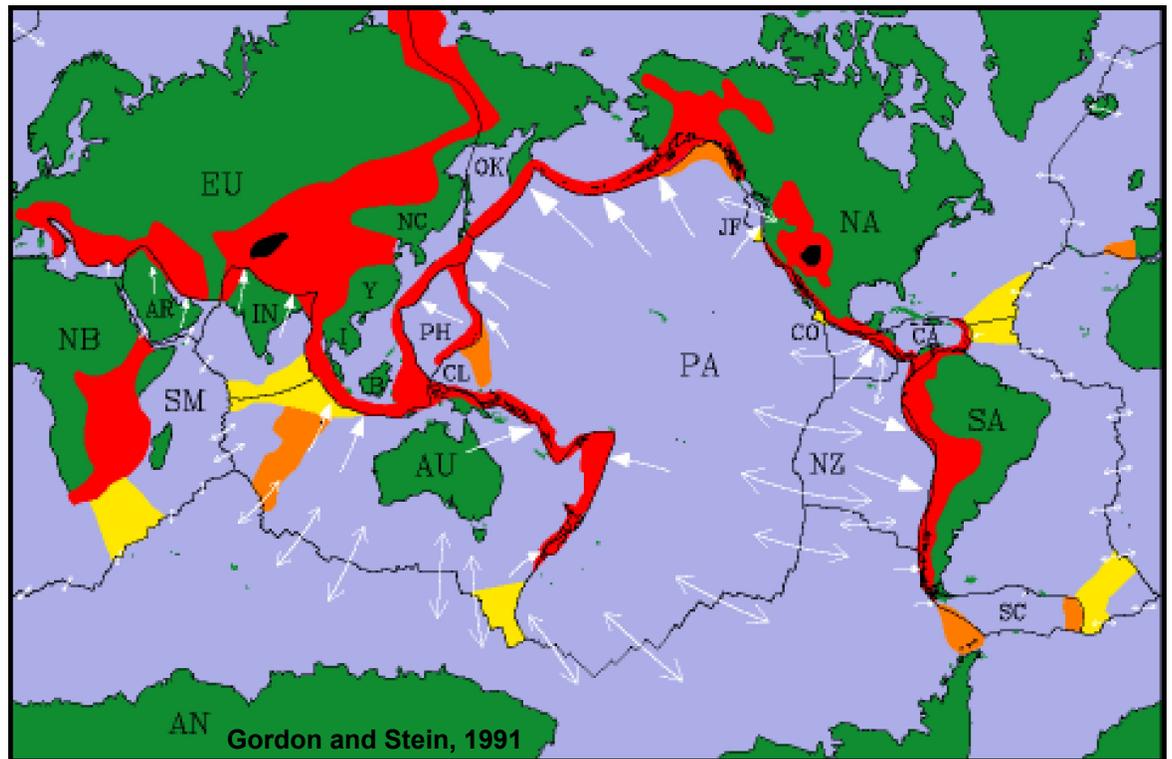


Déformations diffuses

- Les plaques sont rigides à < 0.5 mm/an (sauf dans les régions affectées par le rebond post-glaciaire).
- Certains processus géophysiques induisent cependant une déformation diffuse, en particulier dans les continents.
- Cette déformation diffuse n'est pas nécessairement bien décrite par des rotations de blocs rigides => elle nécessite une approche continue.
- On va donc chercher à caractériser ces déformations continues localement et par un petit nombre de paramètres.
- Cette approche fournira des résultats indépendants du repère dans lequel sont exprimées les vitesses .



Le tenseur gradient de vitesses

- On s'intéresse à la variation locale du champ de vitesse autour d'un point $M_o(x_o, y_o)$ en coordonnées planes. AU point M situé à une distance infinitésimale $(\delta x, \delta y)$ a:

$$\begin{aligned} x &= x_o + \delta x \\ y &= y_o + \delta y \end{aligned} \quad \delta X = \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix}$$

- On fait l'hypothèse que le champ de vitesse varie spatialement de manière continue. On peut alors écrire le développement limité:

$$v(x, y) = v(x_o, y_o) + \nabla V(x_o, y_o) \delta X$$

- Où ∇V est le tenseur (d'ordre 2) du gradient des vitesses:

$$\nabla V(x_o, y_o) = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Tenseur de déformation et rotation

- L'analyse tensorielle nous dit qu'un tenseur d'ordre deux peut être décomposé en une partie symétrique et une partie asymétrique:

$$\nabla V = \frac{1}{2}[\nabla V + \nabla V^T] + \frac{1}{2}[\nabla V - \nabla V^T]$$

$$\Leftrightarrow \nabla V = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) & \frac{\partial v_y}{\partial y} \end{bmatrix}}_{\text{Tenseur symétrique}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) & 0 \end{bmatrix}}_{\text{Tenseur asymétrique}}$$

- Que l'on va écrire sous la forme:

$$\nabla V = \begin{bmatrix} e_{xx} & e_{xy} \\ e_{xy} & e_{yy} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix} = \dot{E} + \dot{\Omega}$$

- Interprétation physique: un champ de vitesse peut se décomposer localement en une rotation rigide et une déformation s.s. = un changement de forme.
- La quantité d'intérêt principal en géophysique va être le tenseur des taux de déformation.

