

Chapitre 4

Elasticité et flexure

Table des matières

4	Elasticité et flexure	1
4.1	Elasticité	3
4.2	Flexure	3
4.2.1	Un peu d'histoire	3
4.2.2	Exemples	6
4.2.3	L'équation de la flexure	6
4.2.4	Application à une charge ponctuelle	11
4.2.5	Application au cas d'Hawaii	13
4.2.6	Flexure d'une plaque en subduction	14
4.2.7	Flexure dans un cas limite	15
4.2.8	Estimation de l'épaisseur élastique équivalente de la lithosphère	16
4.2.9	Interprétation de T_e	16

4.1 Elasticité

4.2 Flexure

4.2.1 Un peu d'histoire

Nous avons jusqu'ici considéré que les reliefs étaient maintenus par "isostasie hydrostatique" (figure 4.1, gauche). Nous avons raisonné sur des colonnes de croûte ou lithosphère indépendantes au sein desquelles la distribution verticale des masses induit une pression lithostatique (verticale vers le bas) équilibrée par une pression exercée par le manteau ou l'asthénosphère sous-jacente (verticale vers le haut). L'isostasie hydrostatique est un équilibre des forces dans la direction verticale seulement qui fait l'hypothèse que les contraintes de cisaillement sur des plans verticaux sont nulles. L'isostasie hydrostatique implique donc que les reliefs sont compensés localement, c'est-à-dire exactement à leur aplomb,

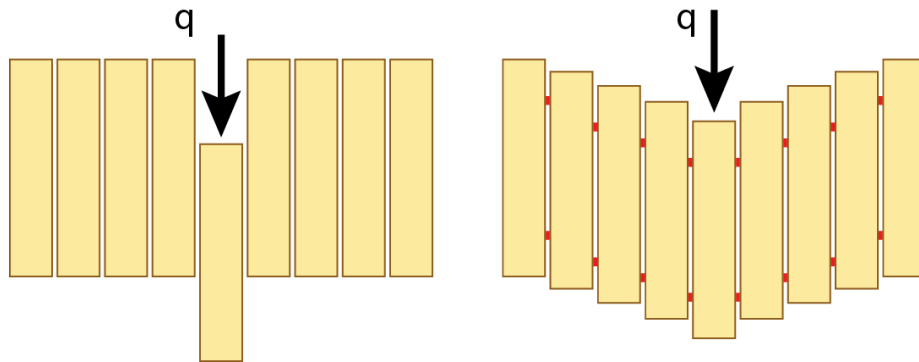


FIGURE 4.1 – Ajustement d’une croûte localement soumise à une charge vertical q dans le cas de l’isostasie hydrostatique (gauche) et de la flexure (droite). Figure tirée de Stüwe.

par une croûte épaissie dans le modèle d’Airy ou/et par des variations latérales de densité dans la croûte dans le modèle de Pratt. Le modèle physique simple de l’isostasie hydrostatique permet d’expliquer relativement bien les reliefs de dimension latérale importante par rapport à l’épaisseur de la lithosphère, soit plusieurs centaines de kilomètres.

L’isostasie hydrostatique fait donc l’impasse sur la résistance mécanique latérale de la lithosphère. Une première observation vient mettre à mal ce modèle quand le géologue américain H.K. Gilbert (1843-1919) étudie les paléo-lignes de rivage du lac Bonneville qui occupait le territoire de l’actuel Grand Lac Salé en Utah au Pléistocène. Il montre que le lac avait atteint une profondeur de 300 m. Le modèle d’isostasie d’Airy implique que cet assèchement donne lieu à un soulèvement s donné par :

$$s = h \frac{\rho_w}{\rho_m} \quad (4.1)$$

soit $s = 90$ m. Gilbert montre aussi que les lignes de rivages de même âge, horizontales lors de leur formation, sont défléchies vers le haut au centre du lac (cône volcanique de Pahavant Butte) d’une valeur de 39 m, soit plus de deux fois moins que prévue par la théorie d’Airy. Il propose, pour expliquer ce désaccord, que la croûte résiste au soulèvement du fait de sa résistance mécanique latérale. Il modélise la surrection observée par le bombement d’une plaque élastique rigide et pose le problème, en ses propres termes de “*isostasy versus rigidity*”.

