

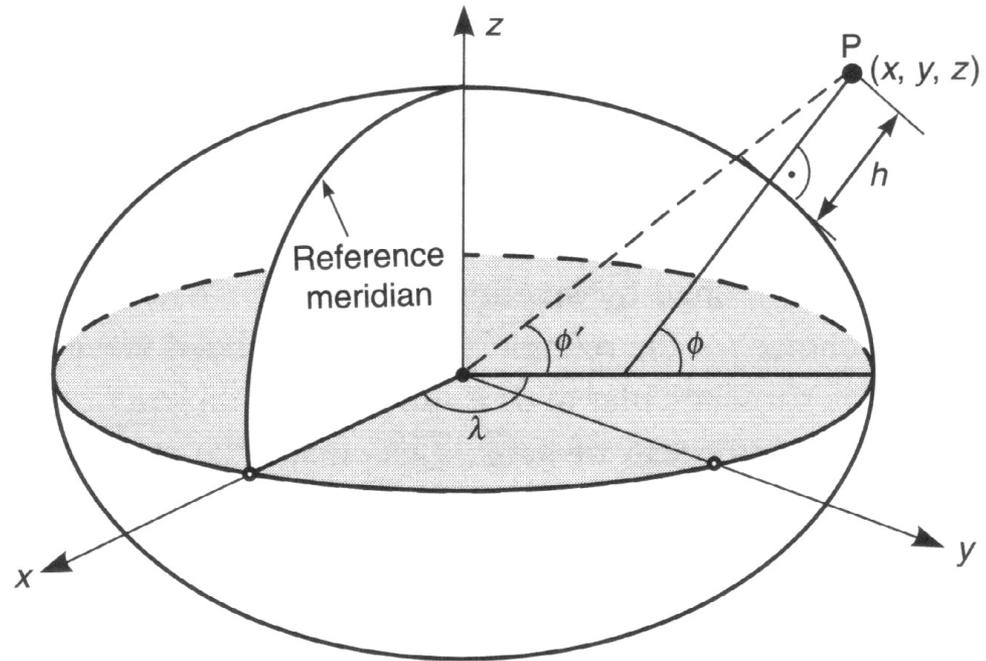
Principes du positionnement de précision par GPS



ENS
ÉCOLE NORMALE
SUPÉRIEURE

Rappel

- Coordonnées courantes = ellipsoïdales mais calculs beaucoup plus simples en repère cartésien géocentrique (ECEF).
- Définition:
 - Origine = centre de masse de la Terre
 - 3 axes orthogonaux X, Y, Z, OZ = axe de rotation de la Terre
 - Plan (X,Z) = contient le méridien origine
 - Plan (X,Y) = plan équatorial
 - Unité = mètre
 - Lié à la Terre (tourne avec lui)
- Transformations de coordonnées:
 - Triviales de l,f,h -> X,Y,Z
 - Solution itérative pour X,Y,Z -> l,f,h



$$\tan \lambda = y / x$$

$$p = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$N = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 \phi)^{1/2}}$$

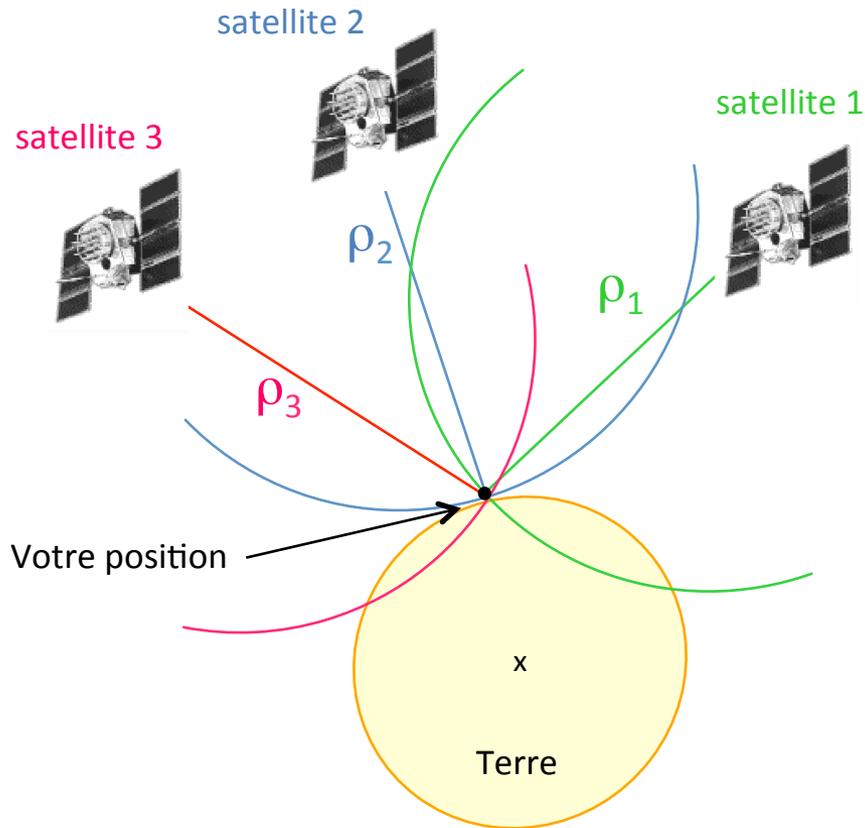
$$h = \frac{p}{\cos \phi} - N$$

$$\tan \phi = \frac{z}{p} \left(1 - e^2 \frac{N}{N + h} \right)$$

$$N = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 \phi)^{1/2}}$$

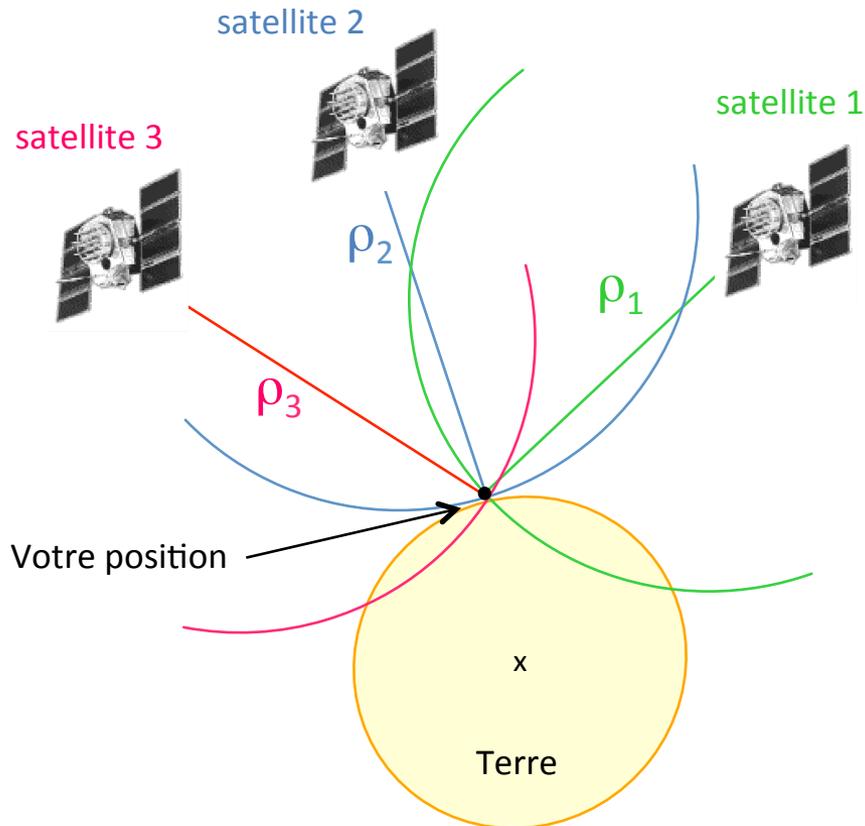
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (N + h) \cos \phi \cos \lambda \\ (N + h) \cos \phi \sin \lambda \\ (N(1 - e^2) + h) \sin \phi \end{bmatrix}$$

Principe général



- Des satellites émettent un signal électromagnétique vers la Terre.
- La mesure de distance ρ_1 au satellite 1 est:
 - $\rho_1 = (t_r - t_{e1}) \times \text{vitesse de la lumière}$
 - Position est donc sur une sphère centrée sur le satellite 1, de rayon ρ_1
- 3 satellites => intersection de 3 sphères => une position
- C'est le principe du Global Positioning System = GPS
- ...et d'autres systèmes similaires: GLONASS (russe), Galileo (européen)
- = GNSS, Global Navigation Satellite System

Principe général



- Le modèle mathématique est donc simple:

$$\rho_r^s = \|\vec{X}^S - \vec{X}_R\| = \sqrt{(X^S - X_R)^2 + (Y^S - Y_R)^2 + (Z^S - Z_R)^2}$$

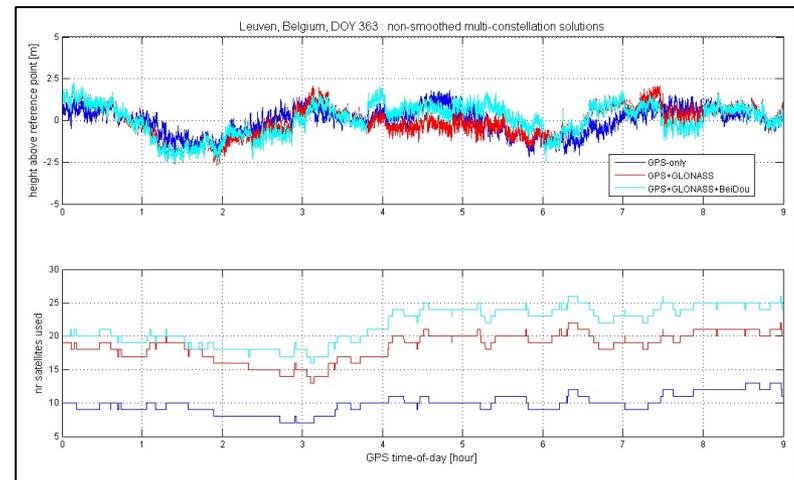
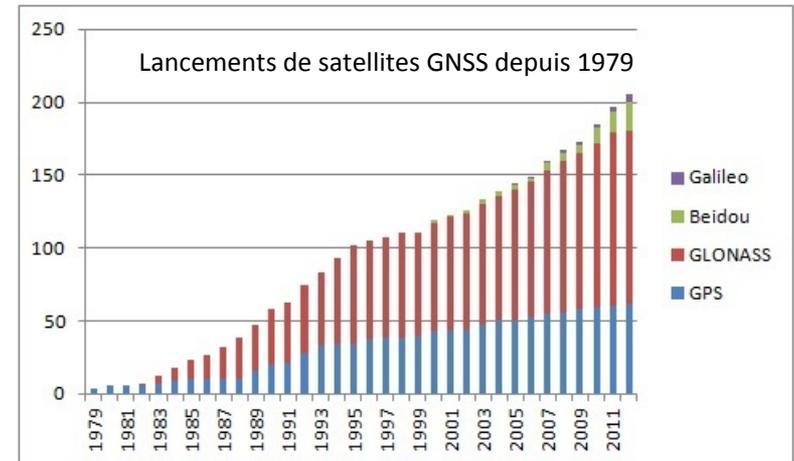
- Etant donné les positions (X^S, Y^S, Z^S) de satellites dans un référentiel lié à la Terre...
- ...on peut calculer la position du récepteur (X_R, Y_R, Z_R) si au moins 3 satellites sont visibles simultanément.
- Problème: les horloges des récepteurs sont:
 - Médiocres...
 - Non synchronisées avec celles des satellites...
- Conséquences:
 - Distance affectée d'une erreur $\delta t = t_r - t_s$
 - On mesure en fait des « pseudo-distances »:

$$R_r^s = \rho_r^s + c\delta t_r$$

- 4 satellites au moins sont nécessaires pour déterminer une position

Global Navigation Satellite System

- GNSS = un système de systèmes
 - Opérationnels: GPS, GLONASS (Russie), BeiDou (Chine)
 - En développement: Galileo (Europe), IRNSS (Inde)
- Points communs:
 - Orbites ~20,000 km quasi-circulaires
 - Constellation ~30 satellites
 - Bande-L, bi-fréquence
 - Récepteurs multi-technique
- Nombre de satellites visibles en augmentation, utile pour les applications de sondage atmosphérique.
- Amélioration des positions précises pour besoins scientifiques: minimal pour le moment.



