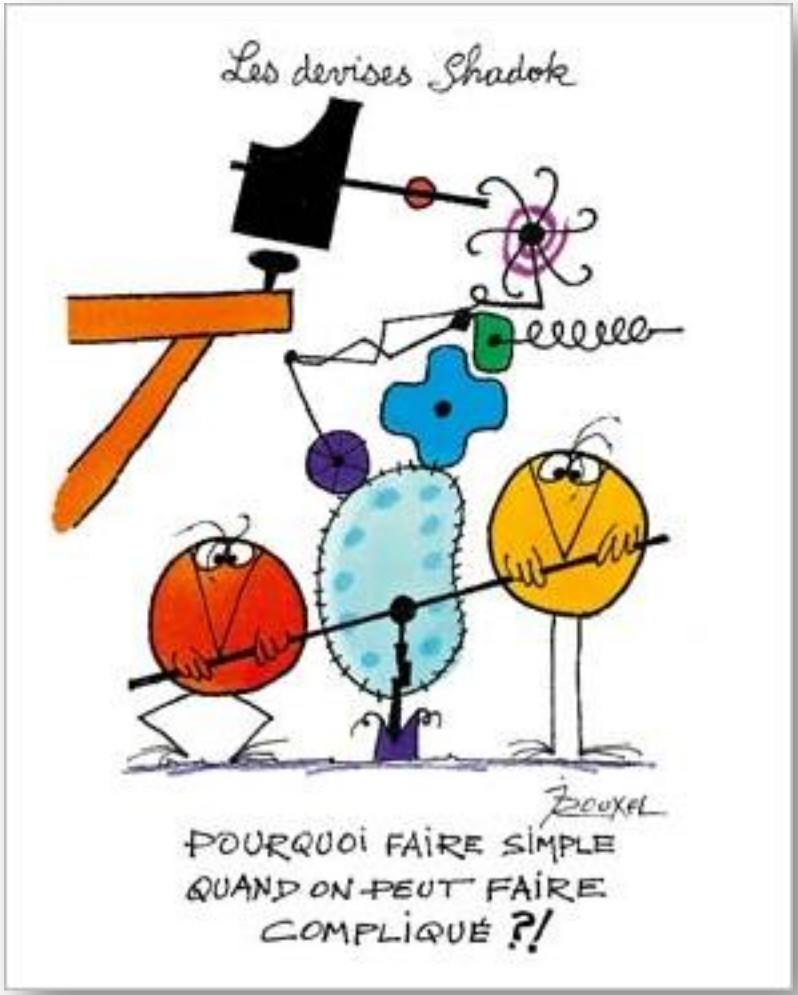
Altitudes

Eric Calais – eric.calais@ens.fr

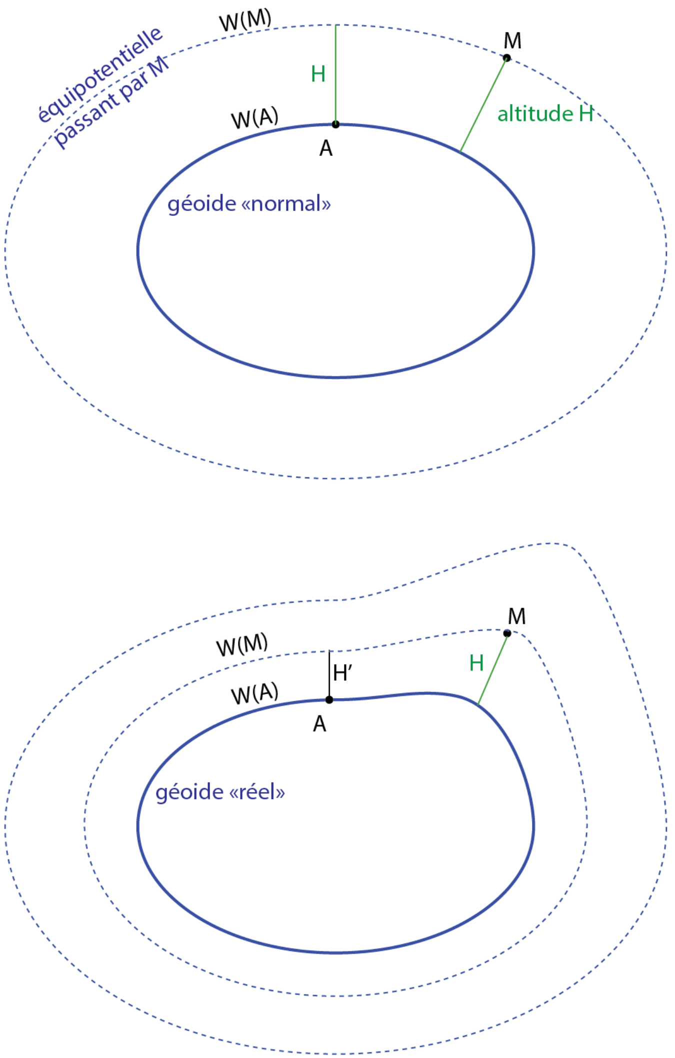
Altitudes

- « Elévation verticale d'un lieu par rapport à un niveau de base » (Wikipedia)
- « Coordonnée par laquelle on exprime l'écart vertical d'un point à une surface de référence proche du géoïde » (IGN)
- Deux questions:
  - Niveau de base? Le plus simple et (apparemment) le plus pratique = altitude « par rapport au niveau de la mer » => nivellement de proche en proche par rapport à un marégraphe.
  - Verticale? => pesanteur…
  - Surface proche du géoïde?



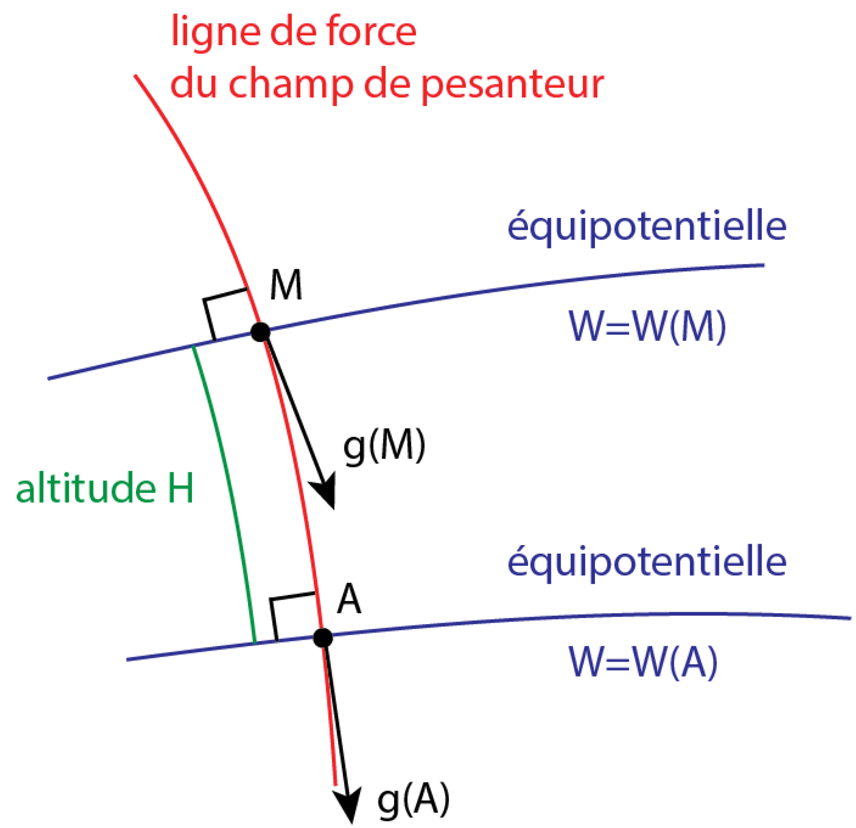
Altitudes

- Equipotentielle passant par M est a distance H du géoïde:
  - Terre homogène: H = H’
  - Terre réelle: H != H’
- Au-dessus de A, si on s’élève verticalement d’une distance H, on n’est plus « au niveau » du point M.
- Donc l’altitude ne peut pas se définir comme une simple hauteur géométrique au-dessus d’une surface de référence…
- Donc la mesure de l’altitude nécessite de connaitre le géoïde sous le point de mesure, donc le champ de pesanteur…



Quelques définitions

- La Terre n'est pas une sphère homogène immobile => équipotentielles non parallèles (H n'est pas constant).
- La pesanteur est perpendiculaire aux surfaces équipotentielles.
- Une courbe qui, en chacun de ses points, est orthogonale aux surfaces équipotentielles est une ligne de force.
- Ses tangentes sont des verticales.
- Par définition, l'altitude de M (par rapport à A, qui peut par exemple être fixé arbitrairement à zéro) est l'abscisse curviligne entre A et M, comptée le long de la ligne de force du champ de pesanteur.