Hayford (1868-1925) réalise des mesures gravimétriques en Amérique du Nord et cherche à vérifier l’isostasie. Pour cela il applique aux mesures brutes :

- Une correction à l’air libre pour tenir compte de la hauteur du point de mesure dans le champ de pesanteur ;
- Une correction de topographie pour tenir compte de l’attraction gravitationnelle du relief ;
- Une correction de Bouguer pour tenir compte d’une croûte d’épaisseur moyenne constante ;
- Une correction isostatique pour tenir compte de la racine crustale théorique dans l’hypothèse d’une compensation locale du relief.

Hayford trouve que les mesures brutes corrigées de ces trois effets, c'est-à-dire le résidu ou l'anomalie gravimétrique, sont de l'ordre de quelques dizaines de mGal, donc très faibles – mais non nulles. Barrell (1869-1919) reprend ces mesures et montre que les anomalies non nulles sont distribuées géographiquement en ceintures positives et négatives. Il montre aussi que :

- Pour 18 stations gravimétriques dans les montagnes de l'ouest américain où l'anomalie résiduelle moyenne est de 18 mGal, une compensation locale ne permet pas de diminuer significativement ce résultat même si l'on considère un modèle de compensation de Pratt s'étendant à une distance de 18.8 km, 58.8 km ou 167.7 km du point de mesure.
- A la station gravimétrique de Pikes Peak (4293 m) dans le Colorado mesurée par Hayford et Bowie en 1912, un modèle de compensation locale laisse une anomalie résiduelle de +19 mGal, alors qu'un modèle de compensation régionale réduit ce résidu à +11 mGal, +6 mGal et +2 mGal pour des distances de 18.8 km, 58.8 km et 166.7 km respectivement.

Barrell conclut en 1914 *“although the relations of continents and ocean basins show with respect to each other a high degree of isostasy, there is little but such adjustment within areas 200 to 300 km in diameter [...]. Individual mountains and mountain ranges may stand by virtue of the rigidity of the crust”*. Il intuït donc qu'une couche suffisamment rigide qu'il appelle “lithosphère” est suffisamment rigide pour soutenir des charges, tandis qu'au-dessous “l'asthénosphère” est un milieu à faible résistance mécanique.

Le débat sur la question de savoir si l'isostasie locale, qu'elle soit de type Airy ou Pratt, est le seul mécanisme de support des reliefs culmine en 1922, où la société géologique américaine organise un débat sur ce thème. Le géologue G.R. Putnam y présente ses résultats. Il a l'idée de comparer les anomalies gravimétriques en des paires de points proches mais situés à des élévations très différentes. Il calcule une compensation en moyennant la topographie sur un rayon donné autour des points de mesure. Il montre que la différence d'anomalie gravimétrique entre points proches se rapproche d'un modèle isostatique local au sens de Pratt si – paradoxalement – on augmente le rayon de la région considérée. Il conclut que la compensation du relief n'est pas local mais régionale et introduit le concept d'isostasie régionale.

L'idée est reprise par F.A. Veining Meinesz, géophysicien hollandais, qui incorpore aussi les idées de Gilbert et de Barrell. Il propose que la lithosphère est une couche rigide élastique qui se déforme par déflexion sous l'effet d'une charge topographique en surface. Il propose les premiers calculs de l'effet d'une charge topographique sur la déflexion d'une plaque élastique mince au-dessus d'un milieu de faible résistance mécanique. Dans son modèle, la charge topographique est soutenue par une flexure de longueur d'onde supérieure à la dimension latérale de la charge – la compensation du relief est régionale (cf. Putnam) et la charge est résistée par la rigidité de la “plaque lithosphérique” (Gilbert), bien que la tectonique des plaques soit encore hors-sujet.

C'est ensuite R. Gunn qui, entre 1937 et 1947, formalise le calcul de la déflexion d'une plaque élastique et commence à l'appliquer aux marges continentales

actives et passives et aux chaînes de montagnes. Il écrit alors :

$$D \frac{d^4 y}{dx^4} + (\rho_{\text{fluid}} - \rho_{\text{infill}}) y g = 0 \quad (4.2)$$

ou x est la distance perpendiculaire à la charge et y la déflexion causée. Nous verrons ci-dessous comment arriver à cette conclusion.

4.2.2 Exemples

Si l'isostasie hydrostatique permet d'expliquer les reliefs de dimension latérale importante par rapport à l'épaisseur de la lithosphère – par exemple le contraste océans–continents, l'explication de reliefs de petite dimension latérale comme une chaîne volcanique ou une fosse de subduction dépend aussi de l'élasticité de la lithosphère. En d'autres termes, on ne peut pas ignorer les contraintes de cisaillement sur des plans verticaux : les “colonnes” de lithosphère de l'isostasie hydrostatique ne sont plus mécaniquement indépendantes les unes des autres.