Haut: comparaison de positions (déduites de pseudo-distances) entre systèmes GNSS. Bas: nombre de satellites visibles.

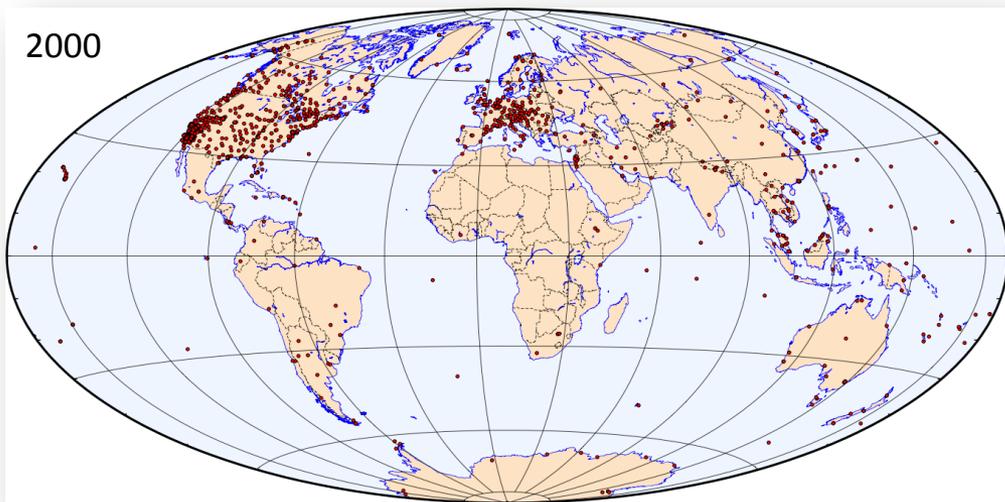
1990



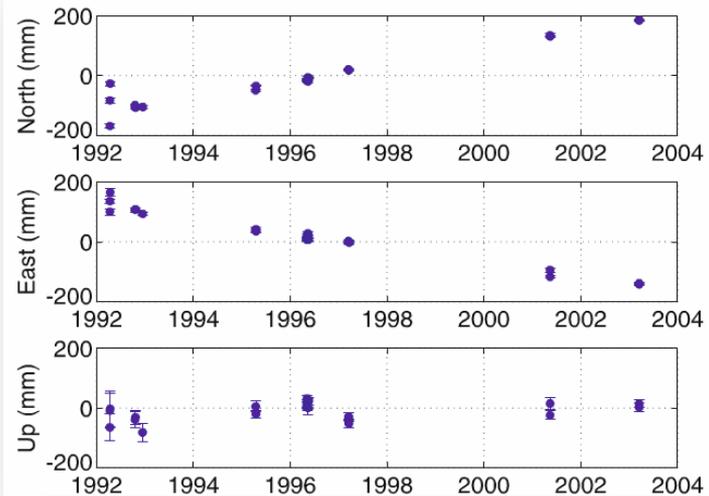
2010



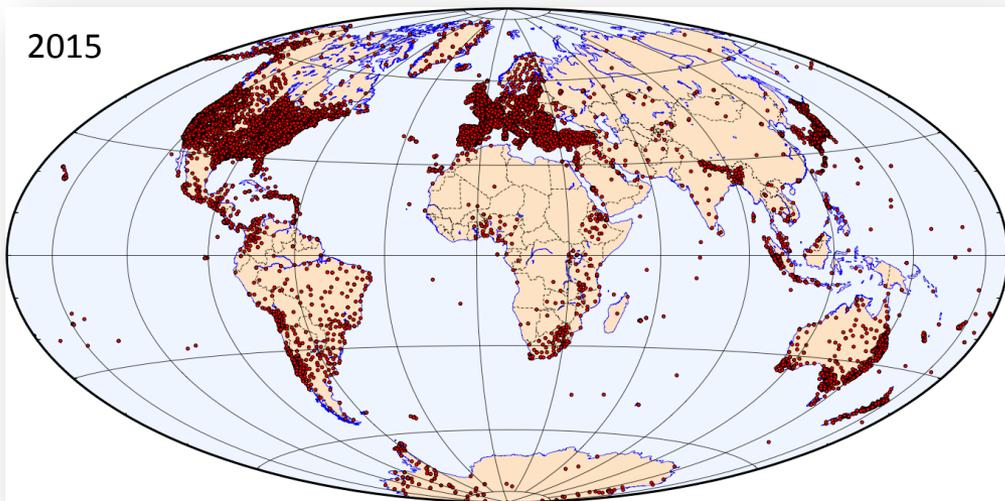
2000



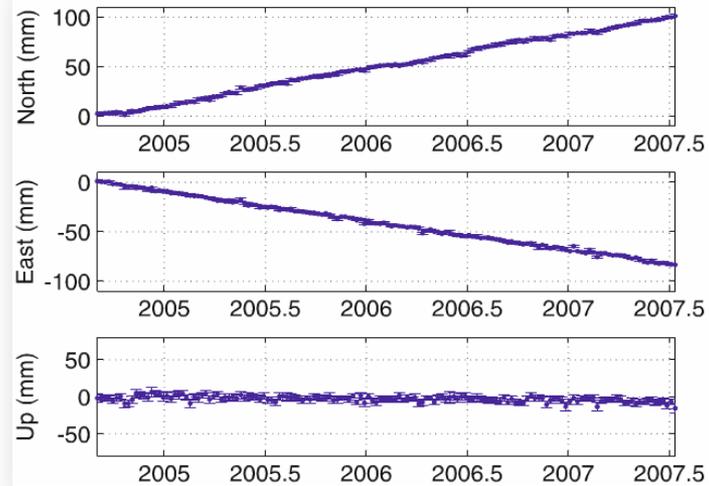
CARX



2015

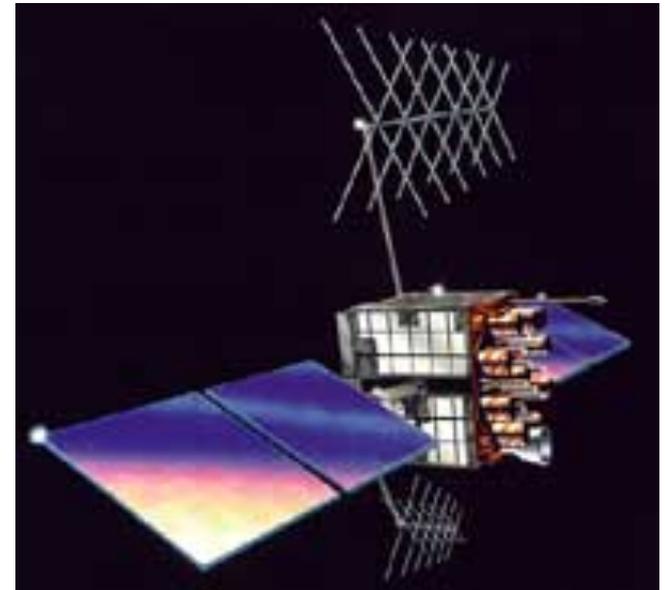


P171



Les satellites GPS

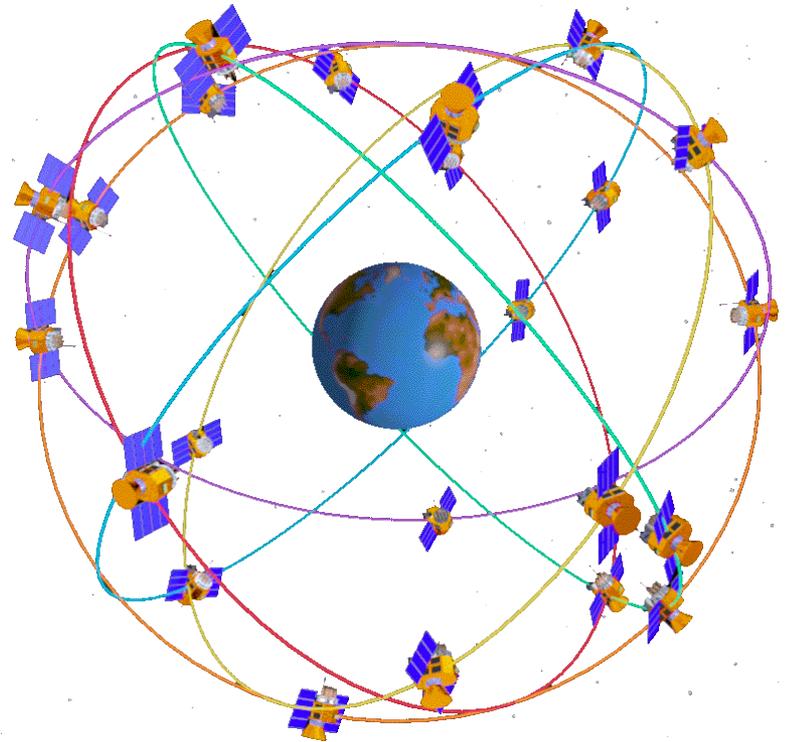
- Alimentation solaire.
- Telecom (contrôle et télémétrie): liaison avec segment sol (bande S) et inter-satellite (UHF).
- 2 ou 4 horloges atomiques (Rb ou Ce)
 - Stabilité = 10^{-13} (Rb) to 10^{-14} (Ce), ~ 1 ns/jour
 - Synchronisées entre satellites
 - Servent à générer les signaux utilisés pour le positionnement .
- Pointent leur antenne vers la terre (angle solide ~ 45 degrés).
- Plusieurs générations :
 - Block I: 1978-1985 (11 satellites)
 - Block II: 1989-2007 (61 satellites)
 - Block III: 2010- (nouvelle génération)