Tenseur de déformation et rotation

- On a donc un tenseur des taux de rotation $\dot{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix}$
- Avec: $\omega = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)$
- Et un tenseur des taux de déformation $\dot{E} = \begin{bmatrix} e_{xx} & e_{xy} \\ e_{xy} & e_{yy} \end{bmatrix}$
- Avec:
$$e_{xx} = \frac{\partial v_x}{\partial x}$$
$$e_{yy} = \frac{\partial v_y}{\partial y}$$
$$e_{xy} = e_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)$$
- Le « but du jeu » est maintenant de calculer ces quantités à partir de mesures géodésiques

Estimation du tenseur gradient de vitesses

- A partir des équations précédentes on forme le système linéaire suivant:

$$v(x, y) = v(x_o, y_o) + \nabla V(x_o, y_o) \delta X$$

$$\begin{bmatrix} x_i - x_o & y_i - y_o & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x_i - x_o & y_i - y_o & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial v_x / \partial x \\ \partial v_x / \partial y \\ \partial v_y / \partial x \\ \partial v_y / \partial y \\ v_{o,x} \\ v_{o,y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{i,x} \\ v_{i,y} \end{bmatrix} \quad \text{soit } A_i V = v_i \quad , \quad C_v$$

- C_v est la matrice de covariance des vitesses mesurées.
- Avec un minimum de 3 sites géodésiques, une solution par moindres carrés permet d'obtenir les composantes du tenseur du gradient de vitesses:

$$V = (A^T C_v^{-1} A)^{-1} A^T C_v^{-1} v$$



Matrice de covariance des composantes du tenseur du gradient de vitesses

Calcul du tenseur des déformations

- La manière la plus efficace de séparer les parties symétrique (taux de déformation) et asymétrique (taux de rotation) du tenseur du gradient de vitesse est de se souvenir que:

$$e_{xx} = \frac{\partial v_x}{\partial x}, e_{yy} = \frac{\partial v_y}{\partial y}, e_{xy} = e_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right), \omega = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)$$

- Et d'écrire:

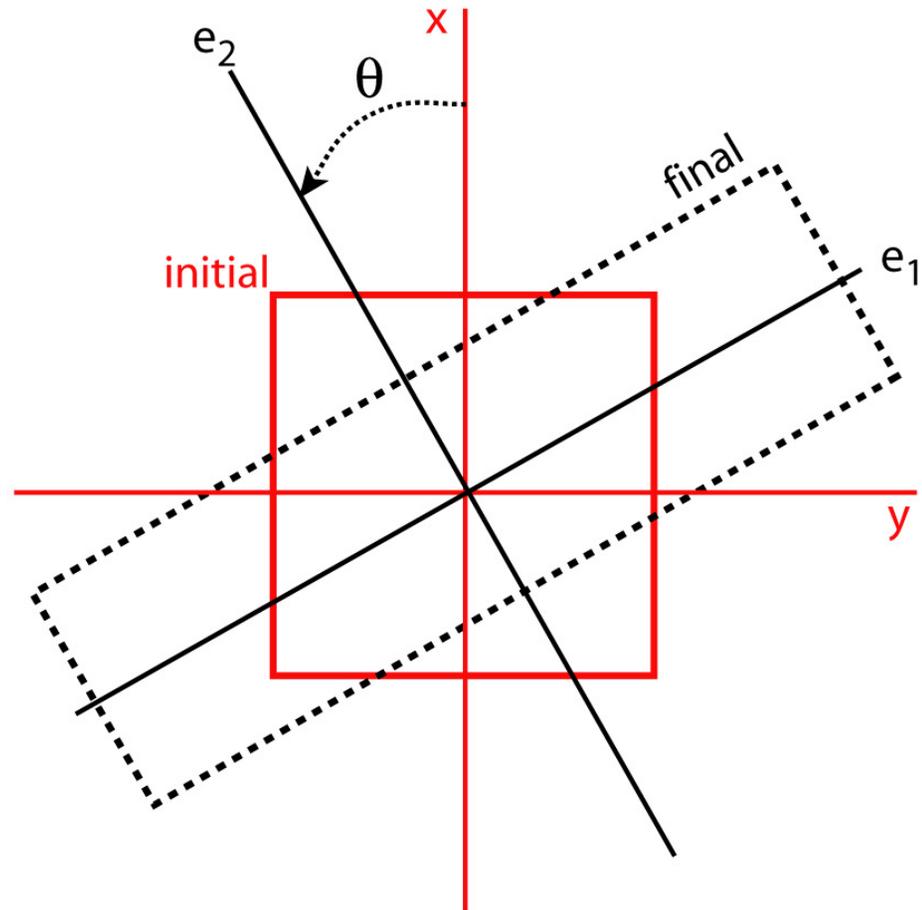
$$\begin{pmatrix} e_{xx} \\ e_{xy} \\ e_{yy} \\ \omega \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.5 & -0.5 & 0 \end{bmatrix}}_A \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial y} \end{pmatrix} \quad \dot{E} = \begin{pmatrix} e_{xx} & e_{xy} \\ e_{xy} & e_{yy} \end{pmatrix}$$