De fait, l'application d'une charge – volcan, sédiments, etc – induit une flexure de la lithosphère dont l'amplitude et la forme dépend de la magnitude et distribution latérale de la charge ainsi que de réponse élastique de la lithosphère. On peut intuitivement dès maintenant que cette dernière dépend elle-même de l'épaisseur de la lithosphère (plus la lithosphère est épaisse, plus il est difficile d'y induire une flexure) et de son élasticité (plus la raideur de la lithosphère est grande, plus plus il est difficile d'y induire une flexure).

La force verticale vers le bas imposée par une charge topographique est résistée aussi par la force hydrostatique verticale générée en réaction à l'approfondissement du Moho, décrite par la théorie de l'isostasie hydrostatique.

Exemples de flexure de la lithosphère :

1. Iles Canary : effet du poids d'un volcan.
2. Bassin molassique des Alpes centrales : effet du poids d'une chaîne de montagne.
3. Marge continentale nord-est américaine : effet du poids des sédiments.
4. Subduction du Chili : effet du poids du relief et du poids du slab lui-même.

4.2.3 L'équation de la flexure

Nous allons reprendre le raisonnement de Veining-Meinesz et de Gunn et dériver l'équation qui décrit la flexure d'une plaque élastique sous l'effet d'une charge simple. Nous nous plaçons dans le cas d'une plaque uniformément et purement élastique d'épaisseur h (dans la direction verticale y), de longueur L (dans la direction horizontale x) avec $h \ll L$ et de dimension infinie dans la direction perpendiculaire z .

La plaque est défléchie d'une quantité w très petite ($w \ll L$) – de manière à pouvoir appliquer l'élasticité linéaire – sous l'effet d'une force linéique V_a

appliquée en $x = 0$. On a donc :

$$\forall x \neq 0, V_a = 0 \quad (4.3)$$

Isolons un élément de plaque infinitésimal entre x et $x + dx$ et écrivons les forces qui s'y appliquent :

- Force verticale due à la charge, par unité de longueur dans la direction z exercée perpendiculairement à surface de la plaque : $q(x)dx$.
- Force verticale de cisaillement par unité de longueur dans la direction z exercée sur les bords verticaux de notre élément de volume : V . Cette force résiste à la charge appliquée. Elle résulte des contraintes de cisaillement intégrées le long de cette section verticale de la plaque.
- Force horizontale par unité de longueur dans la direction z : P . On fait l'hypothèse que P ne dépend pas de x .

De ces forces résulte un moment de flexure M , aussi par unité de longueur dans la direction z .

En x la force de cisaillement est V , la déflexion est w , le moment de flexure est M .

En $x + dx$ la force de cisaillement est $V + dV$, la déflexion est $w + dw$, le moment de flexure est $M + dm$.

L'ensemble des forces et le moment de flexure résultant sont en unité de longueur dans la direction z . L'équilibre des forces dans la direction verticale sur l'élément

$$V - (V + dV) + q(x)dx = 0 \quad (4.4)$$

soit :

$$\frac{dV}{dx} = -q \quad (4.5)$$

Le moment correspondant au couple de forces V et $V + dV$ est :

$$V \frac{dx}{2} + (V + dV) \frac{dx}{2} \simeq V dx \quad (4.6)$$

car sur la distance infinitésimale dx on a $dV dx \sim 0$. Ce moment agit dans le sens horaire.

Le moment correspondant aux forces P est :

$$P \frac{dw}{2} + (P + dP) \frac{dw}{2} \simeq P dx \quad (4.7)$$

car on a supposé que P ne dépendait pas de x . Ce moment agit dans le sens anti-horaire.

Le moment de $q(x)$ est zéro car la force correspondante passe par le centre de l'élément.

Le moment résultant dM agissant l'élément considéré est donc :

$$dM = V dx + P dw \quad (4.8)$$

soit :

$$\frac{dM}{dx} = V + P \frac{dw}{dx} \quad (4.9)$$

On élimine V en différentiant par rapport à x et en utilisant l'équation 4.5 :

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -q + P \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (4.10)$$

Pour convertir cette équation en une équation différentielle en w nous allons relier le moment de flexure M à la déflexion w .