Block IIR satellite

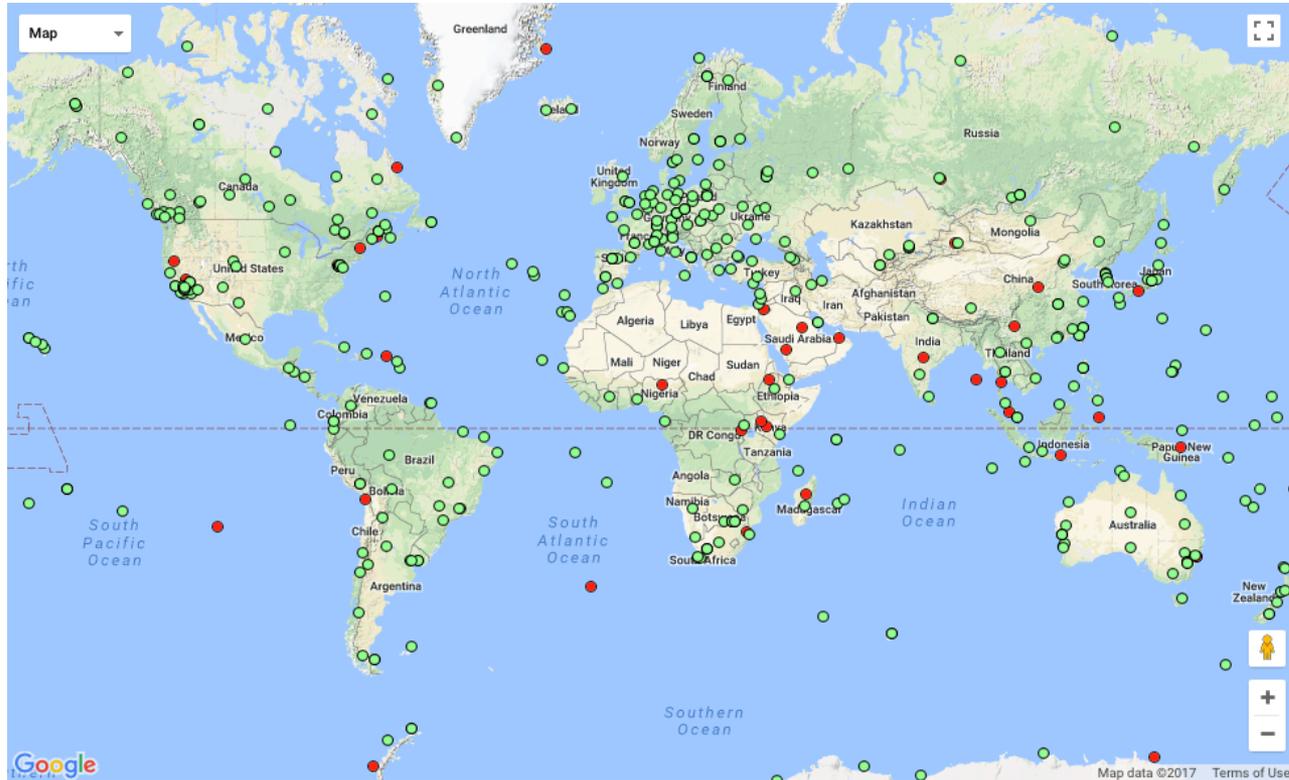
Les orbites GPS

- Semi grand axe = 26 400 km => altitude \sim 20 200 km:
 - Friction atmosphérique quasi nulle
 - Peu sensibles aux courtes longueur d'onde du champ de gravité terrestre
 - Rôle important de la pression de radiation solaire (photons)
- Excentricité = 0.02
 - Orbites quasi-circulaires
- Période = 12 heures sidérales
 - Soit 11h58' solaires
 - Période de revisite 23h56' solaires
- Inclinaison = 55.5°
 - 6 plans orbitaux
 - 4-6 satellites par plan orbital



La constellation GPS
(dans un repère inertiel)

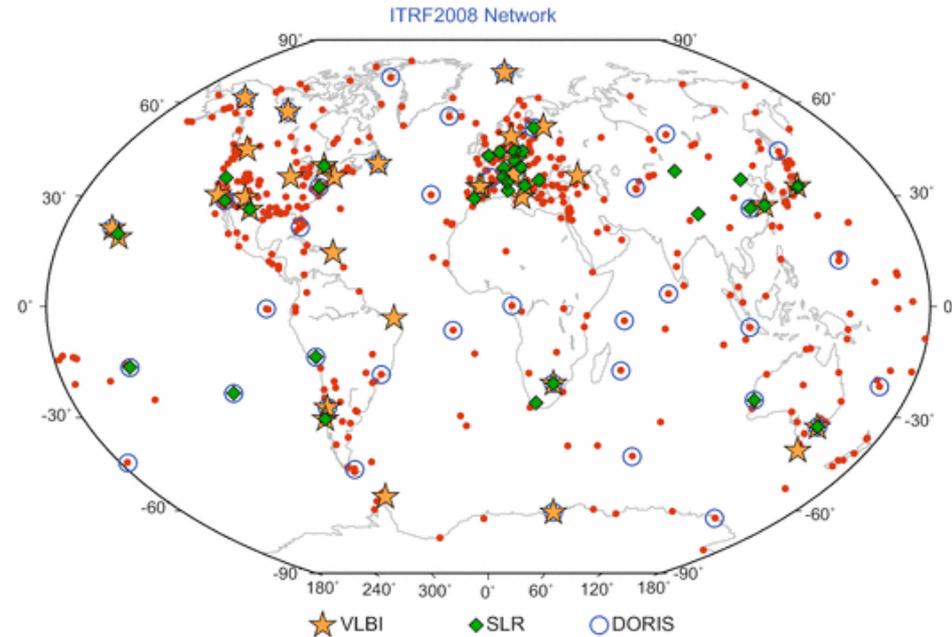
The International GNSS Service



Orbits Type	Accuracy/clock accuracy	Latency	Updates	Sample interval
Broadcast	~100 cm / ~5 ns	Real-time		daily
Final	~2.5 cm / ~75 ps	14 days	Weekly	15 min
Rapid	~2.5 cm / ~150 ps	17 hours	Daily	15 min
Predicted (ultra-rapid)	~5 cm / ~3 ns	Real-time	Every 6 hours	15 min

Le repère de référence terrestre

- La réalisation de l'ITRS à partir de mesures VLBI, SLR, GPS et DORIS constitue l'International Terrestrial Reference Frame (ITRF).
- Il s'agit simplement d'une liste de sites géodésiques avec leurs coordonnées cartésiennes et leurs vitesses.
- Mises à jour périodiques: ITRF89, ITRF90, ..., ITRF2008, ITRF2014.
- C'est le repère utilisé pour les applications scientifiques nécessitant précision et exactitude à l'échelle globale.
- Pas d'ellipsoïde associé, on peut en pratique utiliser GRS80.

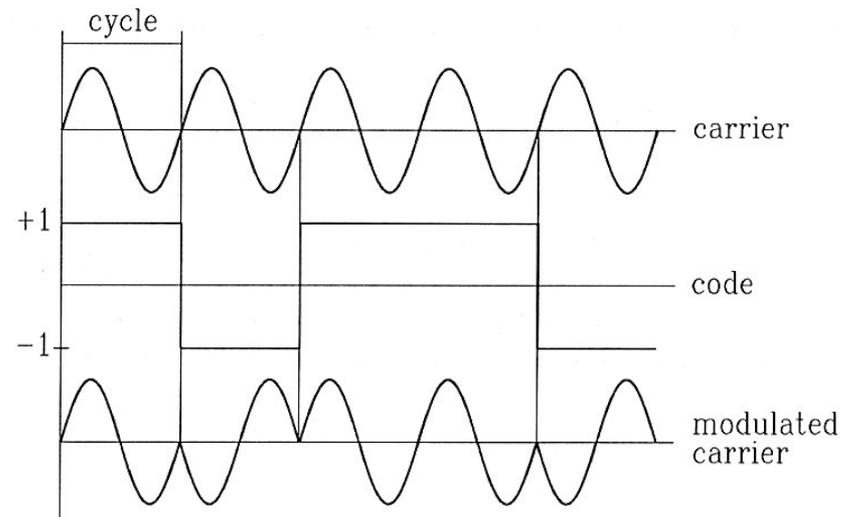
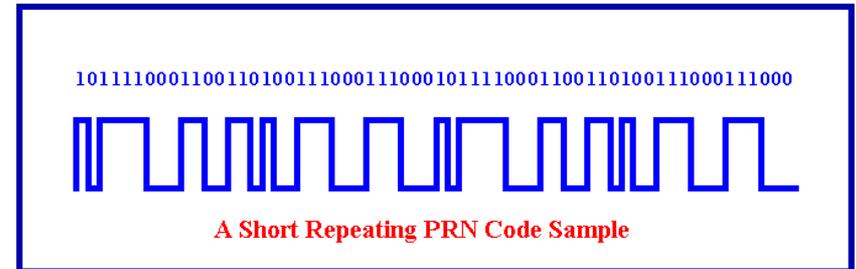


ITRF2008 STATION POSITIONS AT EPOCH 2005.0 AND VELOCITIES
IGS STATIONS

DOMES NB.	SITE NAME	TECH. ID.	X/Vx	Y/Vy	Z/Vz	Sigmat	SOLN	DATA_START	DATA_END
			m/m/y						
10001S006	Paris	CNSS OPMT	4202777.371	171367.999	4778660.203	0.001	0.001	0.001	
10001S006			-.0125	0.0178	0.0107	.0001	.0000	.0001	
10002M006	Grasse (OCA)	CNSS GRAS	4581690.901	556114.831	4389360.793	0.001	0.001	0.001	1 00:000:00000 03:113:00000
10002M006			-.0133	0.0188	0.0120	.0001	.0000	.0001	
10002M006	Grasse (OCA)	CNSS GRAS	4581690.900	556114.837	4389360.793	0.001	0.001	0.001	2 03:113:00000 04:295:43200
10002M006			-.0133	0.0188	0.0120	.0001	.0000	.0001	
10002M006	Grasse (OCA)	CNSS GRAS	4581690.900	556114.836	4389360.797	0.001	0.001	0.001	3 04:295:43200 00:000:00000
10002M006			-.0133	0.0188	0.0120	.0001	.0000	.0001	
10003M004	Toulouse	CNSS TOUL	4627846.029	119629.333	4372999.818	0.001	0.001	0.001	
10003M004			-.0114	0.0193	0.0121	.0001	.0000	.0001	
10003M009	Toulouse	CNSS TLSE	4627851.831	119640.017	4372993.553	0.001	0.001	0.001	1 00:000:00000 03:335:00000
10003M009			-.0114	0.0193	0.0121	.0001	.0000	.0001	
10003M009	Toulouse	CNSS TLSE	4627851.828	119640.020	4372993.552	0.001	0.001	0.001	2 03:335:00000 00:000:00000
10003M009			-.0114	0.0193	0.0121	.0001	.0000	.0001	
10004M004	Brest	CNSS BRST	4231162.578	-332746.680	4745130.926	0.001	0.001	0.001	1 00:000:00000 06:207:00000
10004M004			-.0115	0.0172	0.0115	.0001	.0000	.0001	
10004M004	Brest	CNSS BRST	4231162.578	-332746.675	4745130.916	0.001	0.001	0.001	2 06:207:00000 08:163:36000
10004M004			-.0115	0.0172	0.0115	.0001	.0000	.0001	
10004M004	Brest	CNSS BRST	4231162.576	-332746.678	4745130.921	0.001	0.001	0.001	3 08:163:36000 00:000:00000
10004M004			-.0115	0.0172	0.0115	.0001	.0000	.0001	

