C’est une limitation du modèle en demi-espace.

On observe aussi un désaccord entre modèle et données à proximité de la dorsale, là où les isothermes sont très pentés. Il s’agit encore d’une limitation de notre modèle, qui fait l’hypothèse d’une conduction de chaleur uniquement dans la direction verticale z . Cette hypothèse est manifestement de moins en moins valide à mesure que l’on s’approche d’une dorsale. Par ailleurs, le transport de chaleur aux dorsales ne se fait pas uniquement par conduction, mais aussi par advection de chaleur liée à la circulation hydrothermale. L’eau océanique s’infiltré par les fractures des roches crustales, se réchauffe, et remonte quand sa température lui donne une flottabilité positive par rapport au milieu ambiant. Cette circulation hydrothermale est superficielle (<1 km) mais permet une évacuation de chaleur très efficace. On estime actuellement que 25% de la chaleur terrestre est évacuée par les fluides.

Les “fluides hydrothermaux”, qui pénètrent les roches de la croûte océanique à des températures élevées (d’autant plus que la température d’ébullition augmente avec la pression : elle est de 400°C à 3000 m de profondeur), sont en

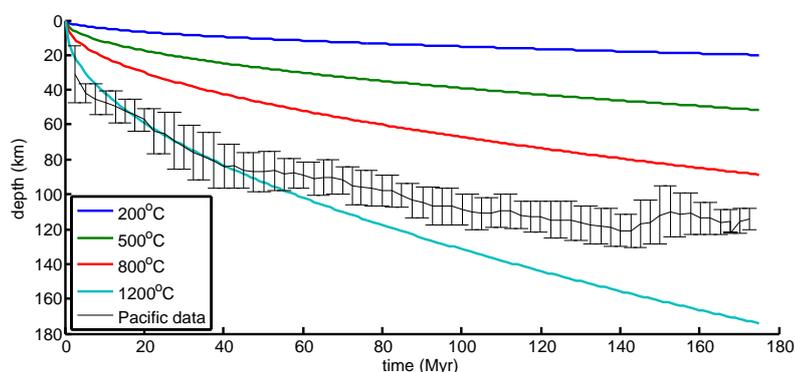


FIGURE 4.7 – Isothermes de la lithosphère océanique déduits de l'équation 4.63, avec $\kappa = 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, $T_L = 1330^\circ\text{C}$ et $T_S = 0^\circ\text{C}$. La courbe noire et ses barres d'erreurs représentent la profondeur de l'interface lithosphère-manteau dans l'océan Pacifique déduite d'une tomographie sismique globale des ondes de surface (d'après Burgos et al., JGR 2013).

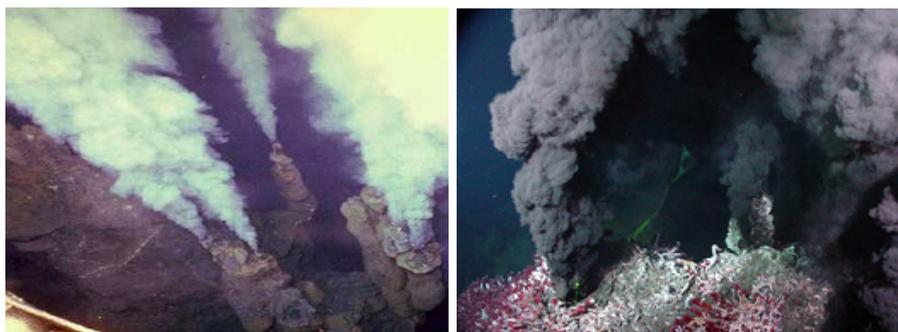


FIGURE 4.8 – Gauche : “fumeurs blancs” photographiés le long de la dorsale du bassin arrière-arc de Lau (sud-ouest Pacifique) à une profondeur de 1700 m (crédits Ifremer). Droite : “fumeurs noirs” sur une dorsale océanique, autour duquel s'est installé un écosystème chémo-autotrophe qui tire son énergie du H_2S émis par ces fumeurs.

capacité d'y dissoudre des éléments chimiques et de les remonter en surface (figure 4.8). Ils sont dispersés sur le plancher océanique et, pour certains de ces éléments chimiques lessivés de la croûte océanique, participent au métabolisme d'organismes profonds très variés.

Flux de chaleur

Le flux de chaleur à la surface de la lithosphère océanique s'obtient à partir de la loi de Fourier (équation 4.1). On écrit donc la dérivée de la température en

fonction de la profondeur donnée par l'équation 4.63 :

$$\begin{aligned}
 q &= -k \frac{\partial T}{\partial z} \\
 &= k(T_S - T_L) \frac{\partial}{\partial z} \left(\operatorname{erf} \frac{z}{\sqrt{4\kappa t}} \right) \\
 &= \frac{k(T_S - T_L)}{\sqrt{4\kappa t}} \frac{d}{dz} (\operatorname{erf}(\eta)) \\
 &= \frac{k(T_S - T_L)}{\sqrt{4\kappa t}} \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\eta^2} \right)
 \end{aligned} \tag{4.64}$$

On évalue ce résultat à $z = 0$, soit $\eta = 0$ pour trouver :

$$q_0 = \frac{k(T_S - T_L)}{\sqrt{\pi\kappa t}} \tag{4.65}$$

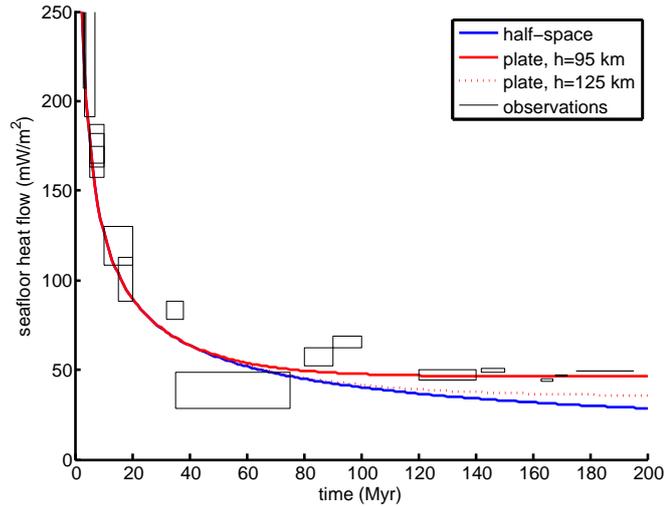


FIGURE 4.9 – Flux de chaleur au plancher océanique en fonction de son âge. Les données sont issues de Sclater et al. (1980) et Lister et al. (1990). Trois modèles sont comparés : le demi-espace, et deux modèles de plaques avec $z_L = 95$ et 125 km. Les calculs utilisent les équations 4.65 et 4.68 avec les valeurs suivantes : $T_S = 0^\circ\text{C}$, $T_L = 1330^\circ\text{C}$, $k = 3.3 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$, $\kappa = 1.2 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$.