On commence par constater que, dans le cas d'une flexure vers le bas, la partie supérieure de la plaque se contracte dans la direction x . Cette déformation est associée à une contrainte longitudinale σ_{xx} positive. À l'inverse, la partie inférieure de la plaque s'étend dans direction x , avec une contrainte correspondante σ_{xx} négative. Le milieu de la plaque, que nous prenons à $y = 0$, ne se déforme pas : c'est la surface neutre de la plaque.

La contrainte σ_{xx} s'exerce perpendiculairement à un élément de surface vertical dy . Elle exerce un moment par rapport à la surface neutre qui se trouve à une distance y (bras de levier) qui est donc :

$$M(y) = \sigma_{xx} y dy \quad (4.11)$$

Le moment de flexure total correspondant est l'intégrale de $M(y)$ au travers de la section de la plaque, soit :

$$M = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} y dy \quad (4.12)$$

Nous avons aussi :

1. La contrainte $\sigma_{yy} = 0$ car la charge est appliquée en un point/ligne. Les contraintes $\sigma_{xx} \neq 0$ et $\sigma_{zz} \neq 0$. Nous sommes donc dans un cas de contraintes planes.
2. La déformation $\epsilon_{zz} = 0$ car la plaque est de longueur infinie dans la direction z .

L'élasticité linéaire pour un solide isotrope nous donne les relations contraintes/déformations principales suivantes dans le cas où les axes principaux des contraintes et déformations sont colinéaires :

$$\epsilon_1 = \frac{1}{E} \sigma_1 - \frac{\nu}{E} \sigma_2 - \frac{\nu}{E} \sigma_3 \quad (4.13)$$

$$\epsilon_2 = -\frac{\nu}{E} \sigma_1 + \frac{1}{E} \sigma_2 - \frac{\nu}{E} \sigma_3 \quad (4.14)$$

$$\epsilon_3 = -\frac{\nu}{E} \sigma_1 - \frac{\nu}{E} \sigma_2 + \frac{1}{E} \sigma_3 \quad (4.15)$$

avec ν = coefficient de Poisson (0.1-0.4) et E = module d'Young (10-100 GPa).

Dans le cas de contraintes planes et du système de coordonnées choisi, on a :

$$\epsilon_{xx} = \frac{1}{E}\sigma_{xx} - \frac{\nu}{E}\sigma_{zz} \quad (4.16)$$

$$\epsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E}\sigma_{xx} + \frac{1}{E}\sigma_{zz} \quad (4.17)$$

$$\epsilon_{yy} = -\frac{\nu}{E}\sigma_{xx} - \frac{\nu}{E}\sigma_{zz} \quad (4.18)$$

soit :

$$\epsilon_{xx} = \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \nu\sigma_{zz}) \quad (4.19)$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{1}{E}(\sigma_{zz} - \nu\sigma_{xx}) \quad (4.20)$$

$$\epsilon_{yy} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{zz}) \quad (4.21)$$

Puisque $\epsilon_{zz} = 0$, la deuxième égalité donne :

$$\sigma_{zz} = \nu\sigma_{xx} \quad (4.22)$$

quel l'on substitue dans la première égalité pour avoir :

$$\epsilon_{xx} = \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \nu^2\sigma_{xx}) \quad (4.23)$$

$$= \frac{(1 - \nu^2)}{E}\sigma_{xx} \quad (4.24)$$

On peut donc écrire le moment de flexure total (équation 4.12) en fonction de ϵ_{xx} :

$$M = \frac{E}{(1 - \nu^2)} \int_{-h/2}^{h/2} \epsilon_{xx} y dy \quad (4.25)$$

On voit sur la figure que ϵ_{xx} dépend de la distance y à l'axe neutre où $y = 0$. La figure XX montre :

1. Le rayon de courbure de la plaque mince R ;
2. Le changement de longueur Δl selon la direction x ;
3. L'angle ϕ , très petit, dont on peut écrire :

$$\sin \phi = \frac{l}{R} \simeq \phi \quad (4.26)$$

$$\tan \phi = -\frac{\Delta l}{y} \simeq \phi \quad (4.27)$$

On a donc :

$$\Delta l = -y \frac{l}{R} \quad (4.28)$$

Par définition la déformation selon la direction x est :

$$\epsilon_{xx} = -\frac{\Delta l}{l} = \frac{y}{R} \quad (4.29)$$

On a donc maintenant une expression de ϵ_{xx} en fonction de y . Cherchons à relier le rayon de courbure R à des quantités connues. Par exemple, on intuite

qu'il existe une relation entre R et w en fonction de x : si R est petit, w varie rapidement en fonction de x . On peut même intuitiver que cette relation implique le laplacien de w , qui mesure la courbure de la plaque.