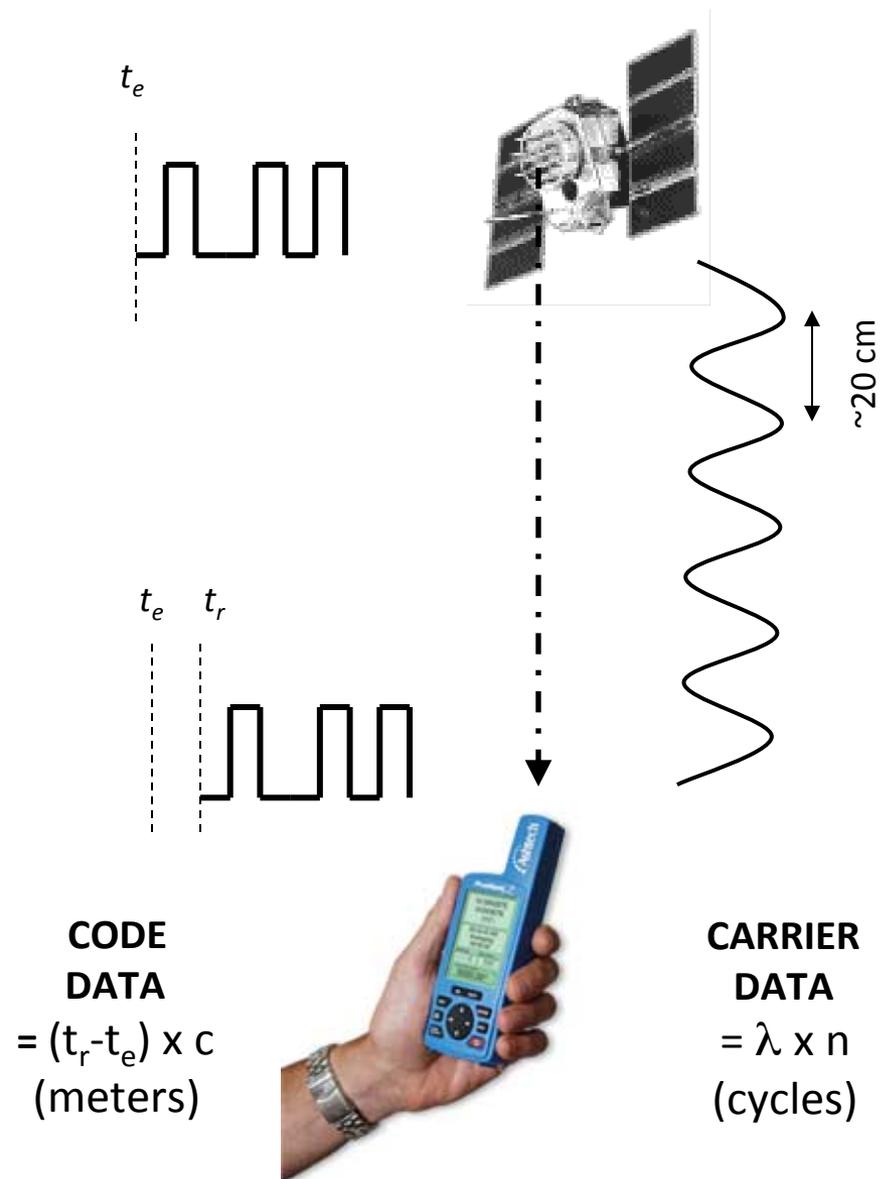
Que font les satellites GPS?

- Maintiennent une fréquence fondamentale $f_0 = 10.23$ Mhz ultra-stable grâce à 2 ou 4 horloges atomiques (Ce/Rb).
- Forment et émettent deux signaux sinusoidaux à partir de cette fréquence:
 - L1 ($f_0 \times 154$) = 1.57542 GHz, longueur d'onde 19.0 cm
 - L2 ($f_0 \times 120$) = 1.22760 GHz, longueur d'onde 24.4 cm
 - = “fréquences GPS porteuses”
- Chaque satellite est associé à un code = série binaire (0 ou 1) = code pseudo aléatoire = PRN
- Ces codes transmis en modulation de phase sur la porteuse.



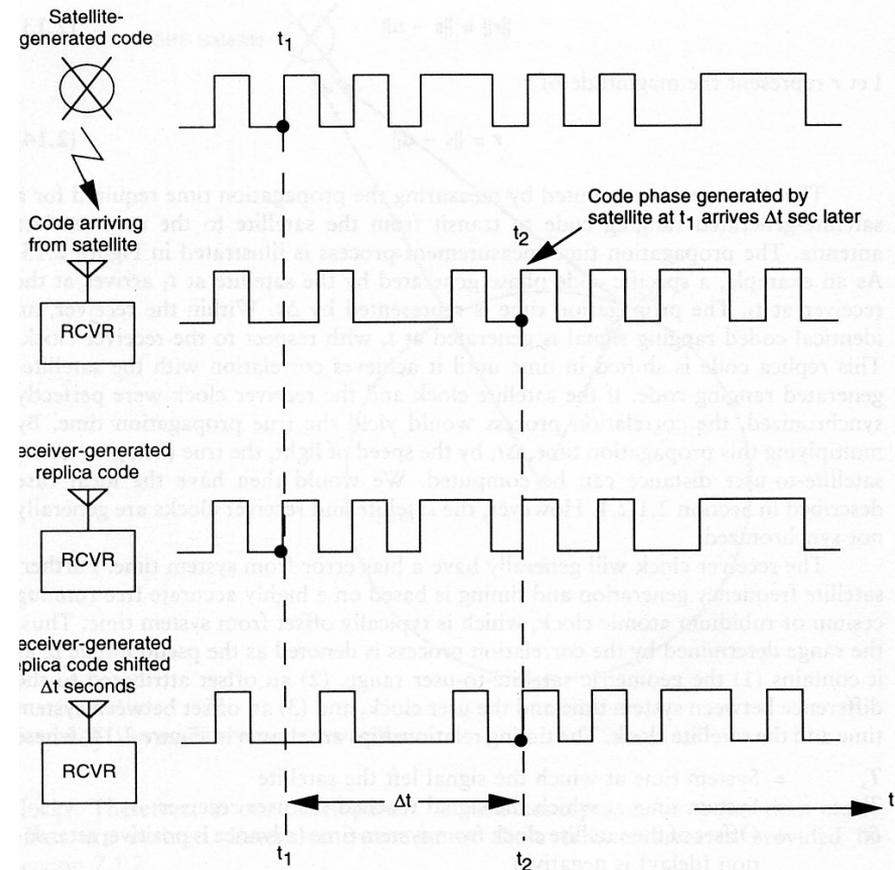
Que font les récepteurs GPS?

- Maintiennent une (mauvaise) horloge.
- Pour chaque satellite, lisent le code PRN reçu:
 - Mesurent le temps de propagation de ce code jusqu'au récepteur
 - Distance = temps de propagation x vitesse de la lumière
 - Facile, peu coûteux, temps réel
 - Aussi précis que la mesure de $t_r - t_e$ soit $\sim 1-10$ m
- Suivent la phase de la porteuse:
 - Si on pouvait compter le nombre total de cycles de porteuse n écoulés du satellite au récepteur...
 - ... alors distance = $n \times$ longueur d'onde de la porteuse
 - Difficile, nécessite un post-traitement des mesures de phase
 - Aussi précis que la mesure de phase, soit ~ 1 mm



Mesures de distance par les codes

- Chaque satellite transmet deux codes binaires:
 - « Coarse Acquisition » = code C/A code (civil)
 - « Precise » = code code (militaire, peut être crypté)
- Les récepteurs produisent une réplique interne de chaque code:
 - Décalent progressivement la réplique interne...
 - ... jusqu'à trouver la corrélation maximale avec le signal reçu
- Précision de la corrélation inversement proportionnel au débit binaire:
 - C/A code = 3 m
 - P code = 0.3 m
- Distance mesurées par corrélation des mesures de code: peu précises (mais absolues)



Principle of code measurement in a GPS receiver

Mesures de distance par la phase

- Le récepteur génère une réplique interne $R(t)$ du signal émis par les satellites $S(t)$, avec un décalage de phase qui dépend du chemin parcouru (et de la synchronisation des horloges):

$$R(t) = R_o \sin(\omega t) = R_o \sin(2\pi f t) = R_o \sin \varphi_R t$$

$$S(t) = S_o \sin(\omega t + \varphi) = S_o \sin(2\pi f t + \varphi) = S_o \sin \varphi_S t$$

R_o, S_o = amplitude des signaux

ω = pulsation en $\text{rad s}^{-1} = 2\pi f$

ωt = phase en rad (exprimée en cycle en GPS)

φ = phase à l'origine en rad

- La phase à l'origine contient le chemin parcouru ρ : $\varphi_S = f \times \left(t - \frac{\rho}{c} \right)$ (en cycles)
- Le récepteur multiplie le signal reçu et sa réplique interne (φ en cycles):

$$S(t) \otimes R(t) = S_o \sin 2\pi \varphi_S(t) \times R_o \sin 2\pi \varphi_R(t)$$

$$= \frac{S_o R_o}{2} \left[\cos 2\pi(\varphi_R - \varphi_S) - \cos 2\pi(\varphi_R + \varphi_S) \right]$$

- Il filtre de le contenu haute fréquence pour obtenir la « mesure » effective, celle du battement de phase:

$$F \{ G \otimes R \} = \frac{S_o R_o}{2} \left[\cos 2\pi(\varphi_R - \varphi_S) \right] = B_o \cos 2\pi \varphi_B$$

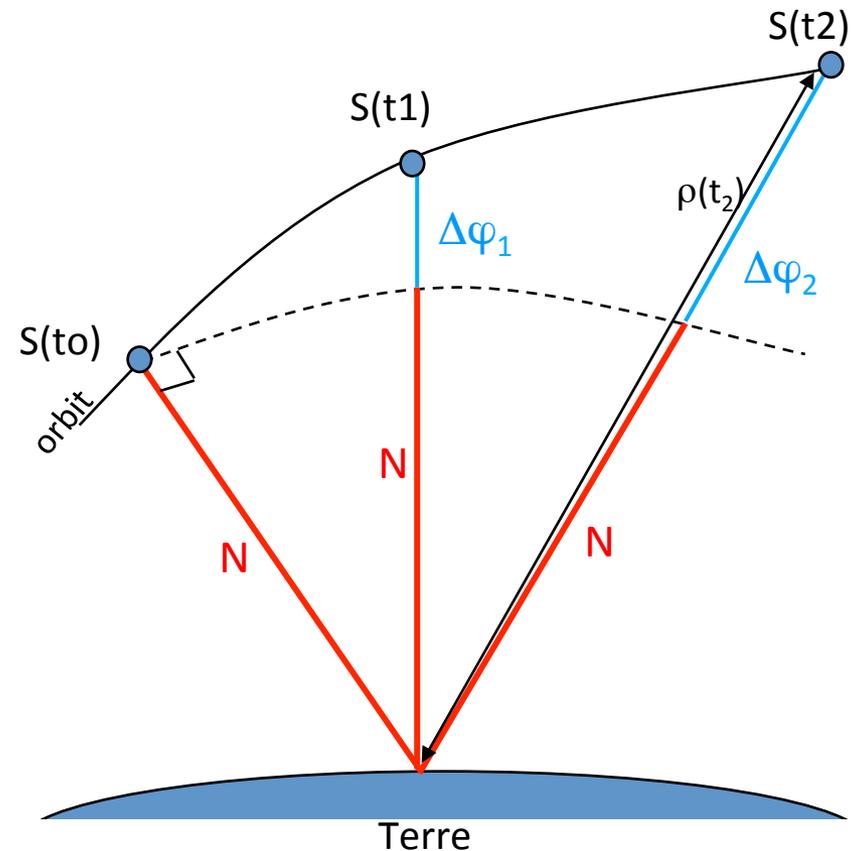
- Les récepteurs modernes sont capables de mesurer la phase avec une précision de 0.005 cycle = $0.005 \times 20 \text{ cm} = 0.2 \text{ mm} \Rightarrow 100$ fois plus précis que le code.
- Mais la mesure est ambiguë: le résultat est identique si l'on ajoute ou soustrait un nombre entier de phases...