La figure 4.9 montre que le modèle de refroidissement en demi-espace est en bon accord avec les observations jusqu'à environ 60 km des dorsales. Au-delà de cette distance, le modèle prévoit (logiquement) que le flux de chaleur continue de diminuer alors que les observations indiquent qu'il se stabilise aux alentours de 50 mW m^{-2} .

Un meilleur accord est obtenu pour les âges > 60 Ma si l'on traite la lithosphère océanique non plus comme un demi-espace qui se refroidit par le haut, mais comme une "plaque" qui se refroidit par le haut mais qui est chauffée par-dessous.

Ce modèle utilise les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned} T &= T_L \text{ au temps } t = 0 \\ T &= T_s \text{ à la profondeur } z = 0 \\ T &= T_l \text{ à la profondeur } z = z_L \end{aligned} \quad (4.66)$$

La dernière condition fait toute la différence avec le modèle en demi-espace. Elle implique que la base de la lithosphère est chauffée par dessous de telle sorte que sa base est maintenue à la température T_L .

On montre que, dans le cas d'un modèle de plaque, la température évolue en fonction du temps selon :

$$T = T_S + (T_L - T_S) \left(\frac{z}{z_L} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \exp\left(-\frac{\kappa\pi^2 n^2 t}{z_L^2}\right) \sin\left(\frac{n\pi z}{z_L}\right) \right) \quad (4.67)$$

et le flux de chaleur en surface selon :

$$q_0 = \frac{k(T_L - T_S)}{z_L} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\kappa\pi^2 n^2 t}{z_L^2}\right) \right) \quad (4.68)$$

La figure 4.9 montre qu'un bien meilleur accord est obtenu au-delà de 60 km des dorsales avec un modèle de plaque. Le fait de limiter la croissance en épaisseur de la couche limite thermique en fixant l'épaisseur de la plaque (troisième des conditions aux limites ci-dessus) empêche aux flux de chaleur de diminuer infiniment.

Profondeur des océans

À mesure que la lithosphère océanique s'éloigne d'une dorsale son épaisseur augmente (figure 4.7). De fait, sa température moyenne diminue et, par conséquent, sa densité moyenne augmente. Dans le chapitre Forces et Rhéologie nous avons appliqué l'isostasie à cette situation en décrivant l'évolution de la température de la lithosphère océanique en fonction du temps selon l'équation 4.63. Nous avons montré que la profondeur de l'océan par rapport à une dorsale de référence est proportionnelle à la racine carré du temps, selon l'équation :

$$w = \frac{2\alpha\rho_m(T_l - T_s)}{\rho_m - \rho_w} \sqrt{\frac{\kappa t}{\pi}} \propto \sqrt{t} \quad (4.69)$$

où α est le coefficient d'expansion thermique ($3 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ pour la plupart des roches) qui relie densité et température selon :

$$\rho_m(T) = \rho_m [1 + \alpha (T_l - T)] \quad (4.70)$$

La figure 4.69 montre que l'accord entre les observations et un modèle simple d'isostasie thermique est très bon pour des lithosphères dont l'âge ne dépasse pas 80 Ma. Au-delà, l'accord entre les observations et le modèle se dégrade de manière significative. Le plancher océanique est trop haut par rapport aux prédictions du modèle. L'explication majeure de ce désaccord est que la lithosphère océanique ne se refroidit pas aussi rapidement que le prédit un modèle de demi-espace conductif car elle est chauffée par le manteau sous-jacent. Cela se modélise par le modèle de plaque présenté plus haut.

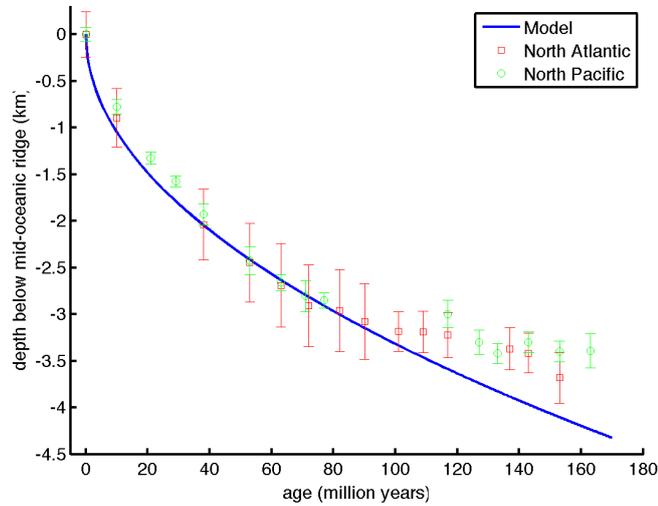


FIGURE 4.10 – Evolution de la profondeur du plancher océanique en fonction de son âge. La courbe bleue montre la profondeur du plancher océanique par rapport à la dorsale en fonction de l’âge de celui-ci selon l’équation 4.63 avec $\rho_m = 3200 \text{ kg/m}^3$, $\rho_w = 1000 \text{ kg/m}^3$, $\alpha = 3 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1}$, $T_L = 1200 \text{ C}$, $T_S = 0 \text{ C}$, $\kappa = 1 \times 10^{-6} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$. Les symboles sont des observations bathymétriques corrigées du poids des sédiments (Parsons et Sclater, 1977).

Âge de la Terre

4.7 Advection

4.8 Convection

4.8.1 Généralités

Dans le manteau sous-lithosphérique, les températures sont telles ($> 1300^\circ\text{C}$) que les roches (péridotites) s’y déforment rapidement par fluage (voir chapitre “Forces et Rhéologie”). Le moteur de ces déformations – et donc les déplacements de matière associés – est la gravité qui agit sur les gradients de densité qui existent au sein du manteau : en d’autres termes, les gradients d’énergie potentielle de gravité.