On voit sur la figure XX, où le rayon de courbure est très exagéré (α est en fait très petit), que

$$\alpha \simeq -\frac{dw}{dx} \quad (4.30)$$

On a aussi, par définition du cercle :

$$d\alpha = \phi \quad (4.31)$$

On écrit donc :

$$\phi = \frac{d\alpha}{dx} dx = \frac{d}{dx} \left(-\frac{dw}{dx} \right) dx \quad (4.32)$$

d'où :

$$\phi = -\frac{d^2w}{dx^2} dx \quad (4.33)$$

On avait par ailleurs $\phi = l/R$, puisque la courbure est en réalité très faible on a $l \sim dx$. Donc :

$$\phi = \frac{dx}{R} \quad (4.34)$$

et :

$$\frac{dx}{R} = -\frac{d^2w}{dx^2} dx \quad (4.35)$$

d'où :

$$\frac{1}{R} = -\frac{d^2w}{dx^2} \quad (4.36)$$

que l'on peut substituer dans l'équation 4.29 pour trouver :

$$\epsilon_{xx} = -y \frac{d^2w}{dx^2} \quad (4.37)$$

Nous pouvons donc re-écrire le moment flexural M (équation 4.25) :

$$M = -\frac{E}{(1-\nu^2)} \frac{d^2w}{dx^2} \int_{-h/2}^{h/2} y^2 dy \quad (4.38)$$

$$= -\frac{E}{(1-\nu^2)} \frac{d^2w}{dx^2} \frac{y^3}{3} \Big|_{-h/2}^{h/2} \quad (4.39)$$

$$= -\frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \frac{d^2w}{dx^2} \quad (4.40)$$

On écrit généralement :

$$M = -D \frac{d^2w}{dx^2} \quad (4.41)$$

où

$$D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \quad (4.42)$$

est la rigidité flexurale de la plaque. On voit qu'elle augmente avec la raideur de la plaque E et son épaisseur h . On voit aussi que :

$$M = \frac{D}{R} \quad (4.43)$$

On voit donc que le rayon de courbure d'une plaque est inversement proportionnel au moment des forces appliquées. On voit aussi que D est le moment des forces nécessaire pour flexurer une plaque élastique de courbure unitaire.

On peut finalement utiliser l'équation 4.10 et dériver M deux fois pour trouver :

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} = q(x) - P \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (4.44)$$

C'est l'équation de la flexure pour des plaques élastiques. Elle nous dit que la force verticale totale et la force horizontale sont équilibrées par la résistance flexurale de la plaque (fonction de D). On l'écrit plus généralement :

$$q(x) = D \frac{d^4 w}{dx^4} + P \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (4.45)$$

Dans le cas de la Terre, la force verticale est la somme de la charge appliquée en surface et de la force hydrostatique qui se développe en réponse à l'enfoncement de la croûte/lithosphère dans le manteau/asthénosphère.

4.2.4 Application à une charge ponctuelle

Prenons le cas simple d'une lithosphère océanique d'épaisseur h parfaitement élastique de densité ρ_m au-dessus d'un manteau fluide de même densité ρ_m , le tout surmonté d'une couche d'eau d'épaisseur h_w et de densité ρ_w .

Nous supposons une charge linéique telle que $q(x) = q$ en $x = 0$ et $q(x) = 0$ partout ailleurs. Nous supposons aussi que la force horizontale aux limites $P = 0$.

L'application d'une charge défléchit la plaque vers le bas d'une quantité w . La dépression ainsi créée se remplit d'eau, ce qui perturbe l'équilibre hydrostatique. Après application de la charge, le poids par unité de longueur pour la colonne de roche est :

$$\rho_w g(h_w + w) + \rho_m g h \quad (4.46)$$

Avant application de la charge il était :

$$\rho_w g h_w + \rho_m g(h + w) \quad (4.47)$$

La force hydrostatique générée par la flexure de la plaque est la différence de ces deux états, soit :

$$q_h = (\rho_m - \rho_w) g w \quad (4.48)$$

Cette force résiste à la flexure et est verticale dirigée vers le haut. Il est important de noter que ceci est valide pour tout x , pas seulement en $x = 0$.