Quelques définitions

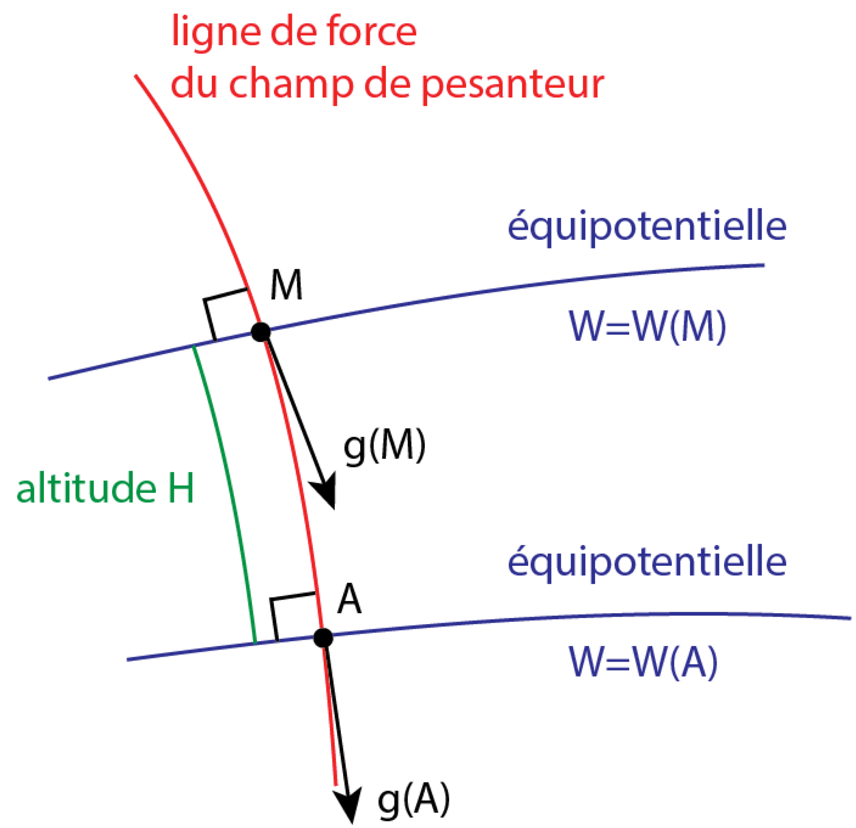
- La définition du potentiel de pesanteur donne:

$$W(A) = -\int_{\infty}^{A} g\,dr$$
$$\Rightarrow W(A) - W(M) = -\int_{M}^{A} g\,dr$$
$$W(M) = -\int_{\infty}^{M} g\,dr$$

- Si W(A) est le géoïde ($W(A) = W_o$), alors W(A)-W(M) = « cote géopotentielle » = m^2s^{-2} = travail à effectuer dans le champ de la pesanteur réelle pour se rendre de la surface de référence W_o à la surface équipotentielle passant par M.
- En supposant g constant entre A et M (e.g., en utilisant une valeur moyenne), on a alors:

$$W(A) - W(M) = -\tilde{g}\int_{M}^{A} dr = \tilde{g}H$$

$$\Rightarrow H = \frac{W(A) - W(M)}{\tilde{g}}$$



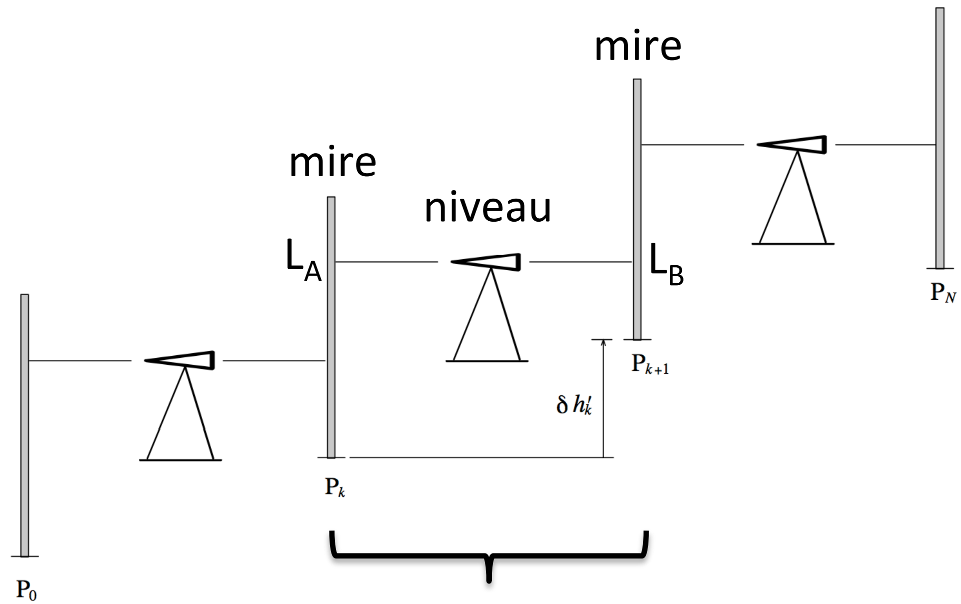
=> la détermination d'altitude (H) requiert de (1) mesurer la cote géopotentielle, (2) choisir un *g* moyen (connu ou calculé).

Le nivellement

- Niveau à bulle = tangent à une équipotentielle de pesanteur.
- Mesure simple = visée avant + arrière => $\delta h_k'$ (= nivelée)
- De proche en proche = cheminement.
- Le niveau matérialise une équipotentielle, on peut donc peut écrire la cote géopotentielle:

$$W(P_N) - W(P_O) = -\sum_{k=0}^{N-1} g_k \delta h_k^{'}$$

- Nivellement => $\delta h_k'$
- Mesure gravimétrique => g_k
- On peut donc calculer des cotes géopotentielles.
- Puis cote géopotentielle => calcul de l'altitude, cf diapo précédente.



Une nivelée, L_A = mesure avant, L_B = mesure arrière
$\delta h_k' = L_A - L_B$

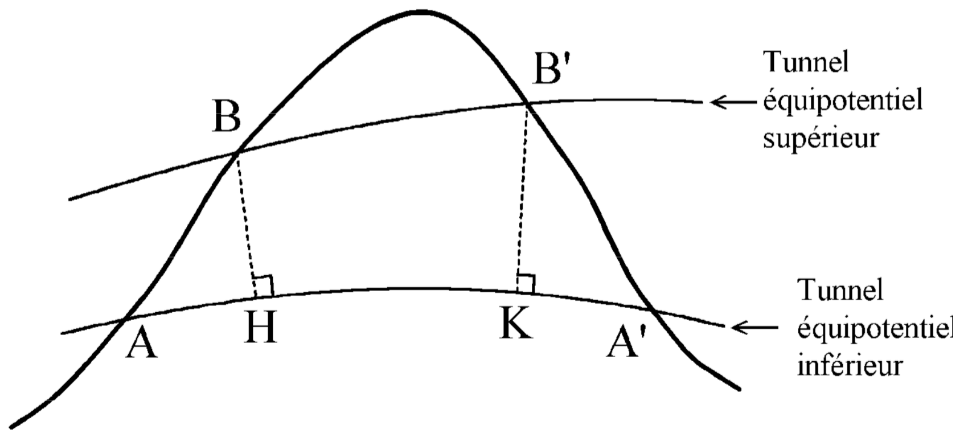
Un cheminement

Le nivellement

- Conséquence importante de la définition de la cote géopotentielle:

$$W(P_N) - W(P_O) = -\sum_{k=0}^{N-1} g_k \delta h_k^{'}$$

- La force de pesanteur étant conservative, la cote géopotentielle (= travail de cette force) entre deux points est indépendante du chemin parcouru.
- Par contre la mesure des dénivelées dépend du chemin suivi AB ou A'B '
- Deux points peuvent être à la même altitude mais pas la même hauteur (dénivelée).
- A l'inverse, deux points de même hauteur ne sont pas nécessairement à la même altitude.