Les déplacements de matière dans le manteau transportent de la chaleur (advection) et peuvent en échanger avec leur encaissant (conduction). Dans certaines conditions, la combinaison de ces transports/échanges de chaleur, du gradient thermique du manteau et de la rhéologie des matériaux (= leur capacité à se déformer) peut engendrer un état de convection.

Les gradients de densité des roches qui animent les mouvements de matière dans le manteau sont le résultat de gradients de température et de pression. La

densité ρ est reliée à la température T par

$$\begin{aligned}\rho &= \rho_0 (1 - \alpha T) \\ \implies d\rho &= -\rho_0 \alpha dT\end{aligned}\tag{4.71}$$

où ρ_0 est la densité des roches à $T = 0$ et α est le coefficient d'expansion thermique. Sa valeur pour le manteau supérieure est de l'ordre de $3 \times 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$. De fait, un changement de température de 2000°C induit un changement de densité de $3300 \times 3 \times 10^{-5} \times 2000 = 198 \text{ kg m}^{-3}$ soit environ 6%.

La densité des roches dépend plus fortement encore de la pression, qui augmente de 3300 kg m^{-3} dans le manteau lithosphérique à $\sim 5000 \text{ kg m}^{-3}$ dans le manteau inférieur. TO BE IMPROVED : montrer densité en fonction pression et faire calcul pour doublement pressio et doubement temperature.

4.8.2 Le gradient adiabatique

Puisque la viscosité des roches du manteau permet leur déplacement au sein de celui-ci, imaginons une masse de roche m dans le manteau inférieur – donc dans un état de haute pression et haute température – et déplaçons la vers le haut. Nous avons aussi un gradient de température vertical négatif : la surface est plus froide que le profondeur. Cette masse de roche une fois déplacée vers le haut se trouve à une pression inférieure à celle d'origine. Par conséquent, son volume augmente et donc sa température (et sa densité) diminue. À ce stade trois cas sont possibles pour la masse de roche considérée (figure 4.11) :

1. Elle n'a pas échangé de chaleur avec son encaissant lors de sa remontée. Dans ce cas le gradient thermique dans le manteau est dit "adiabatique". La masse de roche considérée, une fois déplacée vers le haut, est à la même température que son encaissant, donc à la même densité. Par conséquent, elle n'a pas tendance à continuer de monter. Le système est donc stable car la distribution d'énergie potentielle de gravité dans le manteau n'a pas changé.
2. Elle a perdu de la chaleur par conduction avec son encaissant lors de sa remontée. Dans ce cas le gradient thermique est donc inférieur au gradient adiabatique. La masse de roche considérée, une fois déplacée vers le haut, est à une température inférieure à son encaissant. Par conséquent, elle a tendance à descendre en réponse à la distribution d'énergie potentielle de gravité, qui a varié. Mais le système n'engendre pas de convection.
3. Elle a gagné de la chaleur par conduction avec son encaissant lors de sa remontée. Dans ce cas le gradient thermique est donc supérieur au gradient adiabatique. La masse de roche considérée, une fois déplacée vers le haut, est à une température supérieure à son encaissant. Par conséquent, elle a tendance à continuer de monter en réponse à la variation de la distribution d'énergie potentielle de gravité. Le système est instable et peut engendrer un état de convection.

Le gradient adiabatique, ou "adiabat", est donc la frontière entre un comportement stable où la remontée initiale de notre volume de roche est rapidement inhibée – car il a perdu de la chaleur par conduction avec son encaissant – et

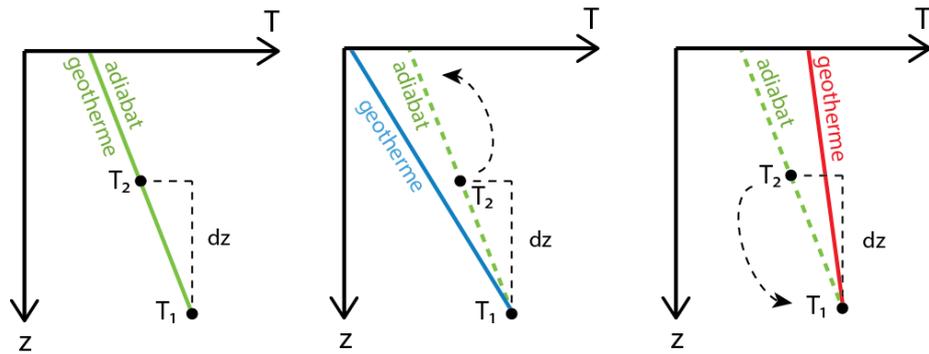


FIGURE 4.11 – Une masse de roche de température initiale T_1 s’élève d’une petite quantité dz dans le manteau le long du gradient de température adiabatique. La pression diminue lors de l’ascension, la masse de roche se refroidit à la température T_2 et sa densité augmente. Gauche : le gradient géothermique est exactement le de température adiabatique. Dans ce cas la masse de roche se trouve au final à la même température que son encaissant. Rien ne se passe, la distribution d’énergie potentielle de gravité dans le manteau n’a pas changé et le système est stable. Droite : le gradient géothermique est inférieur à l’adiabat, la roche perd donc de la chaleur lors de sa remontée. Elle se trouve au final à une température inférieure à son encaissant et tend donc à redescendre. Le système est stable. Milieu : le gradient géothermique est supérieur à l’adiabat, la roche gagne donc de la chaleur lors de sa remontée. Elle se trouve au final à une température supérieure à son encaissant et tend donc à poursuivre son ascension. Le système est instable et peut engendre de la convection.

où elle “s’emballe” – car il a gagné de la chaleur par conduction avec son encaissant. Ce raisonnement n’est pas spécifique au manteau terrestre : l’air chaud dans une pièce ne monte que si le gradient de température est supérieur au gradient adiabatique de la pièce.

Le processus de convection – remontée instable de matériel chaud – modifie le gradient de température en transportant de la chaleur vers le haut. Il tend donc à rapprocher le gradient thermique du manteau d’un gradient adiabatique FIGURE WHOLE EARTH STRUCTURE. Il est donc important de pouvoir déterminer ce gradient adiabatique, dont un manteau convectif doit de fait être proche.