Mesures de distance par la phase

- Le récepteur commence à suivre la phase porteuse à t_0
- Il mesure en continu le battement de phase φ_B et produit une mesure de phase $\Delta\varphi_1$ qui augmente ou diminue au cours du temps.
- Au temps t_1 , la mesure de phase est reliée à la distance totale satellite-récepteur :

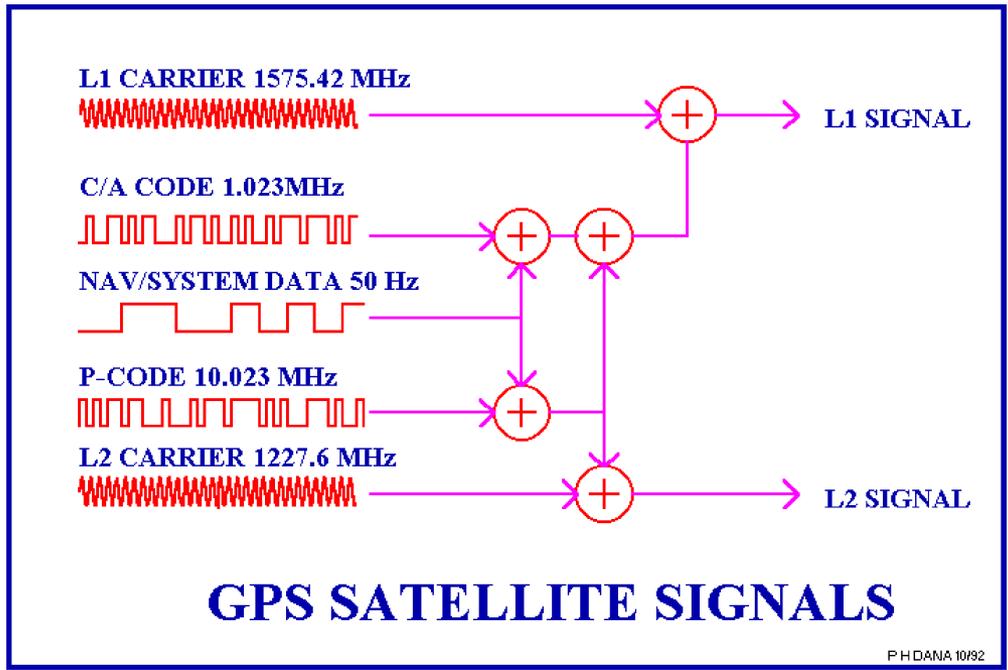
$$\varphi_r^s(t_1) = N + \Delta\varphi_r^s \Big|_{t_0}^{t_1}$$

- L'ambiguïté de phase N est :
 - Constante tant que la réception du satellite n'est pas interrompue.
 - Une inconnue qui est estimée lors du traitement des mesures de phase.
 - Théoriquement un nombre entier, mais il s'y ajoute des délais instrumentaux dus à l'électronique des récepteurs et des satellites => non entier dans la pratique.



Interprétation géométrique de l'ambiguïté de phase.

Les observables GPS



- 5 observables possibles:
 - 2 mesures de phase
 - φ_1 and φ_2 : sur L1 et L2, en cycles
 - Précision < 1 mm
 - 3 mesures de pseudodistances:
 - C/A, P1, P2: mesures de pseudo-distances, en mètres
 - Précision = 3 m with C/A code, 0.3 m with P code

(plus Doppler = $d\varphi/dt$)

- Données stockées en format propriétaire, peuvent être traduites en format binaire d'échange = RINEX

```
02 11 30 0 0 30.000000 0 8G14G 7G31G20G28G 1G25G11
-7096034.24049 -5509904.97345 23971309.103 23971309.038 23971310.842
-12570276.74149 -9768618.40046 23379169.469 23379168.448 23379172.496
-4157689.84249 -3201324.38045 24195891.298 24195890.733 24195894.168
-25480193.34249 -19826614.77248 20670858.774 20670857.983 20670861.191
-5589280.20049 -4319738.39345 24553697.713 24553697.259 24553700.349
-10252537.24449 -7918950.15946 23060092.127 23060091.841 23060095.687
-4143445.15949 -2509987.53445 24581180.488 24581179.713 24581183.992
-29659606.34049 -23089397.33548 20312382.965 20312382.530 20312384.719
```

Block de données RINEX

Les observables GPS

- L'émetteur (satellite) et le récepteur ne sont pas synchronisés de manière précise. L'observable GPS n'est donc pas une distance mais une pseudo-distance (distance + décalage des horloges).
- En notant h^k l'erreur de l'horloge satellite et h_i le décalage de l'horloge récepteur par rapport au temps GPS, les mesures réalisées dans le récepteur s'écrivent (en m):

$$R_i^k = \rho_i^k + c \cdot (h^k - h_i) \quad \text{pour les mesures de code}$$

$$\Phi_i^k = \rho_i^k \times \frac{f}{c} + (h_i - h^k) \times f + N_i^k \quad \text{pour les mesures de phase}$$

$$\text{Avec } \rho_i^k = \sqrt{(X^k - X_i)^2 + (Y^k - Y_i)^2 + (Z^k - Z_i)^2}$$

X^k, Y^k, Z^k = coordonnées du satellite

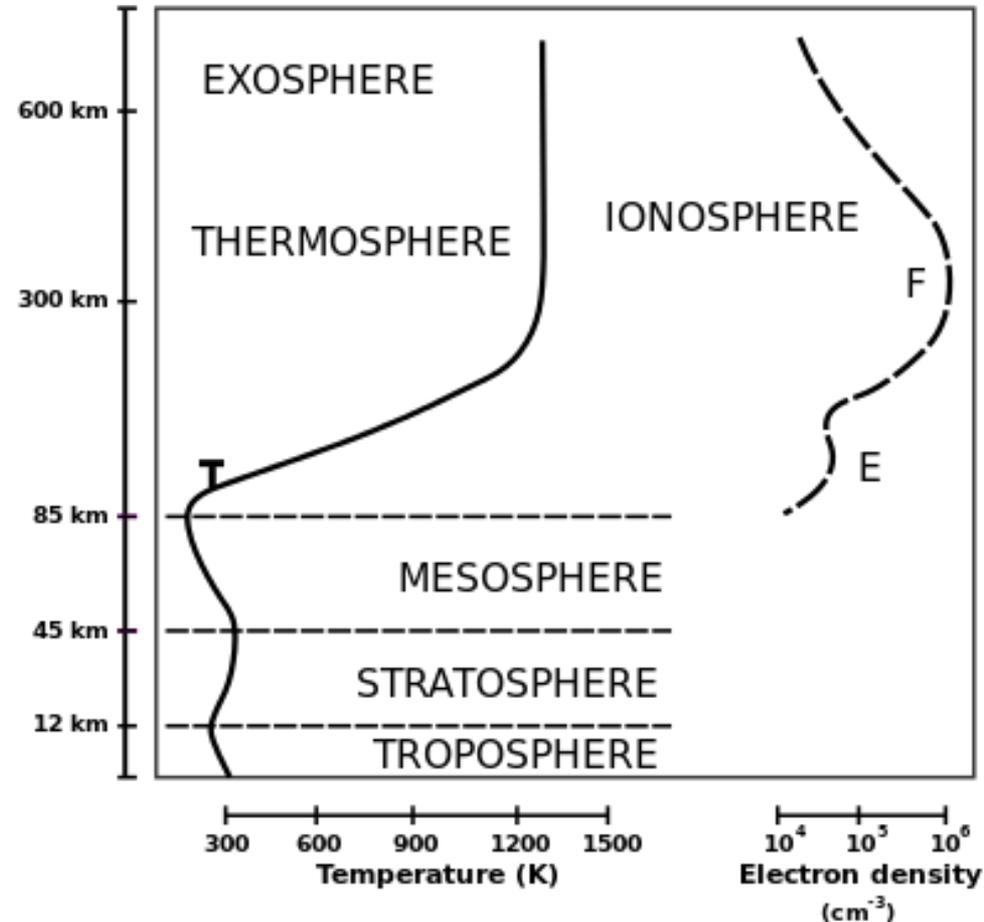
X_i, Y_i, Z_i = coordonnées du récepteur

Réfraction dans l'atmosphère

- Le signal électromagnétique GPS est réfracté lors de sa propagation dans l'atmosphère
 - Courbure: négligeable
 - Ralentissement
- Retard troposphérique:
 - Fonction de P, T, H – quelques mètres
 - Difficilement mesurable ou modélisable, surtout partie humide
 - Traité comme une inconnue dans le traitement des données
- Retard ionosphérique:
 - Fonction de la densité électronique – jusqu'à plusieurs dizaines de mètres
 - Proportionnel à la fréquence => on peut montrer que la combinaison suivante des observables sur L1 et L2 l'élimine au 1^{er} ordre:

$$\varphi_{LC} = \frac{f_1^2}{f_1^2 - f_2^2} \varphi_1 - \frac{f_1 f_2}{f_1^2 - f_2^2} \varphi_2$$

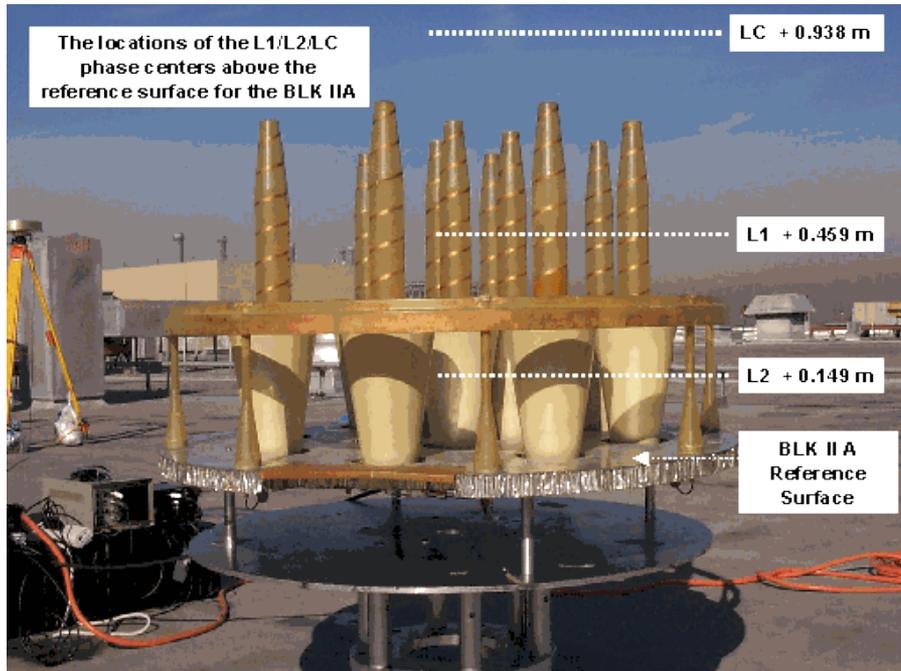
$$\varphi_{LC} = 2.546 \times \varphi_1 - 1.984 \times \varphi_2$$