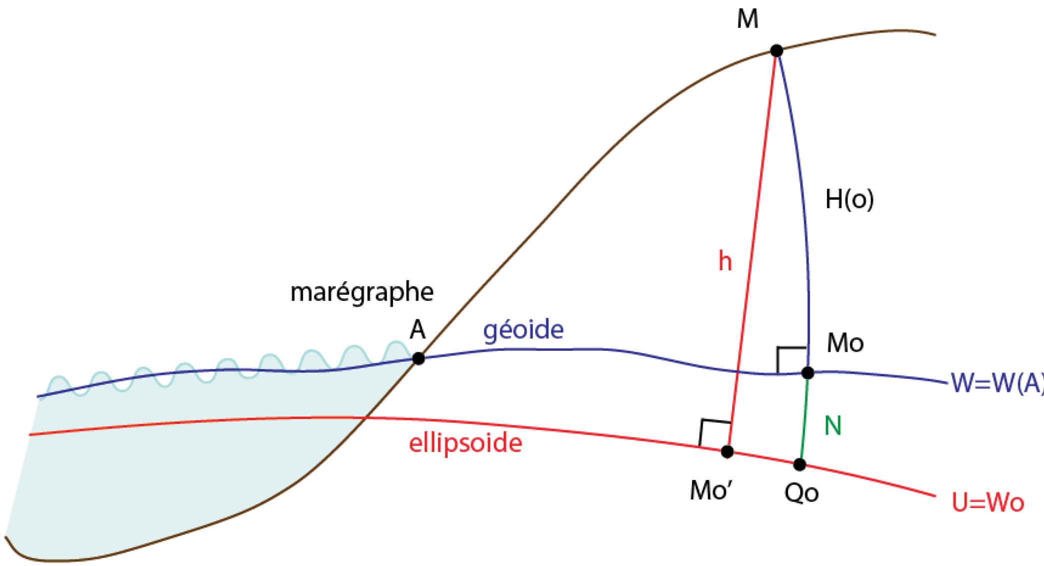
Le paradoxe des tunnels équipotentiels (Duquenne, 2008)

Altitude orthométrique $H^{(o)}$

- H = hauteur ellipsoïdale de M (par exemple donnée par GPS)
- $H^{(o)}$ = abscisse (M_oM) curviligne au-dessus du géoïde = altitude orthométrique (proche de la « hauteur au-dessus du niveau de la mer »).
- N = hauteur du géoïde par rapport à l'ellipsoïde = anomalie du géoïde.
- La ligne de force du champ de pesanteur et la normale à l'ellipsoïde diffèrent de < 1 mm.
- On peut transformer une altitude orthométrique en hauteur ellipsoïdale par:

$$h \approx N + H^{(o)}$$

- Et vice versa.



$$H^{(o)} = \frac{W(A) - W(M)}{\tilde{g}}$$

g tilde = moyenne de la pesanteur <u>réelle</u> sur l'arc de ligne de force de Mo à M

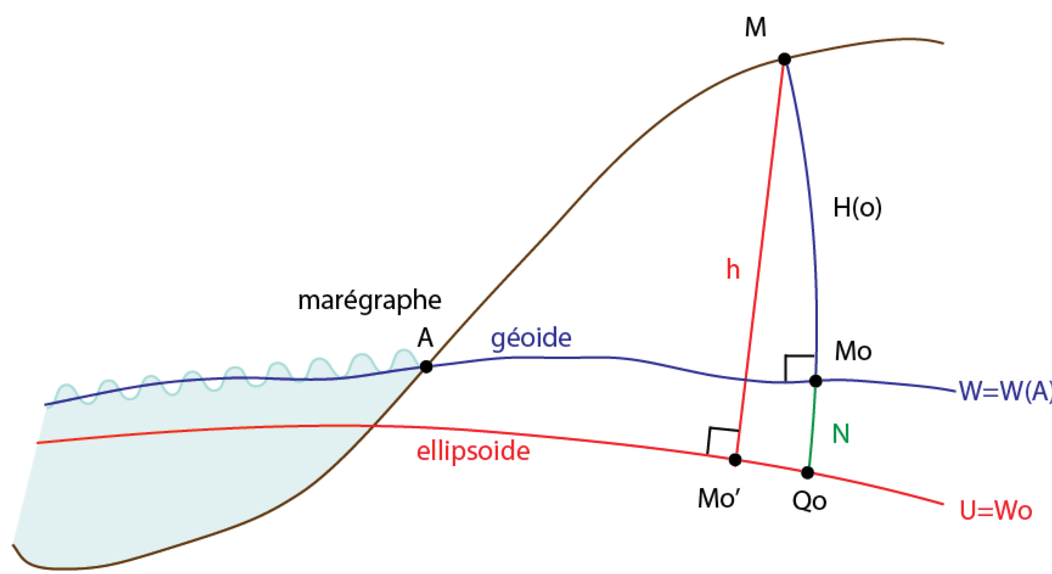
Altitude orthométrique $H^{(o)}$

- On a donc: $H^{(o)} = \dfrac{W(A) - W(M)}{\tilde{g}}$
- g tilde = moyenne de la pesanteur réelle sur l'arc de ligne de force de Mo à M
- Problème: g tilde = dépend des distributions de masse dans la Terre => impossible à mesurer
- On doit faire des hypothèses:
  - Variation linéaire de g:

$$\tilde{g}_M = g_M - \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial H} H_N^{(o)}$$