4.8.3 Calcul du gradient adiabatique

Un gradient de température adiabatique résulte d’une variation de pression isentropique, c’est-à-dire un changement de volume (par compression ou dé-compression) sans variation de chaleur (i.e., sans échange par conduction avec l’encaissant).

On se place en une dimension verticale et on cherche une expression de la tem-

pérature T en fonction de la pression P du type :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S = ? \quad (4.72)$$

L'indice S indique que l'on se place en condition où l'entropie S est constante. Une fois cette expression obtenue, nous pourrions convertir P en distance radiale r pour les condition du manteau terrestre.

Pression P , température T et entropie S sont des variables d'état, i.e. fonction de variables indépendantes, telles que :

$$\dots \quad (4.73)$$

On trouve finalement que :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S = \frac{T\alpha}{\rho c_p} \quad (4.74)$$

Ce résultat n'est pas spécifique à la Terre mais décrit la variation de température d'un matériau soumis à un changement de pression sans échange de chaleur avec son environnement. Par exemple, l'air dans une pompe à vélo s'échauffe selon cette expression quand on augmente la pression pour gonfler un pneu.

Sur Terre, pression et profondeur sont reliés par :

$$\frac{dP}{dr} = -\rho g \quad (4.75)$$

On peut écrire :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_S = \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S \frac{dP}{dr} \quad (4.76)$$

On substitue dans l'équation 4.74 pour trouver le gradient de température adiabatique :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_S = -\frac{T\alpha}{\rho c_p} \rho g = -\frac{T\alpha g}{c_p} \quad (4.77)$$

Dans le manteau supérieur, avec $T = 1700$ K, $\alpha = 3 \times 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ et $c_p = 1.25 \times 10^3 \text{ J kg }^\circ\text{C}^{-1}$, on trouve un gradient de température adiabatique de $0.4 \text{ }^\circ\text{C km}^{-1}$. L'accélération de la gravité g et la chaleur spécifique c_p des roches mantelliques ne varient que très peu, c'est surtout la diminution du coefficient d'expansion thermique α avec la profondeur qui affectent la distribution de température dans le manteau. Ce paramètre peut se déterminer à partir d'expériences en laboratoire où l'on place de l'olivine – sous ses différentes formes – à des conditions de pression et température réalistes pour le manteau.

Ce gradient de température adiabatique – vers lequel tend un système convectif comme nous l'avons vu plus haut – est très inférieur à celui de la lithosphère, qui atteint $10\text{--}30 \text{ }^\circ\text{C km}^{-1}$.

4.8.4 Conséquences

Dans le cas d'une gradient de température supra-adiabatique, nous avons vu plus haut que le manteau peut convecter – mais il faut aussi pour cela que les

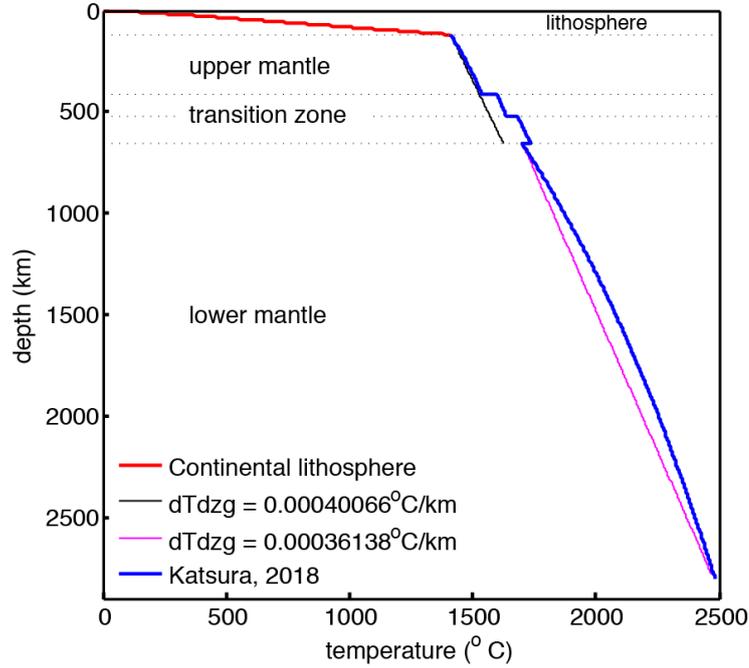


FIGURE 4.12 – Courbe rouge : gradient de température dans une lithosphère continentale stable (équation 4.37). Courbe bleue : gradient de température adiabatique dans le manteau selon Katsura (2018), calculée selon l’équation 4.77 mais en déterminant expérimentalement les valeurs de α en fonction de la profondeur. On observe des sauts correspondant aux discontinuités minéralogiques de la zone de transition entre 510 et 660 km de profondeur. Les courbes noire et magenta utilisent l’équation 4.77 avec $\alpha = 3 \times 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ et $T = 1700 \text{ K}$ dans le manteau supérieur, et $\alpha = 2.3 \times 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ et $T = 2000 \text{ K}$ dans le manteau inférieure.

roches mantelliques puisse se déplacer au sein du manteau. Il faut donc que le manteau ne soit pas trop visqueux – la viscosité η mesure en effet la résistance à l’écoulement en unité de Pa s (voir chapitre “Forces et Rhéologie”). Imaginons une couche d’épaisseur dz , de viscosité constante η , dont le sommet est fixe et à la base de laquelle on applique une contrainte cisailante σ_{xz} (figure 4.13). Si la vitesse est constante dans la direction horizontale ($\partial u / \partial x = 0$), alors on a :

$$\sigma_{xz} = \eta \frac{\partial u}{\partial z} \quad (4.78)$$

On voit donc que la contrainte nécessaire pour former un écoulement augmente quand la viscosité du milieu augmente. On voit aussi que la vitesse maximale de l’écoulement dépend linéairement de l’épaisseur de la couche.