Effets relativistes

- Relativité restreinte => fréquence d'horloge en mouvement plus lente que la même horloge fixe sur terre (dilatation temporelle) = -7 microsec/jour
- Relativité générale => fréquence d'horloge dépend de la position dans le champ de gravité terrestre (augmente en s'éloignant de la Terre) = +45.9 microsec/jour
- La somme des deux effets => horloges atomiques des GPS sont plus rapides que sur Terre de ~ 38 msec/jour (= 11.5 km/jour)
- Solution: la fréquence d'horloge satellite est ralentie avant lancement de 4.57×10^{-3} Hz (10.22999999543 MHz) de façon à être à sa fréquence nominale une fois en orbite
- En plus de cette correction forfaitaire:
 - Non circularité de l'orbite GPS (faible excentricité) => variations de vitesse du satellite sur son orbite => variations de vitesse des horloges => $\delta\rho_{rel,1} \sim 10$ m
 - Courbure espace-temps par champ de gravité de la Terre => ralentissement du signal lors de sa traversée du champ de pesanteur terrestre => $\delta\rho_{rel,2} \sim 2$ cm

Centres de phase des antennes



Satellite

Référence = centre de gravité du satellite

Lieu d'émission = centre de phase (L1,L2)



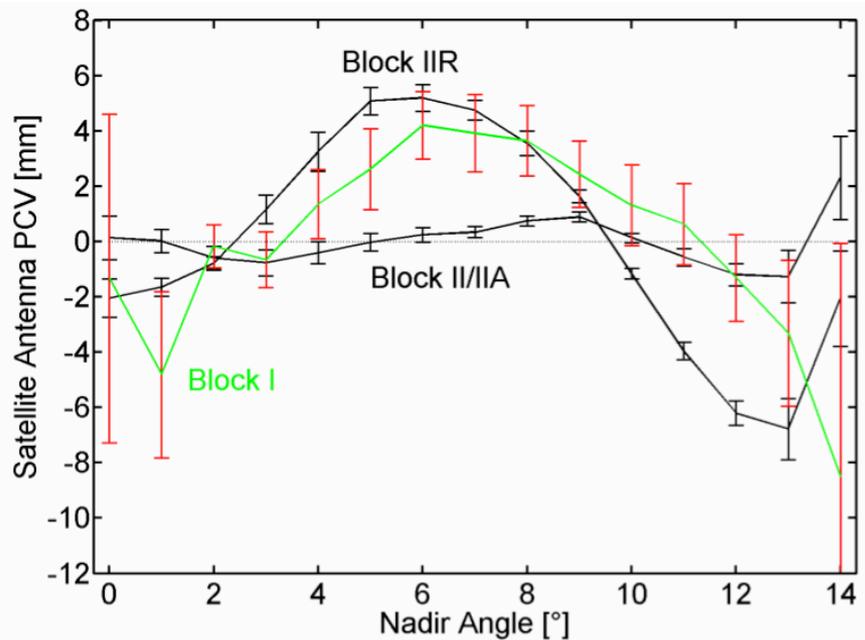
Récepteur

Référence = antenna reference point

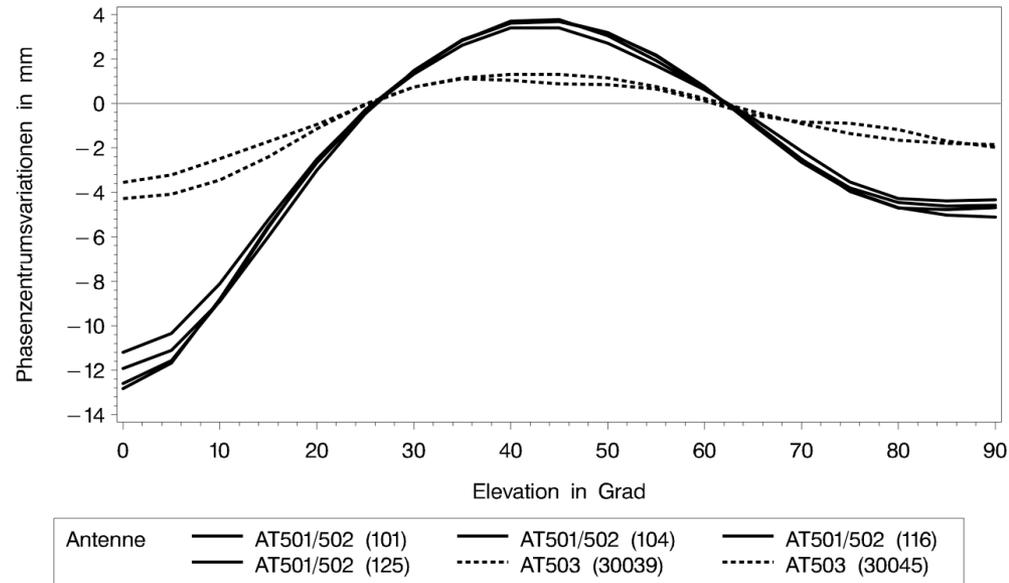
Lieu de réception = centre de phase (L1,L2)

Phase Center Offset = vecteur constant pour chaque type d'antenne

Centres de phase des antennes



Satellite



Récepteur

Phase Center Variation = variation du centre de phase en fonction de l'élévation du signal incident/émis

Corrections géophysiques

- Déformations de la Terre dues aux marées:
 - Terrestre, ~ 20 cm, effet max. diurne, modélisé
 - Polaire, ~ 2 mm, effet max. annuel, modélisé
- Déformation de la Terre par l'effet de charges:
 - Océanique tidale, jusqu'à qq cm proche des côtes, modélisé
 - Océanique non tidale, qq mm, non corrigé
 - Hydrologie continentale (eau liquide + solide), qq mm à cm, non corrigée
 - Atmosphérique, qq mm, non corrigé
- Les effets non corrigés apparaissent comme des résidus dans les séries temporelles de position.

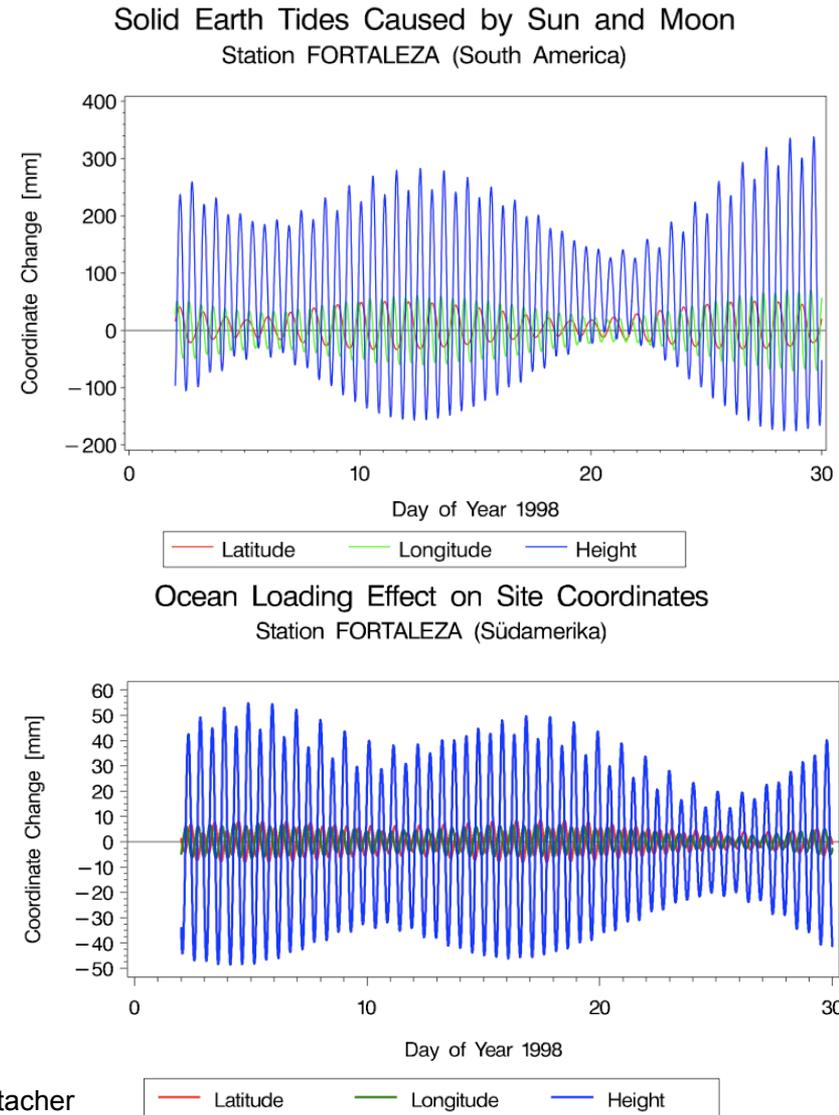
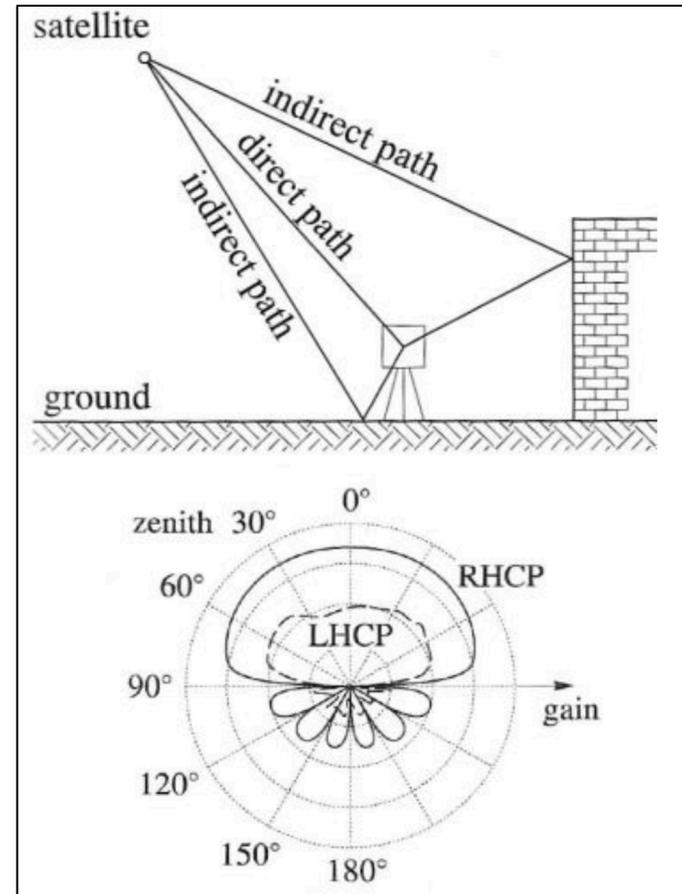