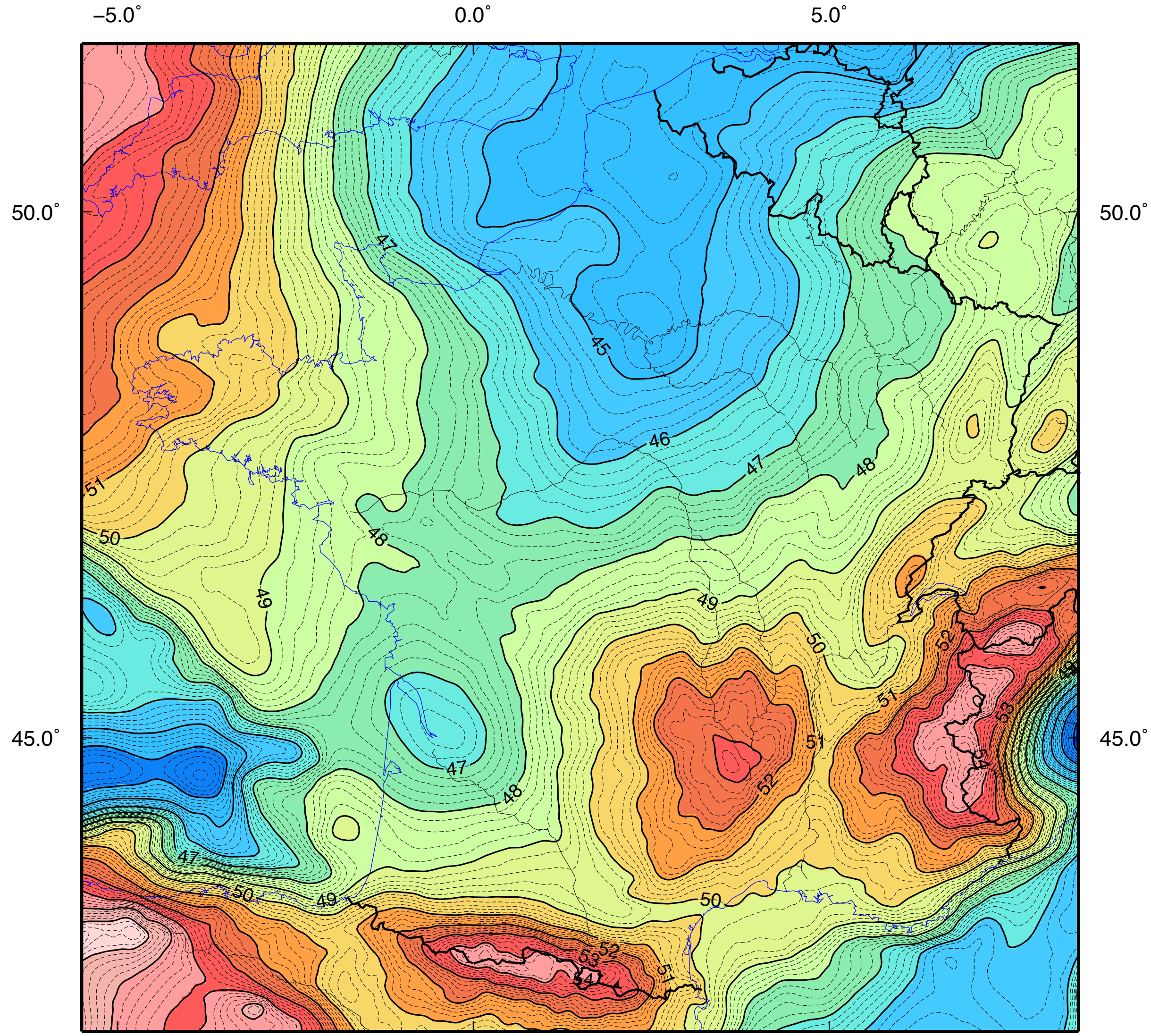
  - Gradient de « Poincaré-Prey »:

$$\frac{\partial g}{\partial H} = -0.848 \times 10^{-6} s^2$$



Un modèle de géoïde, EGM2008

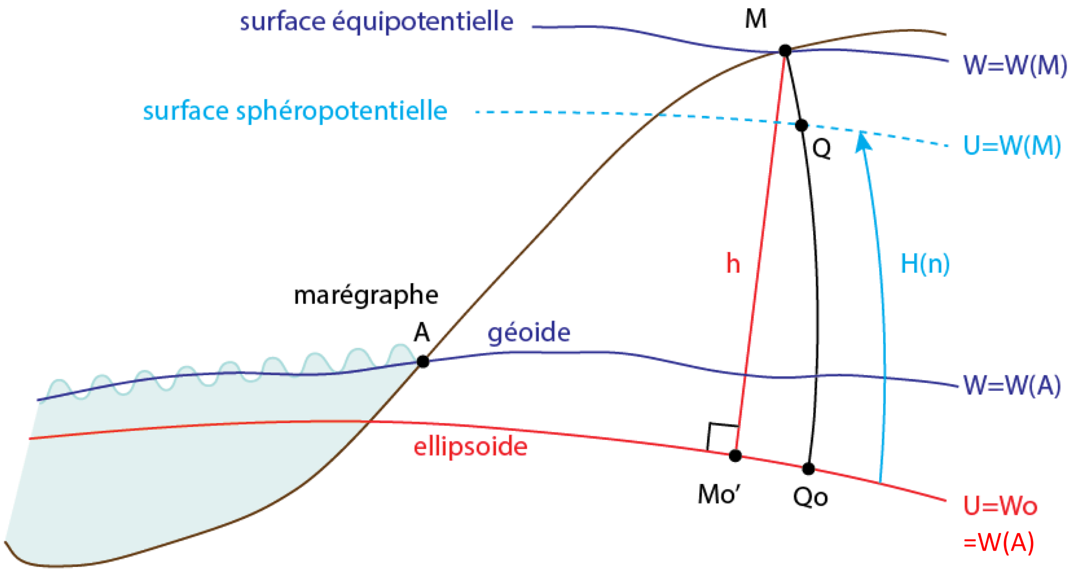
EGM2008: obtenu à partir de données gravimétriques terrestres et maritimes, de données d'altimétrie satellitaire, et utilise des Modèles Numériques de Terrain (MNT) pour évaluer la contribution du relief au géoïde.



http://earth-info.nga.mil/GandG/wgs84/gravitymod/egm2008/

Altitude normale $H^{(n)}$

- La détermination des altitudes orthométrique de Helmert nécessite de calculer $\tilde{g}$, donc de connaitre la variation de g à l'intérieur de la Terre. Ceci n'est généralement pas possible et la détermination de $\tilde{g}$ nécessite donc des hypothèses géophysiques.
- Une alternative consiste à remplacer $\tilde{g}$ par la pesanteur normale.
- On obtient des altitudes dites « normales » = abscisse curviligne $H^{(n)}$ = hauteur Q_oQ de M au-dessus de l'ellipsoïde.
- On définit une surface sphéropotentielle, cf. schéma.



$$H^{(n)} = \frac{W(A) - W(M)}{\tilde{\gamma}}$$

γ = moyenne de la pesanteur normale sur l'arc de ligne de force de Q_o à Q, donc déterminable par le calcul.

Altitude normale $H^{(n)}$

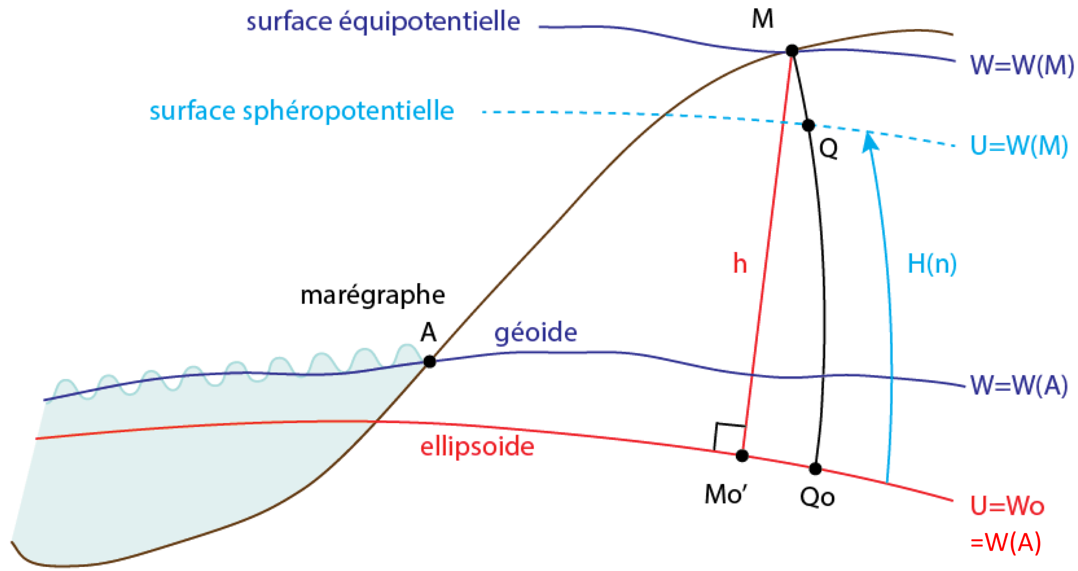
- γ = moyenne de la pesanteur normale sur l'arc de ligne de force de Q_o à Q
- La pesanteur normale peut être calculée exactement:
  - Sur l'ellipsoïde de référence:

$$\gamma_0(\varphi) = \frac{a\gamma_E \cos^2\varphi + b\gamma_P \sin^2\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}}$$