- Ce qui permet de propager la variance du gradient de vitesse C_V vers la variance des taux de déformations/rotation $C_{E,\Omega}$

$$C_{E,\Omega} = AC_V A^T$$

Déformations principales

- Un tenseur conserve ses propriétés indépendamment du repère dans lequel il est exprimé
- On choisit donc de représenter le tenseur des taux de déformation dans un repère tel que:
 - La déformation cisailante (e_{xy}) est nulle
 - Les deux autres composantes sont maximales
- Ceci est équivalent à diagonaliser E :
 - Vecteurs propres = direction des axes principaux du tenseur
 - Valeurs propres = taux de déformations principaux



Déformations principales

- On trouve les valeurs principales (taux de déformation) de E en écrivant:

$$\det(E - \lambda I) = 0$$

$$\Rightarrow \det \begin{bmatrix} e_{xx} - \lambda & e_{xy} \\ e_{xy} & e_{yy} - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (e_{xx} - \lambda)(e_{yy} - \lambda) - e_{xy}e_{xy} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{e_{xx} + e_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{e_{xx} - e_{yy}}{2}\right)^2 + e_{xy}^2}$$

- On trouve les directions principales de E en cherchant la rotation d'angle θ appliquée à E telle que $e_{12} = 0$

- Matrice de rotation: $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$

- On applique la rotation au tenseur E avec: AEA^T

- On écrit e_{12} : $e_{12} = (e_{xx} - e_{yy}) \sin \theta \cos \theta + e_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = 0$

$$\Rightarrow \tan(2\theta) = \frac{2e_{xy}}{e_{xx} - e_{yy}}$$

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \sin(2\theta)$$

$$\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos(2\theta)$$

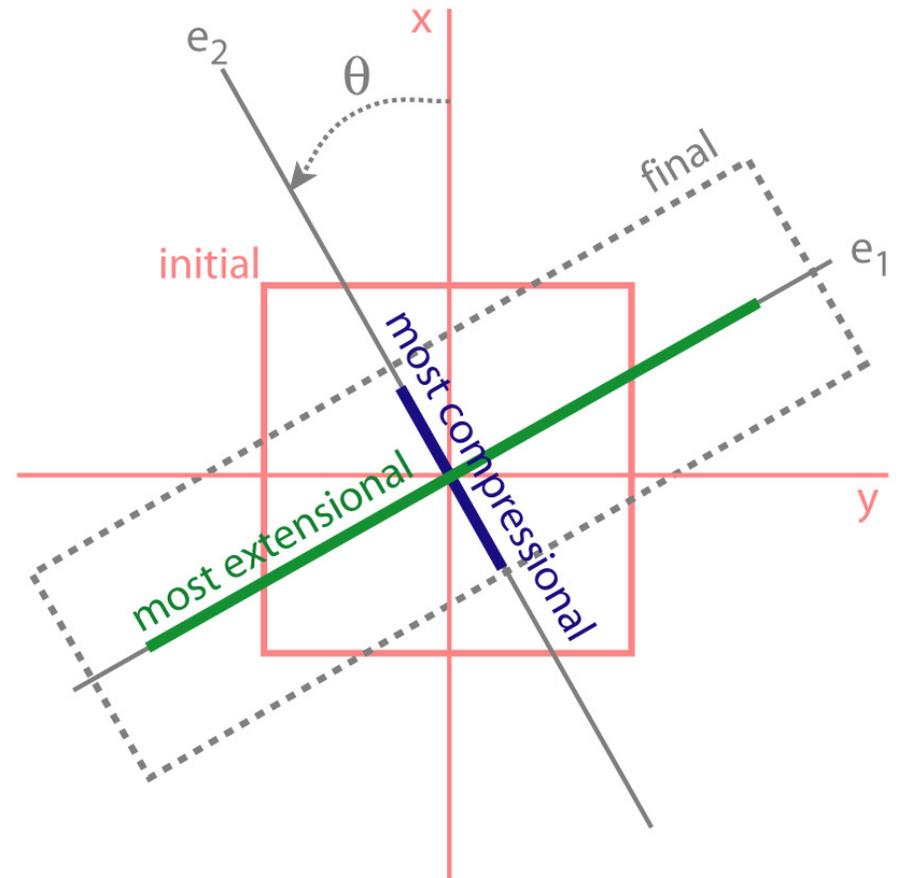
Déformations principales

- On a donc deux directions principales de déformation, l'une minimale l'autre maximale:

$$e_1, e_2 = \frac{e_{xx} + e_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{e_{xx} - e_{yy}}{2}\right)^2 + e_{xy}^2}$$

- Par convention l'extension est positive en géophysique.
- L'angle entre le repère local et le repère principale est donné par:

$$\tan(2\theta) = \frac{2e_{xy}}{e_{xx} - e_{yy}}$$



Transformation inverse

- Rotation du tenseur des déformations principales d'un angle $-\theta$ en utilisant la matrice de rotation A :

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

- On se souvient que la rotation d'un tenseur est donnée par:

$$AE_p A^T = \begin{pmatrix} e_1 \cos^2 \theta + e_2 \sin^2 \theta & -e_1 \sin\theta \cos\theta + e_2 \sin\theta \cos\theta \\ -e_1 \sin\theta \cos\theta + e_2 \sin\theta \cos\theta & e_1 \sin^2 \theta + e_2 \cos^2 \theta \end{pmatrix}$$