On peut donc écrire l'équation de la flexure en $x \neq 0$ (c-a-d $q(x) = 0$) :

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} = -(\rho_m - \rho_w) g w \quad (4.49)$$

La solution générale de cette équation pour $x \geq 0$ est :

$$w = e^{\frac{x}{\alpha}} \left(c_1 \cos \frac{x}{\alpha} + c_2 \sin \frac{x}{\alpha} \right) \quad (4.50)$$

$$+ e^{-\frac{x}{\alpha}} \left(c_3 \cos \frac{x}{\alpha} + c_4 \sin \frac{x}{\alpha} \right) \quad (4.51)$$

où c_1, c_2, c_3 et c_4 sont des constantes à déterminer qui dépendent des conditions aux limites du problème et α défini par :

$$\alpha = \left[\frac{4D}{(\rho_m - \rho_w)} \right]^{\frac{1}{4}} \quad (4.52)$$

est appelé "paramètre flexural". On détermine les constantes en disant que :

- On a $w \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow \infty$. De fait $e^{(-x/\alpha)} \rightarrow 0$, $e^{(x/\alpha)} \rightarrow \infty$ et on doit avoir $c_1 \cos(x/\alpha) + c_2 \sin(x/\alpha) = 0$ ce qui nécessite que $c_1 = c_2 = 0$.
- On a $dw/dx = 0$ en $x = 0$. On a déjà $c_1 = c_2 = 0$, on dérive par rapport à x pour obtenir $c_3 = c_4$.

La solution devient donc, pour $x \geq 0$:

$$w = c_3 e^{-\frac{x}{\alpha}} \left(\cos \frac{x}{\alpha} + \sin \frac{x}{\alpha} \right) \quad (4.53)$$

Dans le cas d'une charge linéique on montre que pour $x \geq 0$:

$$w = \frac{q\alpha^3}{8D} e^{-\frac{x}{\alpha}} \left(\cos \frac{x}{\alpha} + \sin \frac{x}{\alpha} \right) \quad (4.54)$$

La déflexion maximale de la plaque w_o se trouve évidemment en $x = 0$, on a donc :

$$w_0 = \frac{V_0 \alpha^3}{8D} \quad (4.55)$$

et

$$w = w_0 e^{-\frac{x}{\alpha}} \left(\cos \frac{x}{\alpha} + \sin \frac{x}{\alpha} \right) \quad (4.56)$$

On voit sur la figure qui représente cette solution, où l'on a normalisé la déflexion par w_0 et la distance horizontale par α , que :

- On a un premier passage de $w = 0$ en x_0 quand :

$$\cos \frac{x_0}{\alpha} + \sin \frac{x_0}{\alpha} = 0 \quad (4.57)$$

$$\frac{\cos}{\cos} + \frac{\sin}{\cos} = 0 \quad (4.58)$$

$$(4.59)$$

soit :

$$\tan \frac{x_0}{\alpha} = -1 \quad (4.60)$$

donc :

$$x_0 = \alpha \tan^{-1}(-1) = \frac{3\pi}{4} \alpha \quad (4.61)$$

- On a un bombement vers le haut, ou “*forebuldge*”, qui accompagne la flexure vers le bas. Ce bombement est maximal quand $dw/dx = 0$ soit :

$$w_0 \left[-\frac{e^{-x/\alpha}}{\alpha} \cos \frac{x}{\alpha} - e^{-x/\alpha} \sin \frac{x}{\alpha} - \frac{e^{-x/\alpha}}{\alpha} \sin \frac{x}{\alpha} + e^{-x/\alpha} \cos \frac{x}{\alpha} \right] = 0 \quad (4.62)$$

donc :

$$-\frac{2w_0}{\alpha} e^{-x_b/\alpha} \sin \frac{x_b}{\alpha} = 0 \quad (4.63)$$

ce qui implique que :

$$x_b = \alpha \sin^{-1}(0) = \pi\alpha \quad (4.64)$$

On appelle “longueur d’onde flexurale” la quantité $\pi\alpha$. Elle augmente avec la rigidité flexurale D .