  - A une hauteur h:

$$\gamma_h(\varphi,h) = \gamma_0(h)\left[1 - \frac{2}{a}\left(1 + f + m - 2f\sin^2\varphi\right)h + 3\frac{h^2}{a^2}\right]$$

Formule exacte de Somigliana, dérivée de la formule approchée de Clairaut

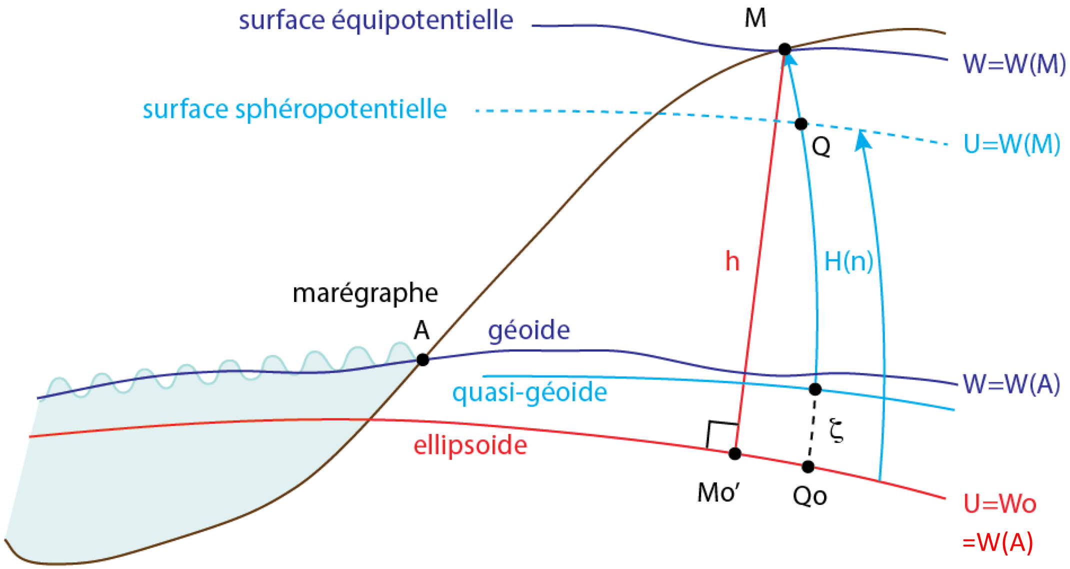


$$H^{(n)} = \frac{W(A) - W(M)}{\tilde{\gamma}}$$

γ = moyenne de la pesanteur normale sur l'arc de ligne de force de Q_o à Q, donc déterminable par le calcul.

$H^{(n)}$ et le quasi-géoïde

- Considérons l'ellipsoïde de référence comme une surface équipotentielle d'un modèle de champ normal noté U.
- Par convention, fixons que le potentiel (normal) sur cet ellipsoïde = potentiel réel sur le géoïde: $U_{Qo}=W_o=W(A)$.
- Par le point M passe une équipotentielle du champ réel W=W(M).
- Il existe une surface équipotentielle du champ normal (en M) qui vaut U=W(M) = surface « sphéropotentielle ».
- U=W(M) décalée de M d'une valeur ζ proche du décalage entre géoïde et ellipsoïde.
- On définit le « quasi-géoide » en M comme la surface située à une abscisse curviligne $-H^{(n)}$ le long de Q_oQ.



Altitudes normales et orthométriques

- La conversion altitude normale – orthométrique est donc donnée par:

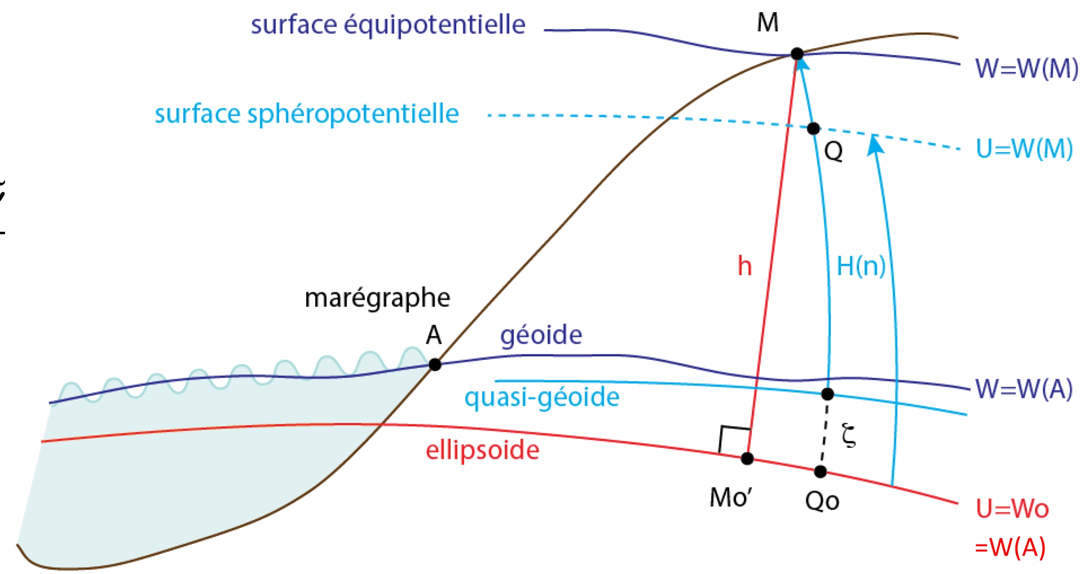
$$N-\zeta = H^{(n)} - H^{(o)} = \left(W(A)-W(M)\right)\frac{\tilde{g}-\tilde{\gamma}}{\tilde{g}\tilde{\gamma}}$$

$$H^{(n)} - H^{(o)} = H^{(n)}\frac{\tilde{g}-\tilde{\gamma}}{\tilde{g}} = H^{(o)}\frac{\tilde{g}-\tilde{\gamma}}{\tilde{\gamma}}$$

- On peut montrer que cette différence peut s'approximer d'après l'anomalie de Bouguer Δg_B:

$$H^{(n)} - H^{(o)} \approx \frac{\Delta g_B}{\tilde{\gamma}} H$$

- En pratique, on utilise les grilles de conversion fournies par l'IGN.



- En France, les différences se répartissent entre −16 cm et +61 cm .
- En Suisse ces différences se répartissent entre −10 cm et +50 cm (Marti, 2007) avec les valeurs les plus élevées corrélées aux plus hauts reliefs.
- En région defaible variation topographique, les différences sont de l'ordre du centimètre.

Les altitudes en France

- Altitudes orthométriques = la référence en France jusqu'en 1969: nivellement NGF-Lallemand.
- Associées à un géoide.
- Altitudes normales = système légal en France continentale: NGF-IGN69.
- Associées à un « quasi-géoïde » = une surface mathématique qui (localement) s'affranchit de connaitre la distribution des densités dans la Terre.
- En toute rigueur, les altitudes normales ne garantissent pas la direction d'écoulement d'un fluide…

Altitudes normales et orthométriques

- Une grille de corrections entre les altitudes orthométriques (NGF-Lallemand) et normales (NGF-IGN69) est fournie par l'IGN.