- Ce qui donne:

$$\begin{cases} e_{xx} = e_1 \cos^2 \theta + e_2 \sin^2 \theta = \frac{e_1 + e_2}{2} + \frac{e_1 - e_2}{2} \cos(2\theta) \\ e_{yy} = e_1 \sin^2 \theta + e_2 \cos^2 \theta = \frac{e_1 + e_2}{2} - \frac{e_1 - e_2}{2} \cos(2\theta) \\ e_{xy} = -e_1 \sin\theta \cos\theta + e_2 \sin\theta \cos\theta = -\frac{e_1 - e_2}{2} \sin(2\theta) \end{cases}$$

$$\sin\theta \cos\theta = \frac{1}{2} \sin(2\theta)$$

$$\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos(2\theta)$$

Cisaillement

- Les formules précédentes nous disent que le cisaillement est maximal quand :

$$e_{xy} = -\frac{e_1 - e_2}{2} \sin(2\theta) \quad \Rightarrow \quad e_{xy, \max} = \frac{e_1 - e_2}{2} = \sqrt{\left(\frac{e_{xx} - e_{yy}}{2}\right)^2 + e_{xy}^2}$$

- On rappelle l'expression de e_{12} :

$$\begin{aligned} e_{12} &= (e_{xx} - e_{yy}) \sin\theta \cos\theta + e_{xy} (\cos^2\theta - \sin^2\theta) \\ &= \frac{1}{2} (e_{xx} - e_{yy}) \sin(2\theta) + e_{xy} \cos(2\theta) \end{aligned}$$

- L'angle pour lequel le cisaillement est maximal est obtenu en différenciant e_{12} par rapport à θ :

$$\begin{aligned} e_{12} = \max &\Rightarrow \frac{de_{12}}{d\theta} = 0 \\ \frac{1}{2} (e_{yy} - e_{xx}) \cos(2\theta_s) - e_{xy} \sin(2\theta_s) &= 0 \\ \Rightarrow \tan(2\theta_s) &= \frac{e_{yy} - e_{xx}}{2e_{xy}} \end{aligned}$$

Cisaillement

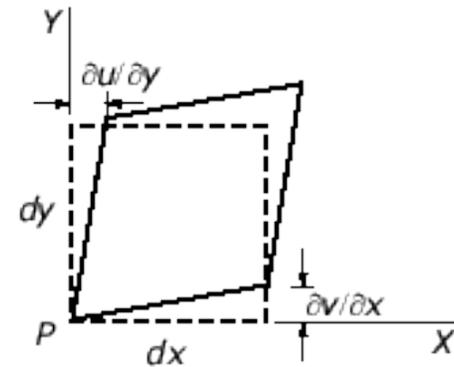
- Cisaillement maximal:

$$e_{xy,\max} = \sqrt{\left(\frac{e_{xx} - e_{yy}}{2}\right)^2 + e_{xy}^2}$$

- Angle de cisaillement maximal:

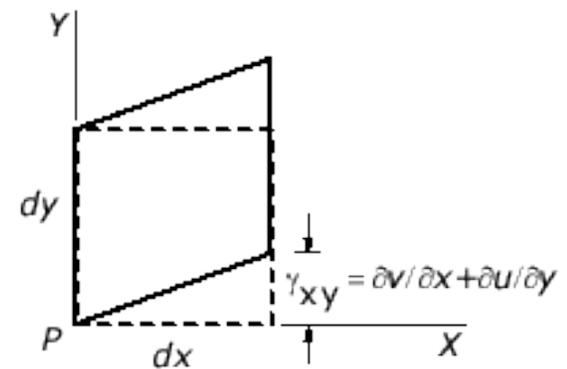
$$\tan(2\theta_s) = \frac{e_{yy} - e_{xx}}{2e_{xy}}$$

$$\theta_s = \theta \pm 45^\circ$$



Shear strain tensor is the **average** of two strains, i.e.,

$$\varepsilon_{xy} = (\partial v / \partial x + \partial u / \partial y) / 2 = \varepsilon_{yx}$$