- La déflexion maximale vers le haut du forebuldge est trouvée pour $x = x_b = \pi\alpha$:

$$w_b = w_0 e^{-\pi} (\cos \pi + \sin \pi) \quad (4.65)$$

$$= -w_0 e^{-\pi} = -0.0432 w_0 \quad (4.66)$$

4.2.5 Application au cas d’Hawaii

La chaîne volcanique sous-marine étroite et linéaire Hawaii-Empereur posée sur la lithosphère océanique de la plaque Pacifique se rapproche relativement bien du cas d’une charge verticale linéique appliquée sur une plaque élastique de dimensions horizontales infinies.

On observe dans la bathymétrie et dans la gravité à l’air libre :

1. Une dépression relativement étroite de part et d’autre de la chaîne volcanique due à la flexure de la plaque sous le poids des volcans ;
2. Un bombement de grande longueur d’onde centré sur les volcans due à un panache mantellique qui advecte de la chaleur sous les îles actives, y permettant fusion partielle et volcanisme.

On filtre la grande longueur pour trouver $x_b = 250$ km. On obtient alors avec les formules précédentes et $\rho_m - \rho_w = 2300$ km m⁻³, $g = 10$ m s⁻², $E = 70$ GPa et $\nu = 0.25$:

1. $\alpha = 80$ km.
2. $D = 2.4 \times 10^{23}$ Nm.
3. $h = 34$ km.

Walcott (1970) avait réalisé des premiers calculs d’épaisseur élastique de la lithosphère autour d’Hawaii et déterminé une valeur de 25 km, soit un facteur 2 à 3 fois moins épais que son épaisseur sismique (déduite de sismique réfraction) ou thermique (déduite de son âge).

Les raisons de ce désaccord sont :

- Viscoélasticité.
- Epaisseur élastique équivalente variable latéralement.
- Plaque discontinue sous la chaîne volcanique.

On montre dans ce dernier cas que l'équation de flexure devient :

$$w = \frac{V_0 \alpha^3}{4D} e^{-\frac{x}{\alpha}} \cos \frac{x}{\alpha} \quad (4.67)$$

avec une amplitude maximale de la déflexion en $x = 0$:

$$w_0 = \frac{V_0 \alpha^3}{4D} \quad (4.68)$$

On voit donc que, pour une charge et une rigidité flexurale équivalentes, la déflexion maximale d'une plaque discontinue est donc deux fois supérieure à celle d'une plaque continue.

Le profil de flexure devient :

$$w = w_0 e^{-\frac{x}{\alpha}} \cos \frac{x}{\alpha} \quad (4.69)$$

Avec $x_b = 250$ km, on obtient alors pour les mêmes valeurs que précédemment :

1. $\alpha = 106$ km.
2. $D = 7.3 \times 10^{23}$ Nm.
3. $h = 49$ km.

Cette valeur de l'épaisseur élastique de la lithosphère autour d'Hawaii est en meilleur accord avec les observations indépendantes.

4.2.6 Flexure d'une plaque en subduction

La flexure résulte de la combinaison de deux causes :

1. Le poids de la plaque supérieure V_0 en extrémité de plaque ;
2. Le moment M_0 des forces agissant sur la plaque indépendamment du poids de la plaque supérieure, c'est-à-dire le poids du slab et les forces exercées par le manteau dans lequel il s'enfonce.

La déflexion répond toujours à la solution générale 4.51 de l'équation de flexure 4.45, avec les conditions aux limites suivantes :

- En $x = \infty$ la déflexion $w = 0$, ce qui implique comme plus haut que $c_1 = c_2 = 0$.
- En $x = 0$ le moment flexural est $-M_0$.
- En $x = 0$ la force verticale est V_0 .

On montre que ces conditions aux limites mènent à la solution suivante :

$$w = \frac{\alpha^2}{2D} e^{-\frac{x}{\alpha}} \left(-M_0 \sin \frac{x}{\alpha} + (V_0 \alpha + M_0) \cos \frac{x}{\alpha} \right) \quad (4.70)$$

Cette équation se réduit à celle d'une plaque discontinue dans le cas où $M_0 = 0$ et la charge V_0 ici ne s'applique qu'à une demi-plaque et est donc $V_0/2$ par rapport au cas de la plaque discontinue.

Cette équation n'est pas très utilisable car on ne peut déterminer ni V_0 ni M_0 par la mesure. Par contre on sait mesurer $w_b =$ hauteur du forebuldge et $x_b - x_0$

= demi largeur du forebuldge à partir de la bathymétrie sous-marine lissée. On cherche donc à écrire V_0 et M_0 en fonction de ces deux quantités.