Recensons les facteurs qui favorisent la convection :

1. La différence de température ΔT entre la base et le sommet de la couche en convection, dont on a soustrait l’adiabat car seulement les températures supra-adiabatiques permettent la convection comme expliqué plus haut. Cette différence de température n’est pas importante en tant que

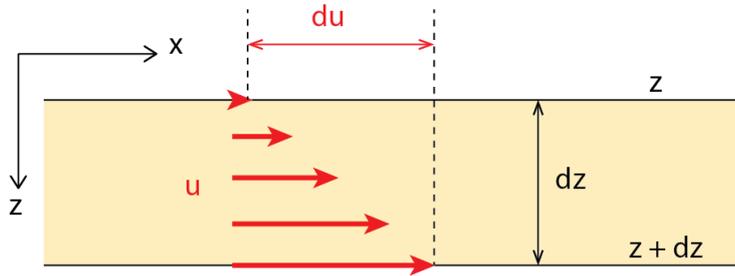


FIGURE 4.13 – Une couche de viscosité η est soumise à un cisaillement horizontal. Il s’y développe un gradient de vitesse en fonction de la profondeur.

telle, mais plutôt parce qu’elle induit une différence de densité entre la base et le sommet. Cette différence de densité permet un gradient d’énergie potentielle de gravité qui est le moteur de la convection. Elle vaut $\alpha \rho \Delta T$.

2. L’épaisseur d de la couche convective favorise la convection car le gradient d’énergie potentielle de gravité est fonction de d selon :

$$U = \frac{1}{2} \rho g d^2 \quad (4.79)$$

comme dérivé dans le chapitre “Forces et Rhéologie”.

3. L’épaisseur d de la couche convective favorise la convection pour une seconde raison : nous avons en effet vu plus haut (équation 4.78) que la vitesse de l’écoulement augmente linéairement avec d .
4. L’accélération de la gravité g favorise évidemment la convection car U est fonction linéaire de g .

Recensons les facteurs qui limitent la convection :

1. La viscosité du manteau η limite la convection. Nous avons vu ci-dessus que la contrainte nécessaire à maintenir un écoulement donné requiert une contrainte d’autant plus forte que η augmente.
2. La capacité des roches à diffuser rapidement leur chaleur par conduction avec leur encaissant limite la convection car cela réduit le contraste de densité donc l’énergie (potentielle de gravité) nécessaire à la convection. La convection est donc limitée par la diffusivité thermique des roches κ .

On peut maintenant faire le bilan de ces facteurs sous la forme du ratio de ceux qui favorisent la convection sur ceux qui la limitent. On écrit donc, d’après les listes établies ci-dessus :

$$R_a = \frac{\alpha \rho \Delta T d^3 g}{\eta \kappa} \quad (4.80)$$

Cette quantité R_a est appelée “nombre de Rayleigh” et est sans dimension. On montre expérimentalement et par le calcul que la convection a lieu quand $R_a > 200-1000$. Plus R_a est grand, plus la convection est rapide.

Une application numérique grossière dans le cas de la Terre donne $R_a \approx 2 \times 10^4 \Delta T$ pour $g = 10 \text{ m s}^{-2}$, $\alpha = 2 \times 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$, $\rho = 3500 \text{ kg m}^{-3}$, $d = 3 \times 10^6 \text{ m}$, $\kappa = 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ et $\eta = 10^{21} \text{ Pa s}$. On constate donc que la convection est

possible dans le manteau terrestre dès que le manteau est à une température suffisamment supra-adiabatique.

La convection – qui n'existe qu'en condition supra-adiabatique – transfère donc de la chaleur du bas vers le haut en tendant à rapprocher le gradient thermique du manteau de l'adiabat. De fait :

- La température moyenne du manteau change finalement assez peu en fonction de la profondeur ($0.2-0.4 \text{ } ^\circ\text{C km}^{-1}$). On dit parfois que “la convection homogénéise la température du manteau”, ce n'est pas exact mais en tous cas elle permet de limiter la surfchauffe du manteau, qui peinerait à évacuer sa chaleur si seule la conduction était possible.
- La température du manteau n'atteint le solidus des péridotites que ce manière exceptionnelle : la convection “empêche” donc le manteau de fondre, ce qui serait le cas si le gradient géothermique y était conductif.
- La viscosité des roches augmentant de manière exponentielle pour des températures croissantes, il existe une profondeur à laquelle leur écoulement visqueux n'est plus possible. La convection n'est plus possible et le transport de chaleur ne peut plus se faire que par conduction. Cette profondeur définit l'épaisseur des “plaques tectoniques”.

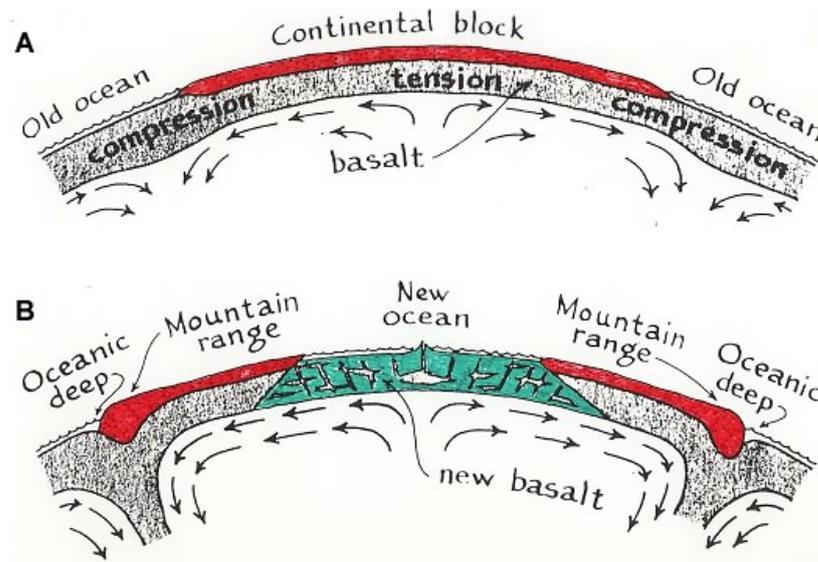


FIGURE 4.14 – Convection du manteau et mouvements de la croûte selon Arthur Holmes (1945).

4.8.5 Bref historique de la convection dans le manteau terrestre

En 1945, alors que la théorie de la dérive des continents émise par Wegener est largement abandonnée faute d'un mécanisme physique convaincant, le géologue britannique Arthur Holmes en propose un : il intuite que le manteau terrestre est en mouvement et entraîne avec lui la croûte sus-jacente (figure 4.14). Selon son

idée, les déplacements convectifs de matière dans le manteau induisent tension ou compression dans la croûte sus-jacente suivant que l'écoulement se fait vers le haut (tension) ou vers le bas (compression). La tension résulte à terme en la mise en place de volcanisme basaltique et la formation d'un océan. La compression résulte en l'enfouissement de croûte dans des fosses et à la formation de chaînes de montagnes – une vision assez proche de celle de la tectonique des plaques, en somme, même si on ne parle évidemment pas encore de lithosphère, d'accrétion océanique ou de subduction !