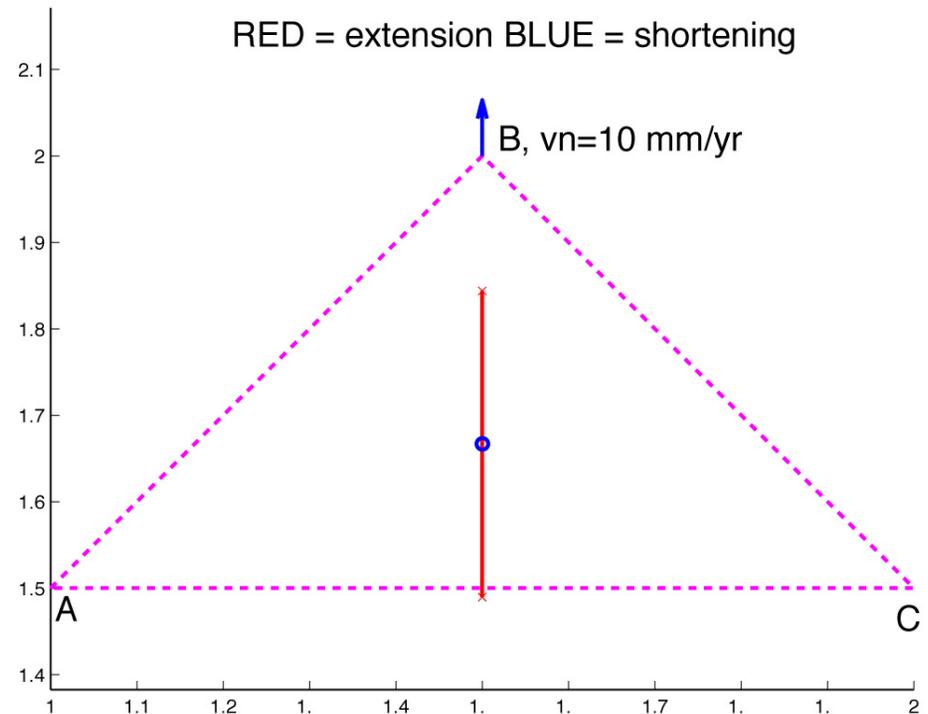


Engineer shear strain is the **total** shear strain, i.e.,

$$\gamma_{xy} = \partial v / \partial x + \partial u / \partial y$$

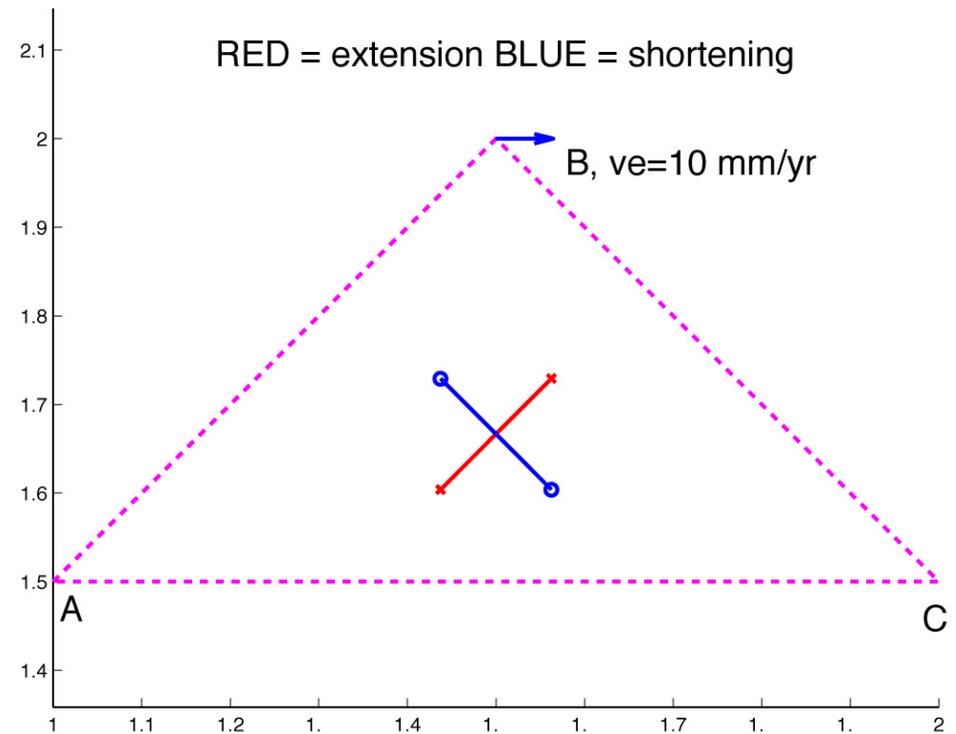
Exemple 1: extension pure

- Tenseur des taux de déformation:
 - $e_{xx} = 0.00$ ppb/yr
 - $e_{xy} = -0.00$ ppb/yr
 - $e_{yy} = 177.08$ ppb/yr
- Déformations principales:
 - $e_1 = 177.08$ ppb/yr (la plus extensive)
 - $e_2 = 0.00$ ppb/yr (la plus compressive)
 - $\theta = 90.00$ (e_1 , horaire du nord)
- Rotation:
 - $\omega = 0.00$ deg/Ma



Exemple 2: cisaillement simple

- Tenseur des taux de déformation:
 - $e_{xx} = 0.00$ ppb/yr
 - $e_{xy} = 88.54$ ppb/yr
 - $e_{yy} = 0.00$ ppb/yr
- Déformations principales:
 - $e_1 = 88.54$ ppb/yr (la plus extensive)
 - $e_2 = -88.54$ ppb/yr (la plus compressive)
 - $\theta = -45.00$ (e_1 , horaire du nord)
- Rotation:
 - $\omega = 0.09$ deg/Ma



Les invariants

- Comme tout tenseur d'ordre deux, celui des taux de déformation a 3 invariants = quantités non modifiées par un changement de repère.
- Premier invariant = trace du tenseur