- Une valeur moyenne C par carte au 50000ème telle que:

$$H^{(o)} + C = H^{(n)}$$

Le quasi-géoïde français QGF98

- Calculé à partir de données gravimétriques.
- La formule de Stokes donne la relation entre l'anomalie gravimétrique et l'anomalie du géoïde:

$$\Delta N = \frac{R}{4\pi\gamma}\int_{\sigma_0} \Delta g_{res} S_M(\varphi)\, d\sigma$$

R = rayon moyen de la Terre, γ = pesanteur normale sur l' ellipsoïde de référence

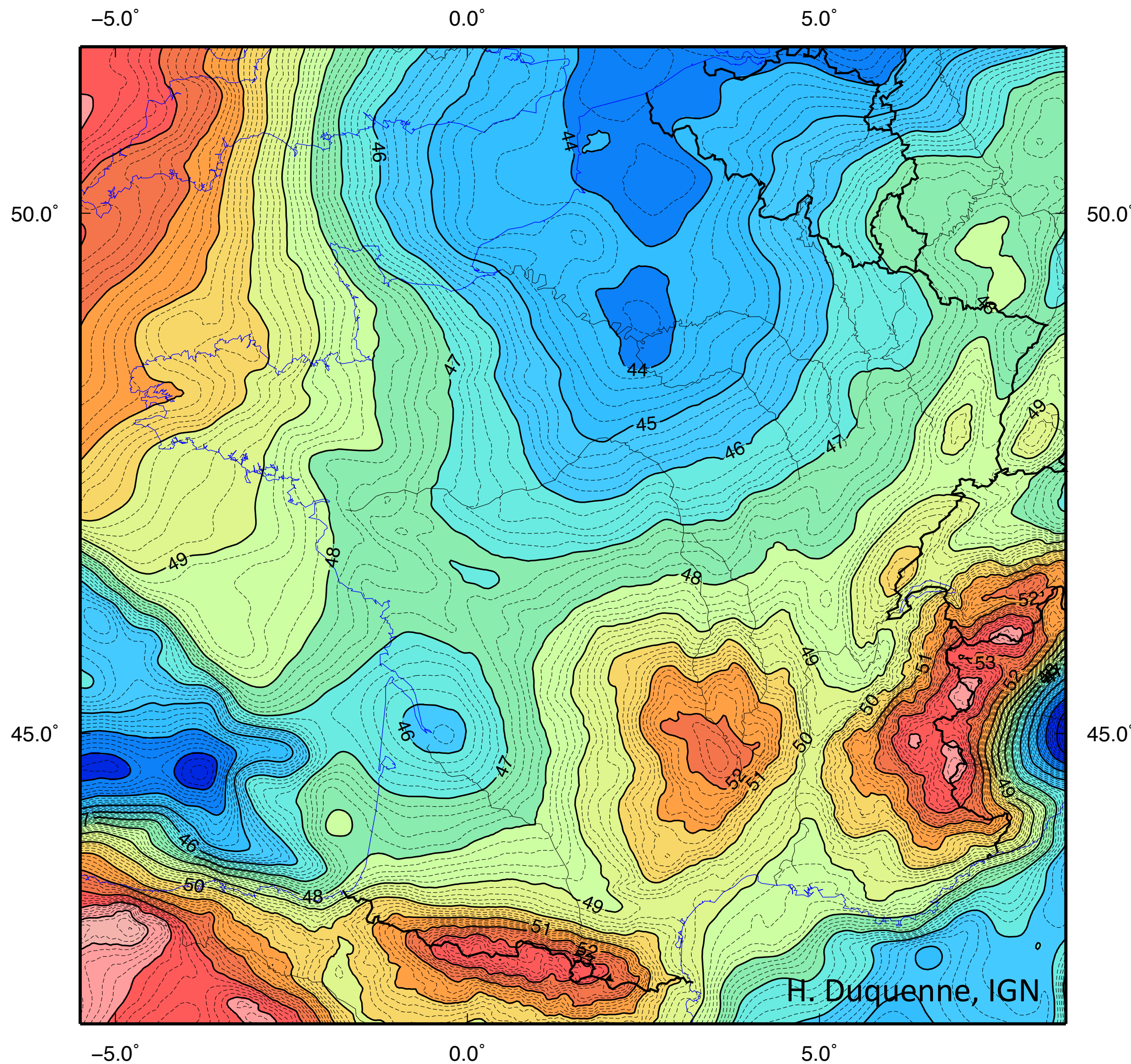
Δg_{res} = anomalie de pesanteur mesurée corrigée de l'effet de la topographie

σ = disque d'intégration

$S_M(\varphi)$ = kernels de Stokes:

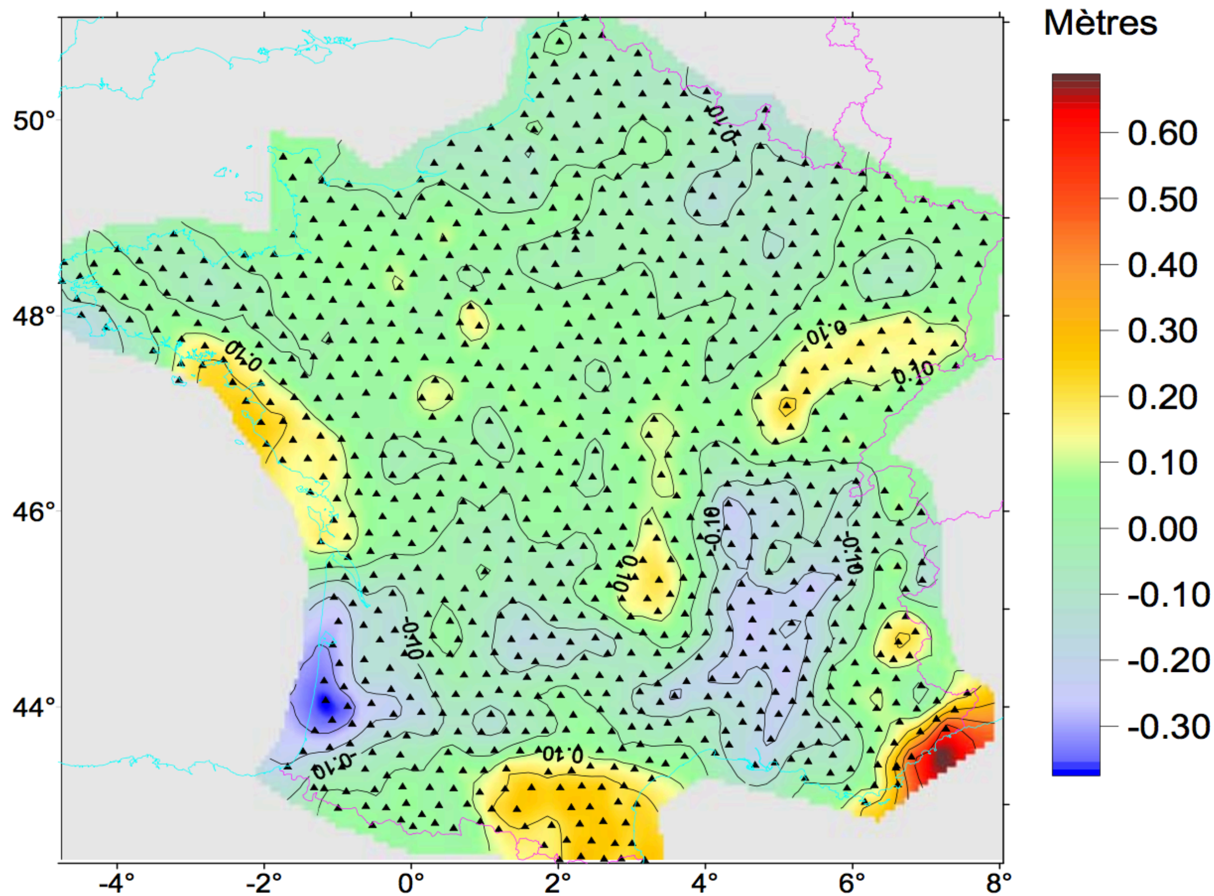
$$S_M(\varphi) = \sum_{n=2}^{M} \frac{2n+1}{n-1} P_n \cos\varphi$$

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n\left[\left(x^2-1\right)^n\right]}{dx^n}$$