La théorie de la tectonique des plaques finit par émerger dans les années 1960 (voir chapitre 'Les Objets de la Géodynamique'). C'est une théorie purement cinématique, mais il n'empêche qu'un mécanisme physique doit animer les déplacements des plaques tectoniques. La convection mantellique est à nouveau évoqué, en faisant appel à la théorie de Rayleigh-Bénard. Celle-ci décrit l'écoulement d'un fluide entre deux interfaces horizontales entre lesquelles un gradient vertical de température est maintenu par le chauffage de l'interface inférieure. Cette théorie prédit que, dans certaines conditions, un état de convection stable se met en place avec une alternance régulière de région d'écoulement vers le haut et vers le bas séparés d'une distance qui vaut approximativement l'épaisseur de la couche convective : l'écoulement du fluide prend la forme de "cellules de convection".

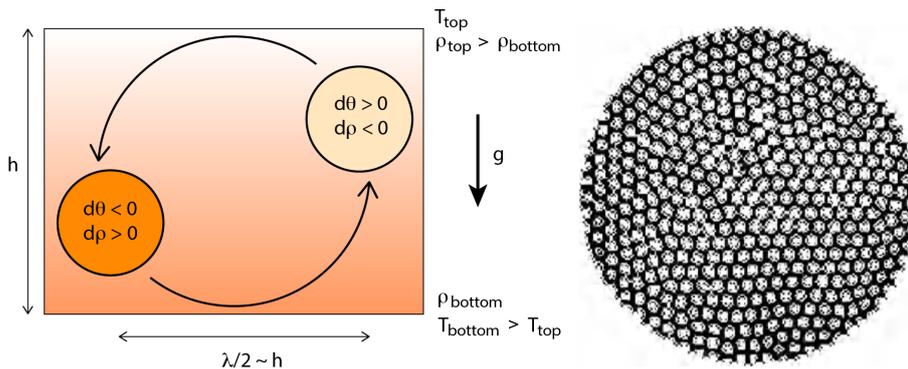


FIGURE 4.15 – Droite : photographie de la surface d'une des expériences d'Henri Bénard montrant la géométrie de cellules de convection. Gauche : mécanisme de la convection dite de Rayleigh-Bénard. Le mouvement du fluide est auto-entretenu dès que l'énergie potentielle de gravité est supérieure à la dissipation d'énergie (thermique par conduction et mécanique par frottement visqueux). La largeur des "cellules de convection" est approximativement égale à l'épaisseur de la couche convective.

Parmi les conditions nécessaires à la convection, nous avons vu que la viscosité du manteau doit être suffisamment faible. Keith Runcorn montre que la convection est possible dans le manteau si sa viscosité est inférieure à 10^{25} Pa s. Haskell, dans les années 1930, avait utilisé les observations récentes du rebond post-glaciaire pour montrer que la viscosité du manteau devait être de l'ordre de 10^{21} – 10^{22} Pa s. La convection est donc possible dans le manteau terrestre.

Un traitement rigoureux de la convection, même dans le cas du modèle simple de Rayleigh-Bénard, est relativement complexe. Depuis les années 1970, deux

types d'approches continuent de coexister, basées soit sur des expériences de laboratoire, soit sur la résolution des équations de la convection par des méthodes numériques sur des calculateurs de plus en plus puissants. Les premiers résultats traitaient de systèmes en deux dimensions et considéraient le manteau comme un fluide incompressible de densité constante. On sait actuellement réaliser ces calculs pour une Terre sphérique avec des variations de viscosité, compressibilité, production de chaleur radiogénique, transitions de phase, etc.

4.8.6 Équations de la convection et cas simples

Les équations de la convection

L'écoulement convectif est un problème thermomécanique qui nécessite de poser trois conditions :

1. Le principe fondamental de la dynamique (PFD) s'applique. Les forces en jeu sont :
 - Les forces aux limites, que l'on écrit $\eta \nabla^2 v_i$, avec $\eta =$ viscosité et v vitesse (voir chapitre "Forces et Rhéologie"). Nous nous placerons, pour simplifier, dans le cas où la viscosité n'est pas fonction de la contrainte (où du taux de déformation) : elle est dite newtonnienne (voir chapitre "Forces et Rhéologie").
 - Les forces de volume : on écrit pour le moment leur résultante \vec{B}_i .
 - Les forces résultant des gradients de pression hydrostatique \vec{P}
 On écrit donc le PFD sous forme compacte :

$$\eta \nabla^2 v_i - \nabla \vec{P} + \vec{B}_i = \vec{0} \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.81)$$

On se souvient que cette forme compacte cache trois équation dans les directions, x , y et z (voir chapitre "Forces et Rhéologie").

2. La masse est conservée. Faisons l'hypothèse d'un fluide incompressible. La manière la plus compacte d'exprimer la conservation de la masse est d'écrire que la divergence des vitesses y est nulle :

$$\text{div}(\vec{v}) = 0 \quad (4.82)$$

3. L'énergie thermique est conservée. Comme nous l'avons vu plus haut, on écrit que la variation de la température avec le temps dépend de la conduction de chaleur, de l'advection de chaleur, et de la production de chaleur interne (radiogénique). On écrit donc :

$$\frac{dT}{dt} = \kappa \nabla^2 T + A - \vec{v} \cdot \nabla T \quad (4.83)$$

où T est la température, t le temps, κ la conductivité thermique, $A = a/\rho c_p$ avec $\rho =$ densité, $a =$ taux de production volumique de chaleur radiogénique, $c_p =$ chaleur spécifique. $\kappa = k/\rho c_p$ est la diffusivité thermique avec $k =$ conductivité thermique.

La résolution de ce système d'équations n'est pas triviale en générale et nécessite la mise en oeuvre de méthodes numériques telles que différences finies, ou

éléments finis. Il existe cependant quelques cas utiles où leur solution est simple, cas que nous allons détailler ci-dessous.