$$I_E = \text{tr}(E) = e_{xx} + e_{yy} = e_1 + e_2$$

- Deuxième invariant = parfois utilisé pour indiquer la “magnitude” du tenseur

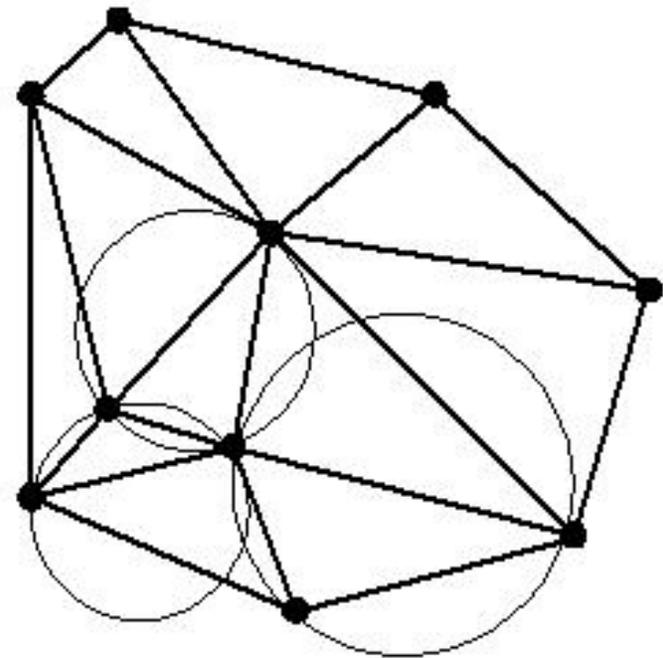
$$II_E = \frac{1}{2} \left(\text{tr}(E^2) - \text{tr}(EE) \right) = e_{xx}e_{yy} - e_{xy}^2 = e_1e_2$$

- Troisième invariant = déterminant (identique au second invariant dans le cas d'un tenseur 2x2 symétrique):

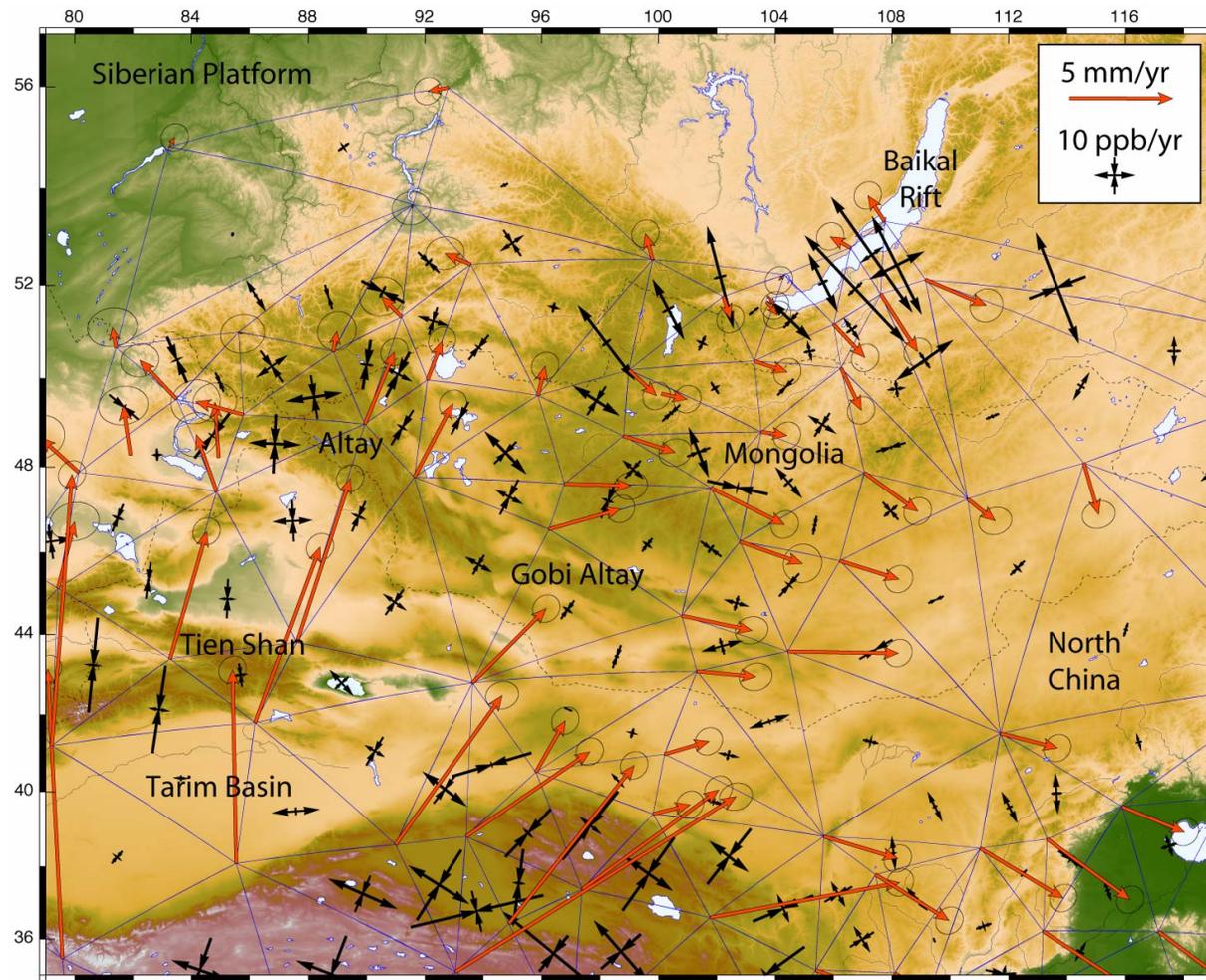
$$III_E = \det(E) = e_{xx}e_{yy} - e_{xy}^2 = e_1e_2$$

Dans la pratique

- On discrétise l'espace par des polygones à l'intérieur desquels:
 - On fait l'hypothèse d'une déformation continue
 - On estime le tenseur des gradients de vitesses à partir des mesures géodésiques aux sommet du polygone
 - On en déduit le tenseur des taux de déformations.
- Ces polygones sont classiquement des triangles de Delaunay (aucun point n'est à l'intérieur du cercle circonscrit d'un triangle donné => maximise le plus petit angle) mais peuvent avoir une forme arbitraire.
- On représente les directions et valeurs principales du tenseur de déformation → interprétation géophysique.