Le quasi-géoïde français QGF98

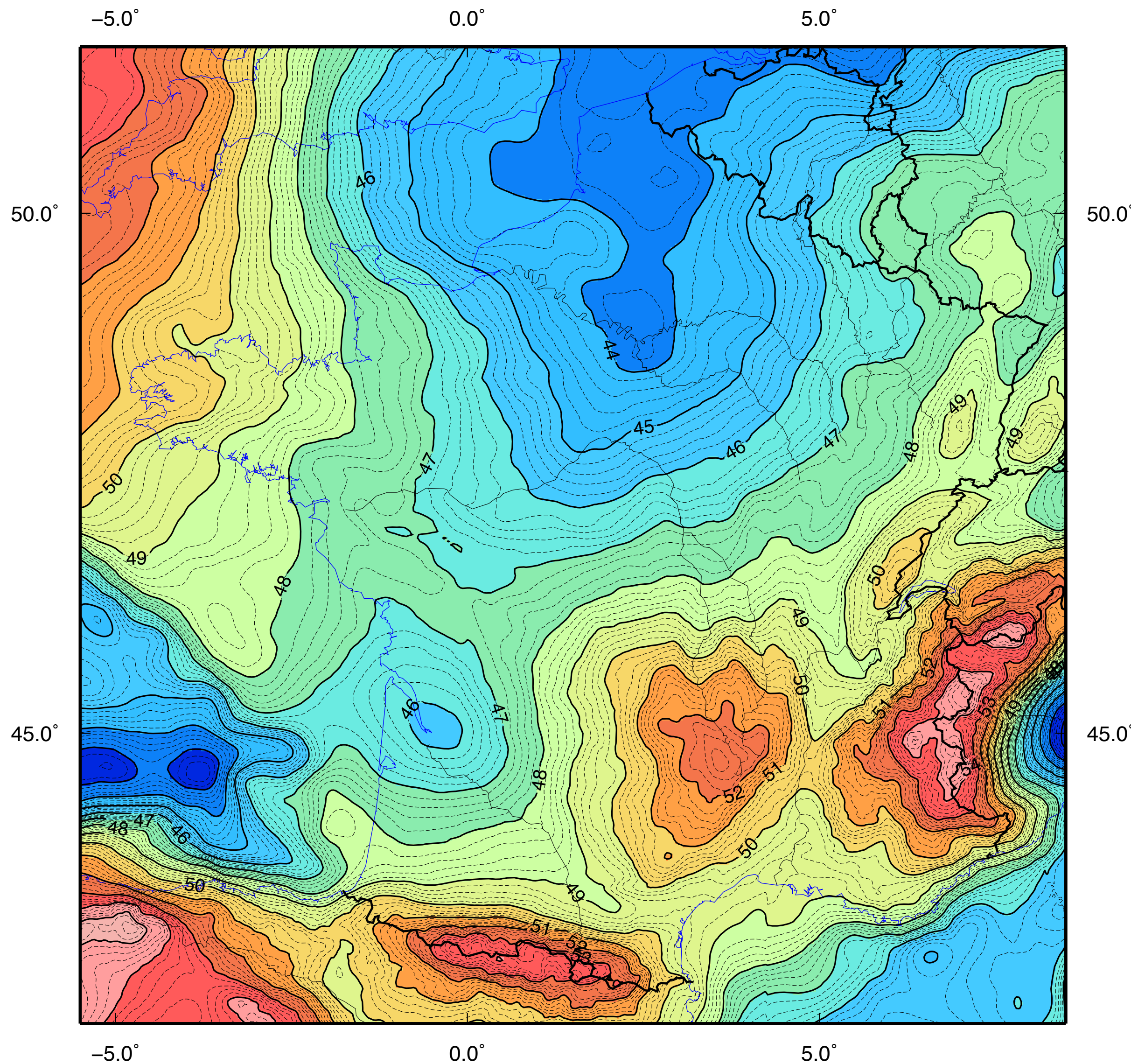
- Problème: la comparaison géoïdes et quasi-géoïdes scientifiques aux données en colocation GPS/nivellement montre des écarts importants, supérieurs aux précisions à la fois du GPS/nivellement et interne du géoïde gravimétrique.
- Ex. QGF98/nivellement: biais de -0.38 à +0.68 m, moyenne 0.06 m
- Ces écarts sont trop importants pour permettre d'utiliser directement ces modèles pour des applications géodésiques et topographiques.



Résidus de la comparaison de QGF98 avec les points nivelés du RGF

Grille de conversion des altitudes

- Pour les applications pratiques (conversion hauteur GPS en altitude normale NGF-IGN69), on a créée une grille de conversion qui corrige ces problèmes en incluant, entre autres, des mesures en colocation GPS/nivellement.
- Cette grille est un quasi-géoïde « déformé » par redistribution des résidus observés sur les points GPS nivelés du réseau de base français.
- Ci-contre la dernière en date: RAF09 (Référence d'Altitude Française).

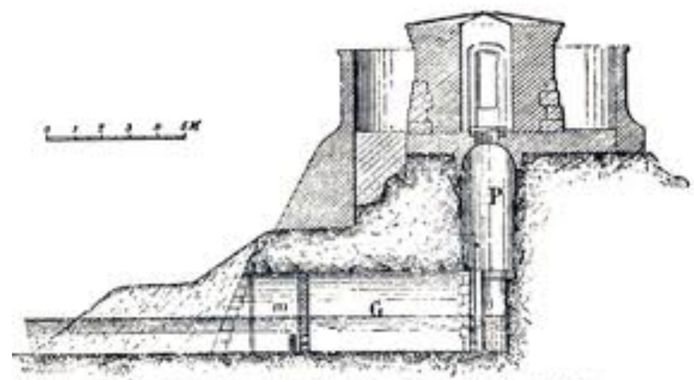



ALTITUD
SOBRE EL NIVEL MEDIO DEL MAR
EN ALICANTE 962m,50
EN SANTANDER 961m,63
(photo P. Briole)

Les altitudes en France continentale

- Système d'altitude : NGF/IGN69
- Type d'altitude : normal
- Origine établie à partir des observations marégraphiques réalisées au Marégraphe de Marseille entre le 1er février 1885 et le 1er janvier 1897
- Repère fondamental : M.AC – 0-VIII implanté à l'intérieur des bâtiments du Marégraphe de Marseille
- Puis de proche en proche par nivellement

Le réseau de nivellement de France métropolitaine		
Ordre	Longueur approximative (km)	Nombre approximatif de repères en bon état
1^{er} ordre	15 000	21 000
$2^{ème}$ ordre	20 000	26 000
$3^{ème}$ ordre	45 000	63 000
$4^{ème}$ ordre	220 000	220 000
Total	300 000	330 000



L'Observatoire marégraphique de Marseille.
Fig. 1. — Coupe de l'Observatoire.

Matricule : **II' - 255**

Système d'altitude : NGF-IGN 1969

496,737 m

ALTITUDE NORMALE

Altitude normale

Année de dernière détermination : 1975

Repère vu en place en 2002

Type : **M REPERE CYLINDRIQUE DU NIVELLEMENT GENERAL**

Complément :

Système : RGF93 - Ellipsoïde : IAG GRS 1980 - Méridien origine : GREENWICH

Longitude (dms) : **7° 06' 18'' E** *Latitude (dms) :* **44° 05' 00'' N**

Système : RGF93 - Projection : LAMBERT-93

E (km) : **1028.61** *N (km) :* **6340.14**

Département : **ALPES-MARITIMES** *Numéro INSEE :* **06129** *Commune :* **SAINT-SAUVEUR-SUR-TINEE**

Voie suivie : **D.2205**

de : **ISOLA** *à :* **BANCAIRON**

Coté : **Droit** *PK :* **24,35** *km* *Distance :* **-**

Localisation : **A "SAINT-SAUVEUR-SUR-TINEE"**

Support : **MAIRIE**

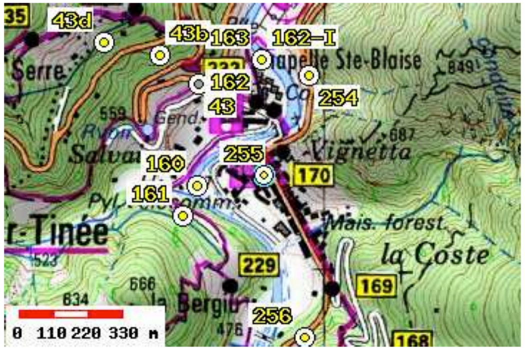
Partie support : **MUR DE FACADE, FACE ROUTE**