Écoulement entre deux bords horizontaux

Imaginons un fluide visqueux contenu entre deux plaques horizontales situées à une distance H l'une de l'autre. La plaque supérieure translate horizontalement à une vitesse $(V, 0)$ par rapport à la plaque inférieure de vitesse nulle $(0, 0)$.

Faisons l'hypothèse que le fluide à au départ une température uniforme et qu'il n'y a pas de source de chaleur interne. Dans cas on intuite que la température à l'équilibre thermodynamique sera aussi uniforme. On n'a donc pas besoin de résoudre l'équation de conservation de l'énergie thermique.

Le PFD le long de l'axe horizontal x se développe comme suit :

$$\eta \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) - 0 + 0 = 0 \quad (4.84)$$

puisqu'il n'y a pas de gradient de pression hydrostatique dans la direction horizontale ($\partial P / \partial x = 0$) et que les forces de volume sont nulles dans cette même direction ($\vec{B}_x = 0$).

La géométrie du problème implique que la vitesse est indépendante de la position le long de l'axe x (i.e., le système peut être étendu à l'infini le long de x sans que son comportement ne soit modifié). On obtient donc :

$$\eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} = 0 \quad (4.85)$$

Puisque sa dérivée seconde selon z est nulle, v_x est donc une fonction linéaire de z :

$$v_x(z) = (a_z z + b_z) \quad (4.86)$$

Nous avons posé comme conditions aux limites que $v_x(z = 0) = 0$ et $v_x(z = H) = V$, on peut donc déterminer les constantes a et b . La solution est simplement :

$$v_x(z) = \frac{V}{H} z \quad (4.87)$$

La vitesse verticale se détermine à partir de la PFD le long de l'axe vertical, ou bien plus simplement en utilisant l'équation de conservation de la masse :

$$\text{div}(\vec{v}) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (4.88)$$

Puisque sa dérivée première selon z nulle, v_z est donc une constante. Puisque les conditions aux limites imposent un déplacement nul à la base du système, on a nécessairement :

$$v_z(x, z) = 0 \quad (4.89)$$

On a donc dans ce cas un écoulement laminaire visqueux avec des vitesses horizontales variant de 0 au bord inférieur à V au bord supérieur, et un gradient vertical constant V/H . Ce type d'écoulement, dit de "Couette", est analogue de

celui qui se mettrait en place entre une plaque mobile et le manteau sous-jacent immobile, ou entre une plaque immobile et le manteau sous-jacent mobile (figure 4.16). Ce processus peut donc agir pour entrainer les plaques dans la direction d'écoulement dans le manteau, ou au contraire pour freiner le mouvement des plaques. On parle parfois de "viscous drag" à l'interface plaques / manteau.

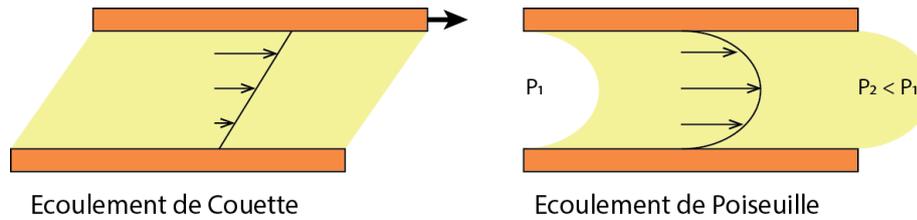


FIGURE 4.16 – Représentation schématique des écoulements de Couette (gauche) et Poiseuille (droite). Dans le premier cas l'écoulement résulte du cisaillement induit par le déplacement relatif des deux bords du système. Il est analogue au "viscous drag" entre la lithosphère et le manteau. Dans le second cas l'écoulement résulte d'un gradient de pression hydrostatique ($P_1 > P_2$).

Écoulement entre deux bords verticaux

Imaginons cette fois un fluide visqueux contenu entre deux plaques verticales immobiles situées à une distance S l'une de l'autre. Nous faisons à nouveau l'hypothèse que le fluide a au départ une température uniforme et qu'il n'y a pas de source de chaleur interne. Dans ce cas la température à l'équilibre thermodynamique sera uniforme. On n'a donc pas besoin de résoudre l'équation de conservation de l'énergie thermique.

Le PFD le long de l'axe vertical z se développe comme suit :

$$\eta \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) - 0 + \rho g = 0 \quad (4.90)$$

puisque $P = 0$ car le fluide est libre de s'écouler vers le bas sans résistance ni forcage et que la force de volume dans la direction verticale est évidemment le poids.

La géométrie du problème implique que la vitesse est indépendante de la position le long de l'axe z (i.e., le système peut être étendu à l'infini le long de z sans que son comportement ne soit modifié). On obtient donc :

$$\eta \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \rho g = 0 \quad (4.91)$$

Puisque sa dérivée seconde selon x est une constante, v_z est donc une fonction quadratique de x de la forme :

$$v_z(x) = -\frac{\rho g}{2\eta} x^2 + ax + b \quad (4.92)$$

Nous avons posé comme conditions aux limites que $v_z(x = 0) = 0$ et $v_z(x = S) = 0$, on peut donc déterminer les constantes a et b . La solution est :

$$v_z(x) = \frac{\rho g}{2\eta} x(s - x) \quad (4.93)$$

Comme précédemment, la conservation de masse et les conditions aux limites impliquent que :

$$v_x(x, z) = 0 \quad (4.94)$$

Écoulement entre deux bords horizontaux avec gradient horizontal de pression

Imaginons cette fois un fluide visqueux contenu entre deux plaques horizontales immobiles, comme dans le premier cas ci-dessus, mais avec cette fois un gradient horizontal de pression constant.

A DEVELOPPER

Ce type d'écoulement, dit aussi de "Poiseuille", est analogue à celui généré par les gradients de pression dûs aux variations latérales de densité dans le manteau (figure 4.16).

Vitesse de la convection

Calculons maintenant, de manière simplifiée donc approximative, la vitesse à laquelle la convection s'effectue dans le manteau terrestre. Plaçons-nous en deux dimensions et imaginons une cellule de convection d'épaisseur d et de longueur w (figure 4.17). Nous ferons l'hypothèse qu'il n'y a pas décharge de chaleur par conduction et que les températures dont il sera question sont toutes en excès par rapport à l'adiabat. Nous faisons aussi l'hypothèse que le manteau s'écoule par convection entre une lithosphère et un noyau immobiles avec lesquels il n'échange pas de chaleur. Ce calcul n'est donc pas destiné à fournir une valeur de la vitesse réelle des écoulements dans le manteau, mais plutôt l'ordre de grandeur de la contribution intrinsèque d'un processus de convection simplifié.