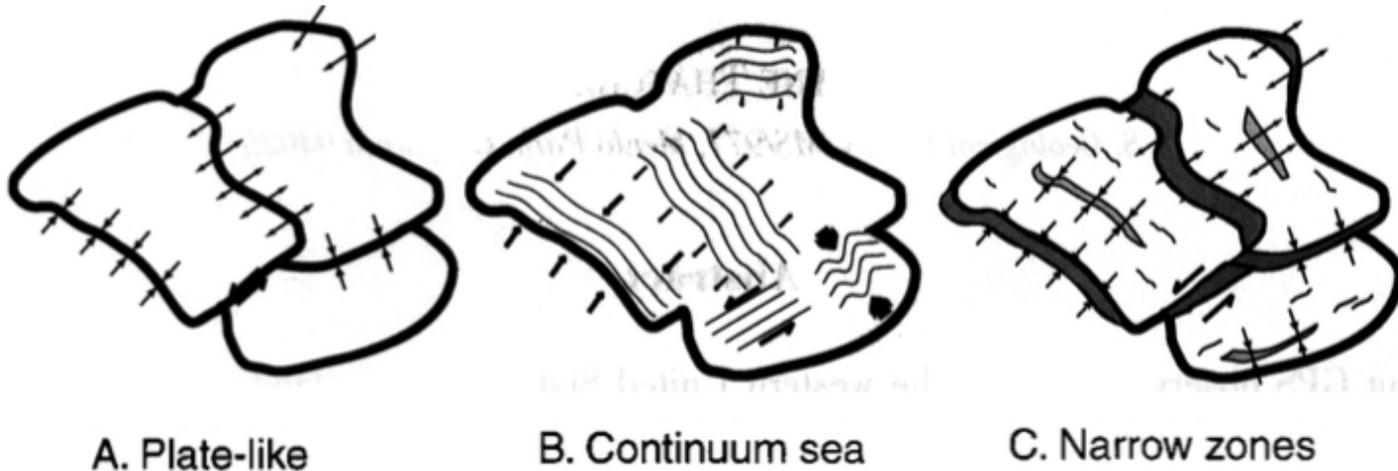


Exemple en Asie Centrale (Mongolie)



Vitesses GPS par rapport à l'Eurasie et taux de déformation principaux.