Repèrements : **A L'AXE**

A 0.46 M AU-DESSUS DU SOL

Remarques : **Exploitable par GPS depuis une station excentrée**

Le repère est au centre de la photo

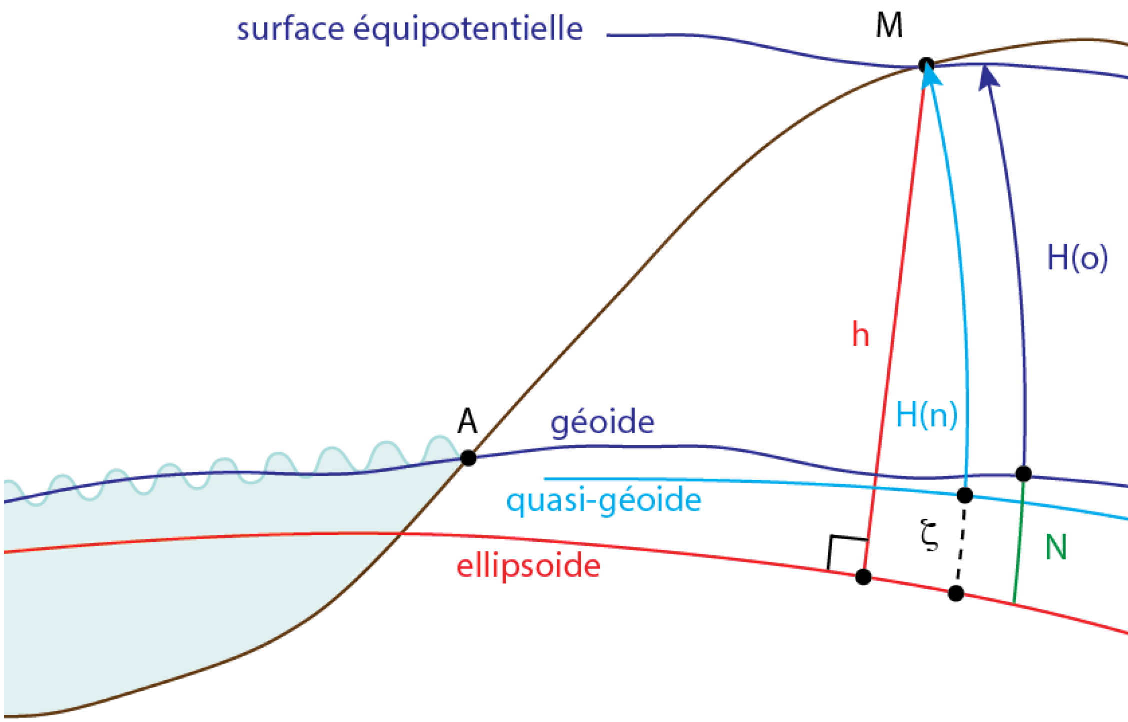


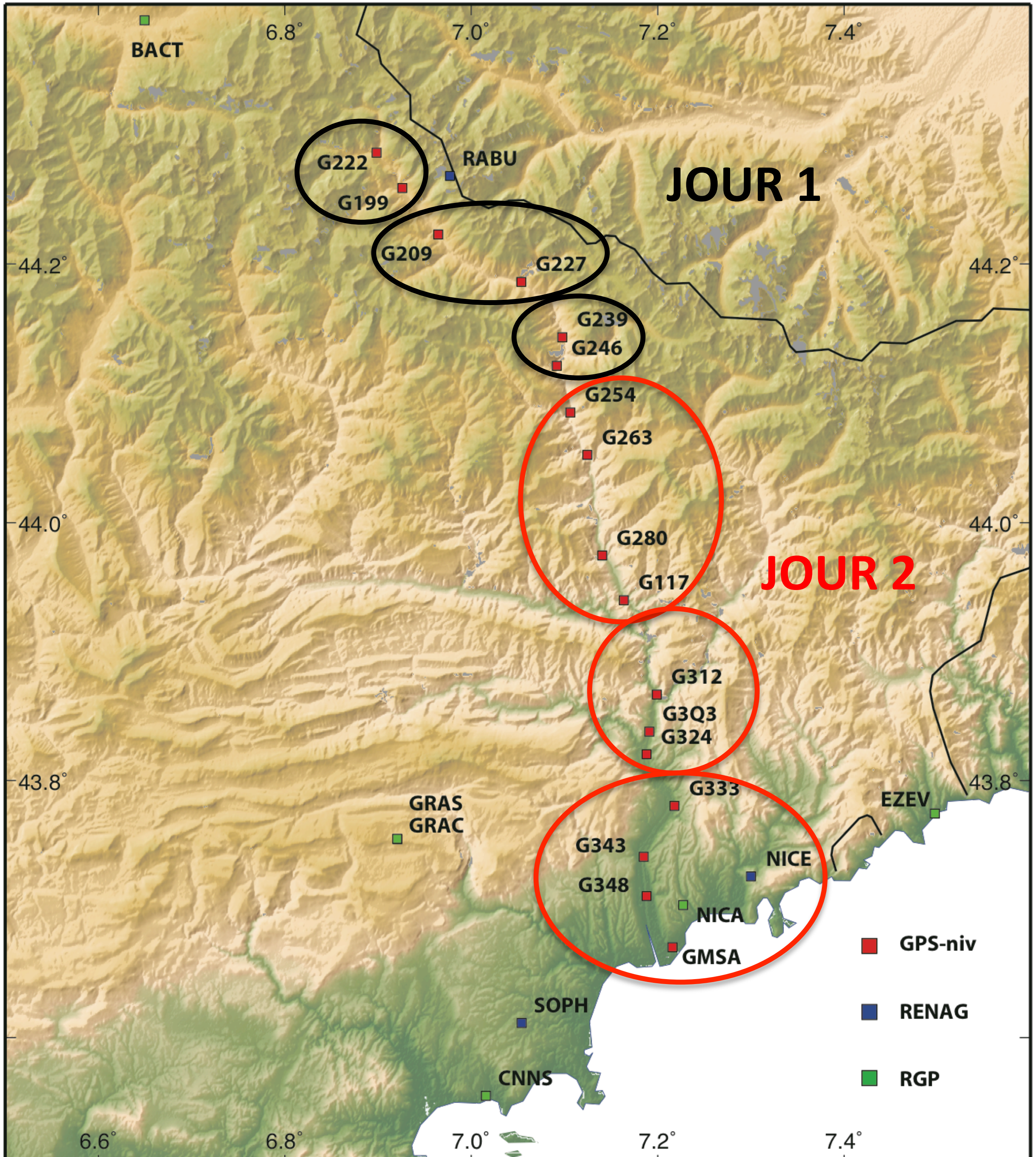
Carte : 3641 PUGET-THENIERS

http://geodesie.ign.fr/fiches/

Notre stage

- N = anomalie du géoïde – quantité recherchée.
- $H^{(n)}$ = altitude normale (NGF-IGN69) donnée sur les fiches de nivellement.
- Correction orthométrique $H^{(o)}$-$H^{(n)}$ donnée.
- Notre travail:
  1. Mesurer h par GPS sur des points pour lesquels $H^{(n)}$ est déjà connu.
  2. Convertir $H^{(n)}$ en $H^{(o)}$.
  3. Calculer $N = h – H^{(o)}$
  4. Comparer avec des modèles de géoïde.





BACT
RABU
G222
G199
G209
G227
G239
G246
G254
G263
G280
G117
G312
G3Q3
G324
G333
G343
G348
NICE
NICA
GMSA
GRAS
GRAC
EZEV
SOPH
CNNS
JOUR 1
JOUR 2
GPS-niv
RENAG
RGP
6.6°
6.8°
7.0°
7.2°
7.4°
43.8°
44.0°
44.2°