Fig. M. Rotacher

Multitrajets

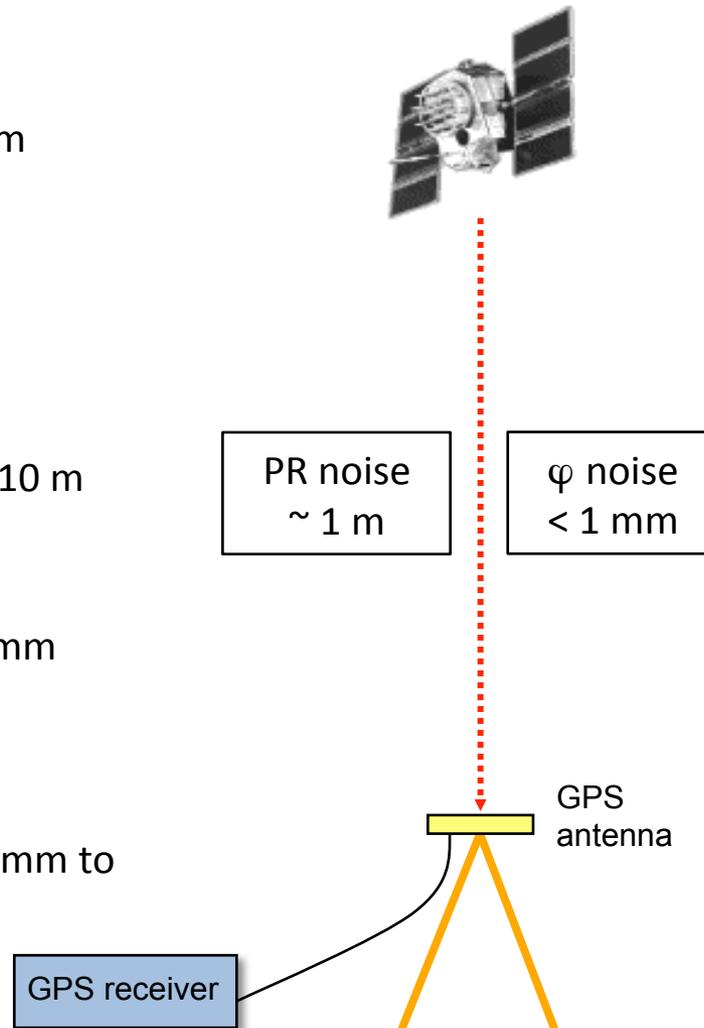
- Le mélange du signal direct avec les signaux réfléchis produit des fluctuations (interférences) de l'amplitude et de la phase de l'ordre de $\sim 1\text{m}$ pour le code et qq cm pour la phase.
- Les réflexions diffuses sont faibles, seules les réflexions spéculaires sont gênantes. Elles se répètent avec une période de 23h56'.
- L'ajustement du gain des antennes permet de réduire l'effet des réflexions par le sol.
- Il faut choisir les sites de manière à éviter les réflexions par le haut.



Budget d'erreur

- Sat clock ~ 1 m
- Sat orbit ~ 1 m
- Sat PCO/PCV = m/mm
- Troposphere ~ 1 m
- Ionosphere ~ 5 m

- Relativistic effects ~ 10 m
- Rec PCO/PCV = dm/mm
- Multipath ~ 0.5 m
- Geophysical effects, mm to 10s m



- Use IGS clocks and orbits
- Correct using IGS tables
- Estimate
- LC combination or estimate
- Compute and correct
- Correct using IGS tables
- Choose site, long sessions
- Model and correct

Les observables GPS - codes

- La précision des mesures de code (~mètre) ne nécessite que de prendre en compte les corrections ~métriques :

$$R_i^k = \rho_i^k + c \cdot (h^k - h_i) + \underbrace{\delta\rho_{iono} + \delta\rho_{tropo} + \delta\rho_{rel,1}}_{\text{modèles de correction standards}} + \underbrace{MP_R + \varepsilon_R}_{\text{résidus}}$$

horloge satellite radiodiffusée
horloge récepteur

position cherchée
éphémérides radiodiffusées

- Estimation de 4 inconnues: X_i, Y_i, Z_i, h_i
- Temps réel aisé
- Précision limitée par la mesure de code (~m)

Les observables GPS - phase

- La précision des mesures de phase impose de prendre en compte toutes les corrections, même millimétriques:

$$\Phi_i^k = \rho_i^k \times \frac{f}{c} + (h_i - h^k) \times f + N_i^k - \delta\rho_{iono} + \delta\rho_{tropo} + \delta\rho_{rel,1,2} + \delta\rho_{ant} + \delta\rho_{geo} + \frac{MP_\Phi + \varepsilon_\Phi}{\text{résidus}}$$

Diagram illustrating the components of the GPS phase observable equation:

- ρ_i^k is derived from the distance between the receiver and the satellite: $\rho_i^k = \|\vec{X}_i - \vec{X}^k\|$.
 - \vec{X}_i is the receiver position, labeled "position cherchée" (position sought).
 - \vec{X}^k is the satellite position, labeled "orbite IGS" (IGS orbit).
- N_i^k is the integer ambiguity, labeled "estimé" (estimated).
- $\delta\rho_{iono}$ is the ionospheric delay, labeled "estimé" (estimated).
- $\delta\rho_{tropo}$ is the tropospheric delay, labeled "estimé" (estimated).
- $\delta\rho_{rel,1,2}$ is the relative delay, labeled "modèles de correction" (correction models).
- $\delta\rho_{ant}$ is the antenna delay, labeled "modèles de correction" (correction models).
- $\delta\rho_{geo}$ is the geocentric delay, labeled "modèles de correction" (correction models).
- $MP_\Phi + \varepsilon_\Phi$ represents the multipath and noise, labeled "résidus" (residuals).

Additional labels in the diagram:

- "horloge satellite IGS" (IGS satellite clock) points to the $(h_i - h^k) \times f$ term.
- "horloge récepteur" (receiver clock) points to the $(h_i - h^k) \times f$ term.
- "combinaison LC" (LC combination) points to the N_i^k term.
- "tables de corrections IGS" (IGS correction tables) points to the $\delta\rho_{rel,1,2}$ and $\delta\rho_{ant}$ terms.

- Estimation de nombreux paramètres en plus de X_i, Y_i, Z_i, h_i
- Temps réel complexe
- Précision millimétrique possible

Estimation d'une position absolue

- Soit l'équation d'observation exprimée en mètres:

$${}^k R_i = \rho_i^k + (h_i - {}^k h) \times c + \delta\rho_{iono} + \delta\rho_{tropo} + \delta\rho_{rel} + \delta\rho_{ant} + \delta\rho_{geo} + \varepsilon_\Phi$$

- Obtenir les orbites précises, horloges précises, modèles d'antenne de l'IGS et les EOP de l'IERS.
- Calculer les termes qui seront modélisés: $\delta\rho_{rel}$, $\delta\rho_{ant}$, $\delta\rho_{geo}$.
- Linéariser le terme ρ_i^k avec un développement de Taylor:

$$f(X_i, Y_i, Z_i) = f(X_o, Y_o, Z_o) + \frac{\partial f(X_o, Y_o, Z_o)}{\partial X_o} \Delta X_i + \frac{\partial f(X_o, Y_o, Z_o)}{\partial Y_o} \Delta Y_i + \frac{\partial f(X_o, Y_o, Z_o)}{\partial Z_o} \Delta Z_i + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dots$$

$$\Rightarrow {}^k \rho_i = {}^k \rho_o - \frac{{}^k X - X_o}{{}^k \rho_o} \Delta X_i - \frac{{}^k Y - Y_o}{{}^k \rho_o} \Delta Y_i - \frac{{}^k Z - Z_o}{{}^k \rho_o} \Delta Z_i$$

- On réarrange l'équation d'observation avec les paramètres connus à gauche et les 4 inconnues à droite:

$${}^k R_i - {}^k \rho_o - {}^k h c - (\delta\rho_{iono} + \delta\rho_{tropo} + \delta\rho_{rel} + \delta\rho_{ant} + \delta\rho_{geo}) = -\frac{{}^k X - X_o}{{}^k \rho_o} \Delta X_i - \frac{{}^k Y - Y_o}{{}^k \rho_o} \Delta Y_i - \frac{{}^k Z - Z_o}{{}^k \rho_o} \Delta Z_i + h_i c + \varepsilon_\Phi$$

- Dont un simplifie la notation (l^k , $a_{X_i}^k$, $a_{Y_i}^k$, $a_{Z_i}^k$ sont connus): $l^k = -a_{X_i}^k \Delta X_i - a_{Y_i}^k \Delta Y_i - a_{Z_i}^k \Delta Z_i + h_i c + \varepsilon_\Phi$

Estimation d'une position absolue

- Pour 4 satellites observés au même moment on peut écrire:

$${}^1l = {}^1a_{X_i}\Delta X_i + {}^1a_{Y_i}\Delta Y_i + {}^1a_{Z_i}\Delta Z_i - c\delta_i$$

$${}^2l = {}^2a_{X_i}\Delta X_i + {}^2a_{Y_i}\Delta Y_i + {}^2a_{Z_i}\Delta Z_i - c\delta_i$$

$${}^3l = {}^3a_{X_i}\Delta X_i + {}^3a_{Y_i}\Delta Y_i + {}^3a_{Z_i}\Delta Z_i - c\delta_i$$

$${}^4l = {}^4a_{X_i}\Delta X_i + {}^4a_{Y_i}\Delta Y_i + {}^4a_{Z_i}\Delta Z_i - c\delta_i$$

- Soit, sous forme matricielle (v =vecteur des résidus):

$$\vec{L} = A\vec{X} + v$$

vecteur des observations corrigées matrice des dérivées partielles vecteur des inconnues vecteur des résidus

avec

$$P_L = \Sigma_L^{-1}$$

matrice poids = inverse de la matrice de covariance des données

- Le problème se résout par exemple en cherchant le minimum de la somme du carré des résidus (= méthode des moindres carrés), qui amène à la solution:

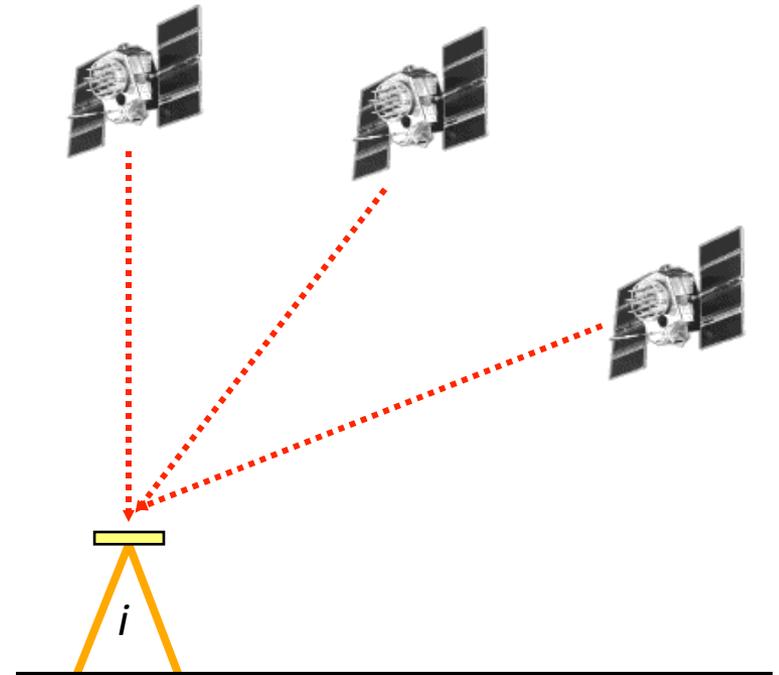
$$\hat{x} = (A^T P_L A)^{-1} A^T P_L L \quad \text{avec la matrice de covariance des inconnues} \quad \Sigma_X = (A^T \Sigma_L^{-1} A)^{-1}$$

Stratégie de calcul par positionnement ponctuel précis

Observable traitée = simple trajets satellites-récepteur

Méthode dite « PPP »

- ⇒ Apparemment plus simple, mais estimation de $h^s(t)$ pas toujours aisée.
- ⇒ Ne tire pas avantage du fait que certaines erreurs sont très corrélées entre sites proches.
- ⇒ Calcul très rapide.