La frange ascendante de la cellule se trouve à une température T_1 , la frange descendante à une température T_2 . Les densités respectives de ces deux franges sont :

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \rho_0(1 - \alpha T_1) \\ \rho_2 &= \rho_0(1 - \alpha T_2) \end{aligned} \quad (4.95)$$

Les pressions en fonction de la profondeur dans ces deux franges sont donc :

$$\begin{aligned} P_1 &= \rho_0(1 - \alpha T_1)gz \\ P_2 &= \rho_0(1 - \alpha T_2)gz \end{aligned} \quad (4.96)$$

On trouve les forces correspondantes (par unité de longueur) en intégrant selon

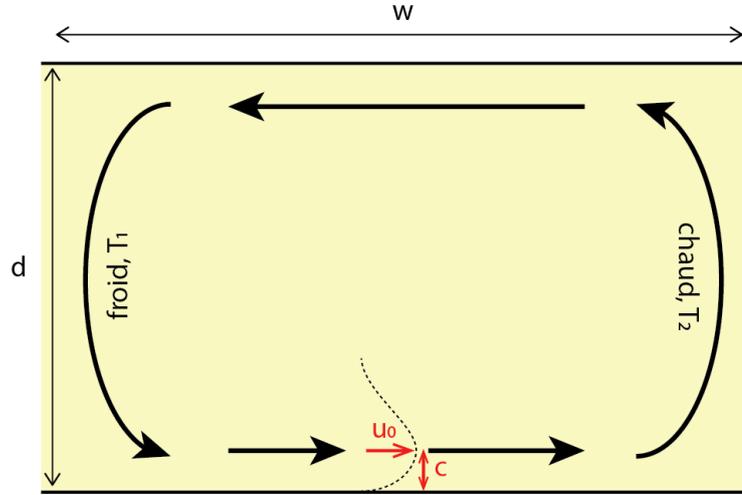


FIGURE 4.17 –

z :

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{1}{2}\rho_0(1 - \alpha T_1)gd^2 \\ F_2 &= \frac{1}{2}\rho_0(1 - \alpha T_2)gd^2 \end{aligned} \quad (4.97)$$

La résultante horizontale des forces par unité de longueur aux bordures de la cellule est donc :

$$F_{hdr} = \frac{1}{2}(\rho_0\alpha\Delta T)gd^2 \quad (4.98)$$

On note qu'il s'agit du même principe que celui du calcul des forces horizontales qui dérivent des variations latérales d'énergie potentielle de gravité explicité au chapitre "Forces et Rhéologie".

Le bilan des forces s'appliquant à la cellule de convection devant être nul (équation 4.81), cette force horizontale par unité de longueur (en fait un gradient horizontal d'énergie potentielle!) doit être équilibrée par les contraintes cisailantes s'exerçant à ses bordure supérieure et inférieure. L'exemple ci-dessus d'un écoulement entre deux bords horizontaux avec gradient horizontal de pression peut être utilisé pour intuer ce qui se passe à la base de la cellule, où la vitesse sera maximale (valeur = u_0) à une hauteur c (figure 4.17). Dans ce cas la contrainte cisailante à la base de la cellule est approximativement :

$$\sigma_{xz} = -\eta\frac{u_0}{c} \quad (4.99)$$

La force résultante par unité de longueur pour une cellule de longueur w est donc :

$$F_{shr}^{bottom} = -\eta\frac{u_0}{c} \quad (4.100)$$

Le même raisonnement s'applique à la bordure supérieure de la cellule de convection, on a donc $F_{shr}^{top} \approx F_{shr}^{bottom}$, donc :

$$F_{shr} = -2\eta\frac{u_0}{c} \quad (4.101)$$

L'équilibre des forces donne donc :

$$\frac{1}{2}(\rho_0\alpha\Delta T)gd^2 - 2\eta\frac{u_0}{c} = 0 \quad (4.102)$$

soit

$$u_0 = \frac{\rho_0\alpha\Delta Tgcd^2}{2\eta w} \quad (4.103)$$

Considérons une cellule de convection carrée dont l'épaisseur est celle du manteau supérieur. On trouve $u_0 \approx 16 \text{ mm an}^{-1}$ pour $\rho_0 = 3300 \text{ kg m}^{-3}$, $\alpha = 3 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1}$, $c = 10 \text{ km}$, $\Delta T = 250 \text{ K}$, $g = 9.82 \text{ m s}^{-2}$, $d = 500 \text{ km}$, $w = d$ et $\eta = 1 \times 10^{21} \text{ Pa s}$. L'ordre de grandeur est cohérent avec ce que l'on peut attendre dans le manteau terrestre où la vitesse de convection doit être similaire à la vitesse des plaques tectoniques.

4.8.7 La convection : observations et état des lieux

Observations

Puisque la convection implique des variations latérales de densité dans le manteau – la figure 4.17 montre un bord froid et dense qui descend et un bord chaud et moins dense qui monte – celles-ci doivent se manifester sous la forme d'ondulations du géoïde – voir chapitre “Pesanteur et Géoïde”. De fait, les longueurs d'onde spatiales du géoïde doivent nous renseigner notamment sur la profondeur des structures convectives.

Le géoïde sert de fait à la validation de modèles numériques de la convection.

Les modèles numériques de convection les plus récents reproduisent généralement bien la structure en harmonique sphérique de degré 2 du géoïde actuel observé pour la Terre, avec deux “hauts” en Afrique et dans le Pacifique central.

Les variations de densité des roches mantelliques induisent aussi des variations de la vitesse des ondes sismiques. La vitesse des ondes de volume P et S est en effet donnée par :

$$V_P = \sqrt{\frac{K + (4/3)\mu}{\rho}} \quad \text{et} \quad V_S = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (4.104)$$

où K est le module de compressibilité, μ le module de cisaillement et ρ la densité. De fait, la structure de la convection est aussi révélée par la tomographie sismique.

Les plaques océaniques subduites

Géochimie

Plumes ?

Modèles Une couche / deux couches / hybride.