En $x = x_0$ on a $w = 0$ donc :

$$0 = -M_0 \sin \frac{x_0}{\alpha} + V_0 \alpha \cos \frac{x_0}{\alpha} + M_0 \cos \frac{x_0}{\alpha} \quad (4.71)$$

ce qui se simplifie, en divisant le tout par $\cos(x_0/\alpha)$:

$$\tan \frac{x_0}{\alpha} = 1 + \alpha \frac{V_0}{M_0} \quad (4.72)$$

En $x = x_b$ on a $dw/dx = 0$ donc (après un peu d'algèbre) :

$$\tan \frac{x_b}{\alpha} = -1 - \frac{2}{\alpha} \frac{V_0}{M_0} \quad (4.73)$$

Ces deux équations donnent aussi :

$$x_b - x_0 = \frac{\pi}{4} \alpha \quad (4.74)$$

On peut utiliser ces deux équations indépendantes pour substituer V_0 et M_0 dans la solution de la flexure et, après un peu plus d'algèbre fastidieuse, arriver à la solution utilisable :

$$\frac{w}{w_b} = \sqrt{2} e^{\pi/4} \exp \left[-\frac{\pi}{4} \left(\frac{x - x_0}{x_b - x_0} \right) \right] \sin \left[-\frac{\pi}{4} \left(\frac{x - x_0}{x_b - x_0} \right) \right] \quad (4.75)$$

C'est le "profil universel de flexure" valide pour toute flexure de plaque élastique sous l'effet d'une charge le long d'un de ses bords.

Pour la fosse des Mariannes on prend $x_b = 55$ km, $x_0 = 0$ et $w_b = 500$ m. On trouve, avec $\rho_m - \rho_w = 2300$ km m⁻³, $g = 10$ m s², $E = 70$ GPa et $\nu = 0.25$:

- $\alpha = 70$ km.
- $D = 1.4 \times 10^{23}$ Nm.
- $h = 28$ km.

Pour cette plaque et cette subduction, le profil universel de flexure reproduit très bien les observations. Ceci n'est pas vrai pour toutes les plaques/subductions car les contraintes flexurales peuvent atteindre des valeurs très importantes, supérieures à la résistance mécanique de la lithosphère, et induire fracturation et déformation plastique.

4.2.7 Flexure dans un cas limite

Plaçons nous dans le cas d'une lithosphère continentale de rigidité flexurale nulle, ce qui revient à dire que son épaisseur élastique équivalente est nulle – elle flue. Cela revient aussi à dire que $\sigma_{xy} = 0$, pas de résistance au cisaillement. On a donc $D = 0$.

On suppose aussi qu'il n'y a pas de forces horizontales exercées aux limites, donc $P = 0$.

La charge est due au poids d'une topographie continentale de hauteur $h(x)$, on a donc :

$$q(x) = \rho_c g h(x) \quad (4.76)$$

La force hydrostatique développée sous l'effet de la flexure due à cette charge est le poids du volume déplacé, soit :

$$(\rho_m - \rho_c) g w \quad (4.77)$$

Et l'équation de la flexure se réduit à :

$$(\rho_m - \rho_c) g w = \rho_c g h(x) \quad (4.78)$$

soit :

$$w = \frac{\rho_c g h(x)}{(\rho_m - \rho_c)} \quad (4.79)$$

ce qui est l'équation d'isosostasie d'Airy. L'isosostasie purement hydrostatique est donc un cas particulier de flexure à la limite où $D \rightarrow 0$.

4.2.8 Estimation de l'épaisseur élastique équivalente de la lithosphère

La lithosphère est un filtre qui transforme une charge en réponse flexurale

Pour une charge périodique

On peut montrer que la réponse flexurale est

Où $\phi_e(k)$ est la fonction réponse On travaille dans l'espace des nombres d'onde k , via une transformée de Fourier

Admittance

Cohérence

Cf. Diament et al. 1986

4.2.9 Interprétation de T_e

It is argued [Artemieva, 2006] that T_e represents the depth to the 550degC isotherm in lithosphere older than ~ 200 Ma, citing a critical decrease in strength of olivine above this temperature.

Talwani et al. [1972] passed bathymetric and gravimetric observations through low- and high-pass filters to demonstrate that short-wavelength bathymetry produced the short-wavelength gravity anomalies, while long-wavelength bathymetry was compensated.

TBD.