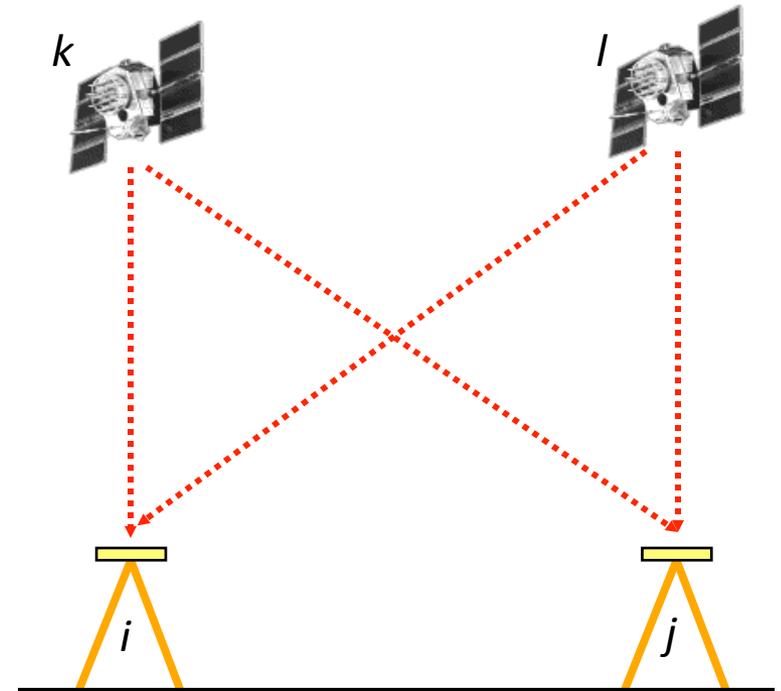


Stratégie par doubles différences

Différence des observables de phase entre 2 sat. (k,l) et 2 réc. (i,j) en mètres:

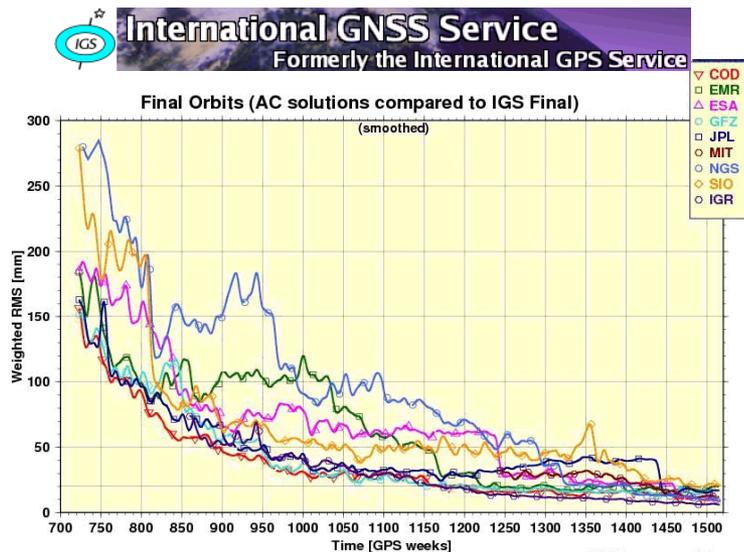
$$\begin{aligned} L_{ij}^{kl} &= (L_i^k - L_i^l) - (L_j^k - L_j^l) \\ &= (\rho_i^k - \rho_i^l - \rho_j^k + \rho_j^l) - c(h^k - h_i - h^l + h_j - h^k + h_i + h^l - h_j) - \lambda(N_i^k - N_i^l - N_j^k + N_j^l) \\ &= \rho_{ij}^{kl} - \lambda N_{ij}^{kl} \end{aligned}$$

- ⇒ Les biais d'horloge $h^s(t)$ et $h_r(t)$ sont éliminés (mais le nombre d'observations a diminué)
- ⇒ Les erreurs communes aux récepteurs i et j s'annulent aussi (en partie):
 - Les erreurs dues à la réfraction atmosphérique (tropo+iono) sont minimisées si les récepteurs sont suffisamment proches.
 - Les lignes de base courtes sont donc plus précises que les longues.
- ⇒ Temps de calcul très supérieur au PPP

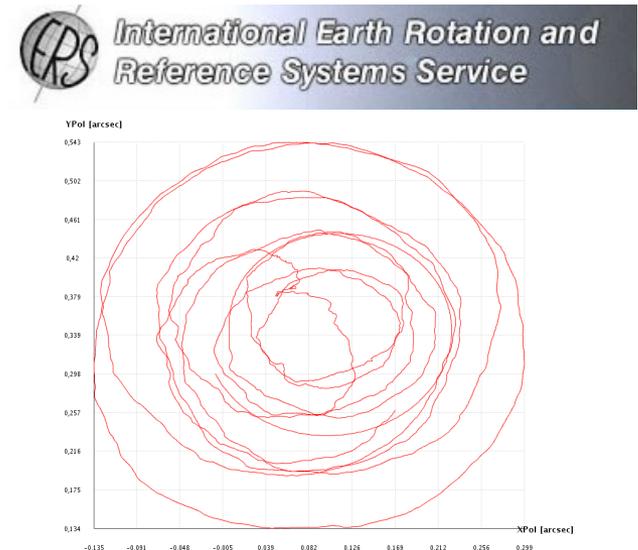


Dans la pratique

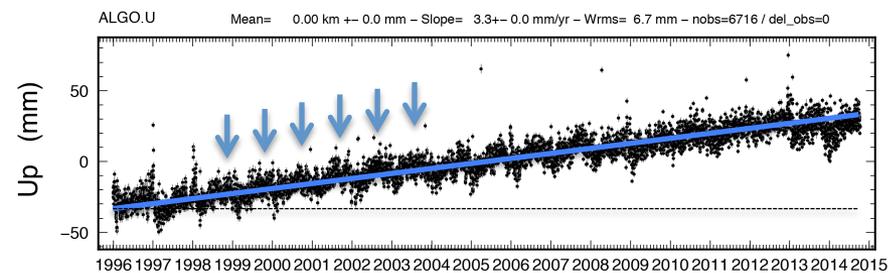
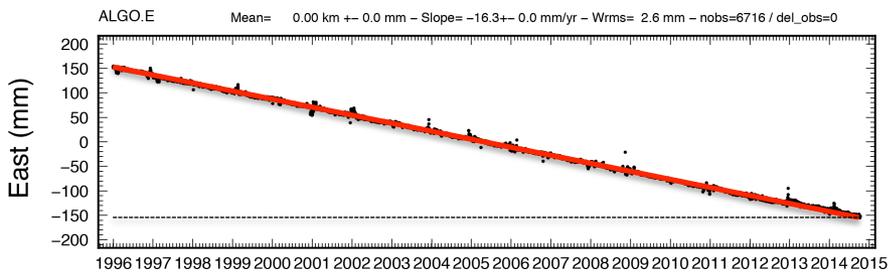
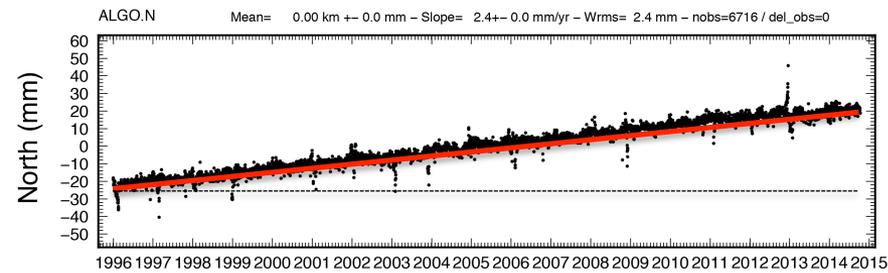
- Des données : votre responsabilité
- Des logiciels de traitement des données :
 - Constructeurs: Ashtech Solution, Trimble Business, Leica Office, etc.
 - Scientifiques: Gamit, Gipsy, Bernese, etc.
- Des « produits »:
 - IGS (International GNSS Service): Orbites, corrections horloge sat., tables APC
 - IERS (International Earth Rotation Service): éphémérides lune et soleil, paramètres de rotation et d'orientation de la Terre, mouvement du pole, conventions



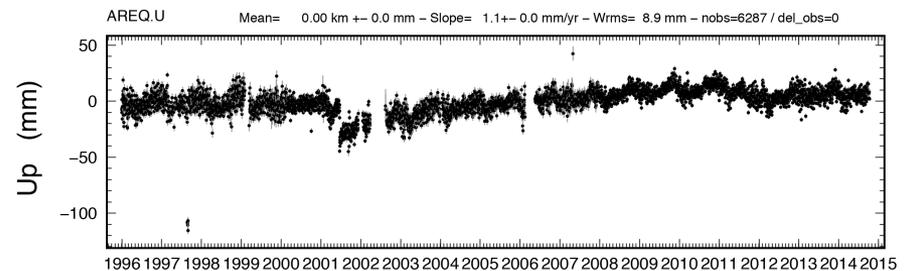
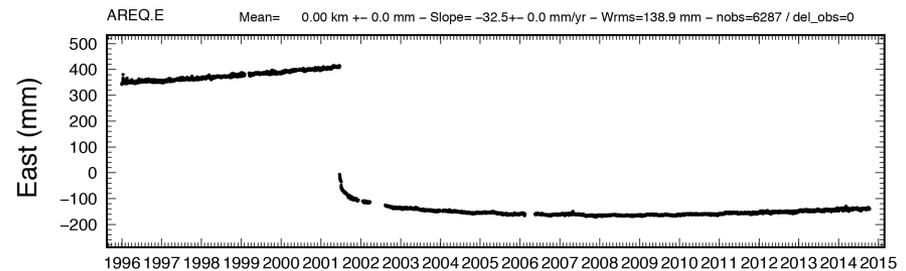
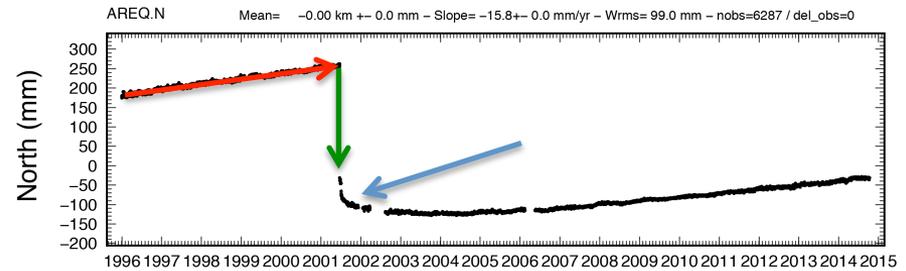
Comparaison des orbites IGS



Mouvement du pole fourni par l'IERS



Algonquin, centre Canada



Arequipa, Pérou

- (1) Mouvement plaque nord américaine
- (2) Rebond post-glaciaire
- (3) Charge hydrologique saisonnière

- (4) Mouvement inter-sismique
- (5) Mouvement co-sismique
- (6) Réajustement post-sismique