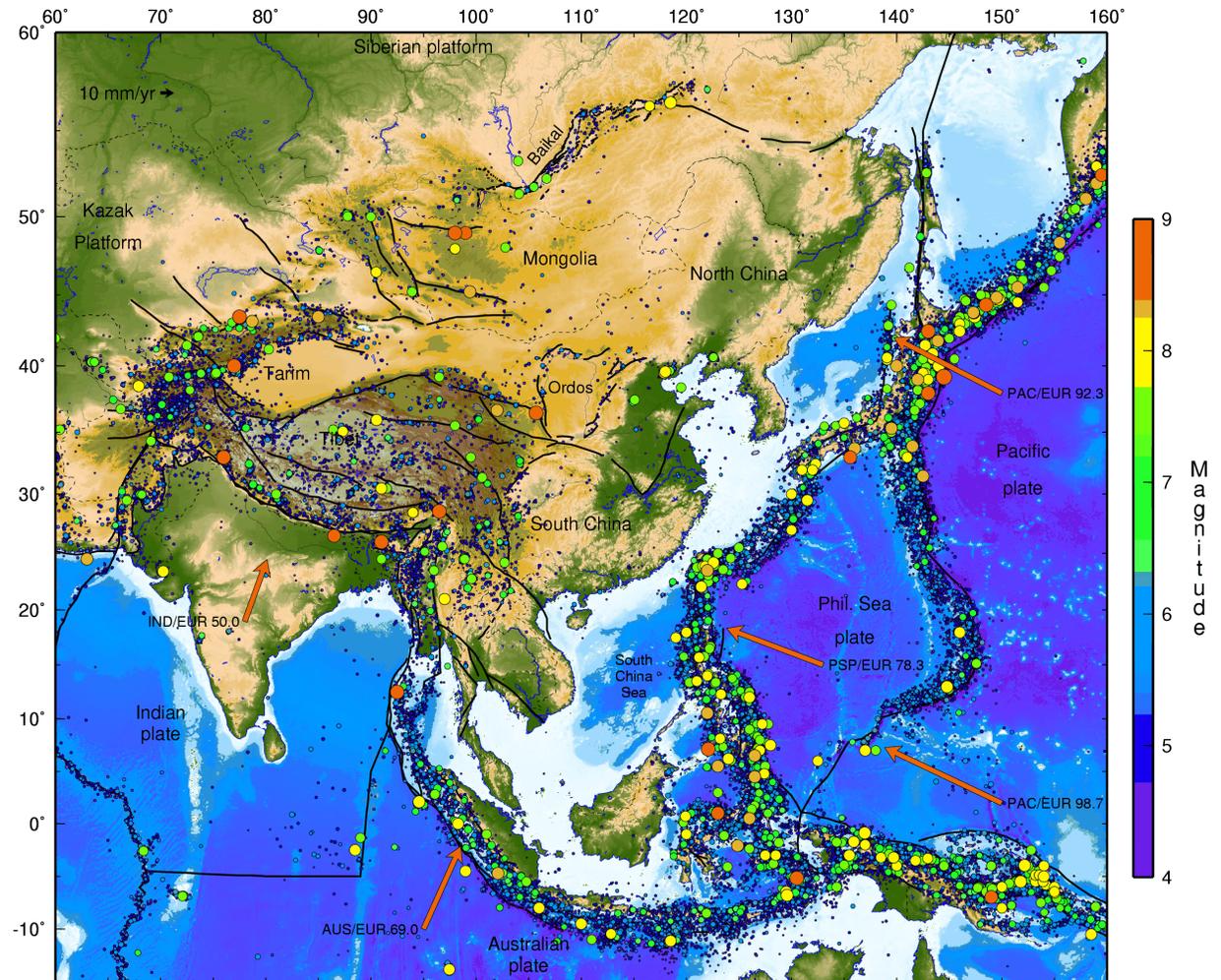
L'enjeu géophysique



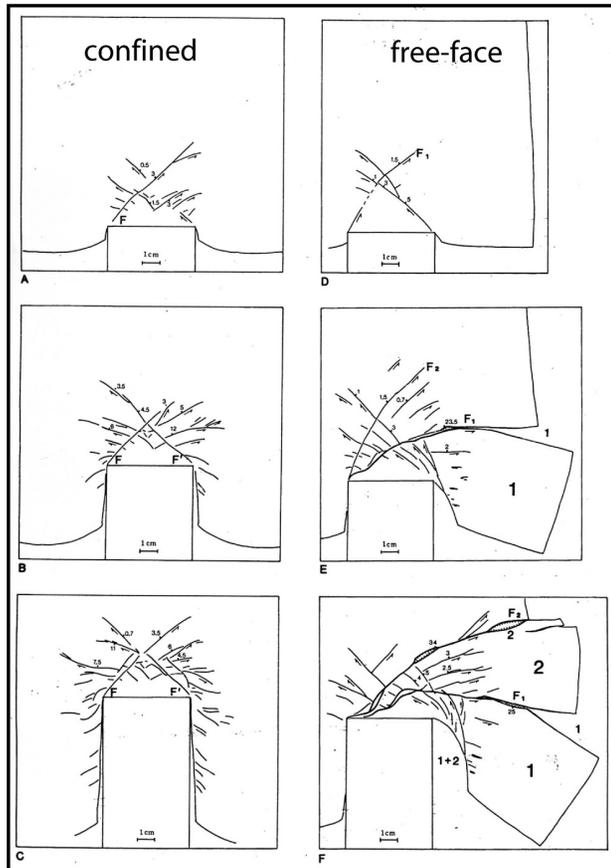
- Cinématique de la déformation de la lithosphère continentale, deux écoles de pensée s'opposent: déformation localisée ou distribuée ?
- Mécanisme et rhéologie:
 - Propagation de fractures dans une lithosphère (élasto-)plastique
 - Déformation continue visqueuse où les contrastes de topographie contrôlent l'écoulement de la lithosphère continentale
- La géodésie est un outil qui permet de discuter la validité de ces modèles

La déformation continentale en Asie

- Asia: a deforming continent (Argand, 1924)
-- seismicity, active faulting
- India/Eurasia collision at 40 My \Rightarrow deformation far inboard -- still active
- Relatively well-known tectonic framework (*e.g.*, Molnar and Tapponnier, 1975)
- Debate on deformation mechanisms since 80' – still on-going.
- Geodetic data sets \Rightarrow direct measurements of crustal motions \Rightarrow continental-scale picture of deformation in Asia

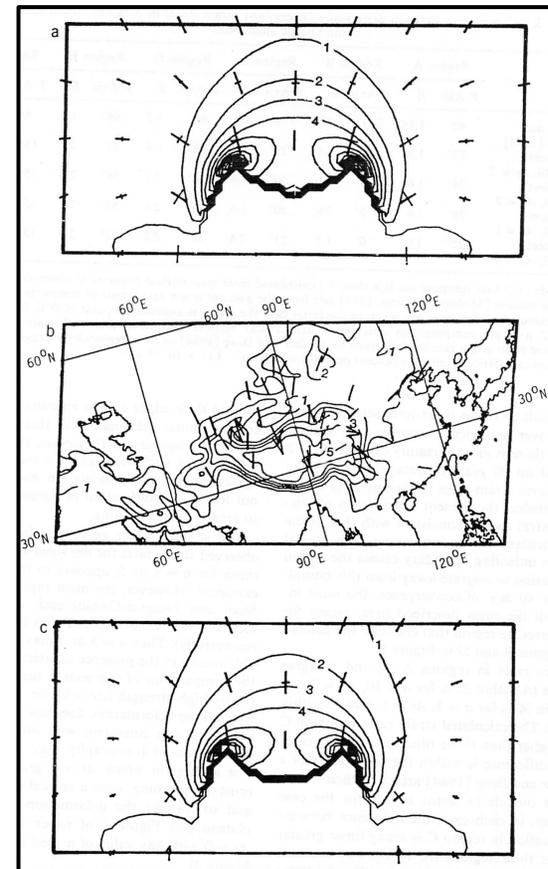


La déformation continentale en Asie



Tapponnier et al., 1982; Peltzer and Tapponnier, 1984

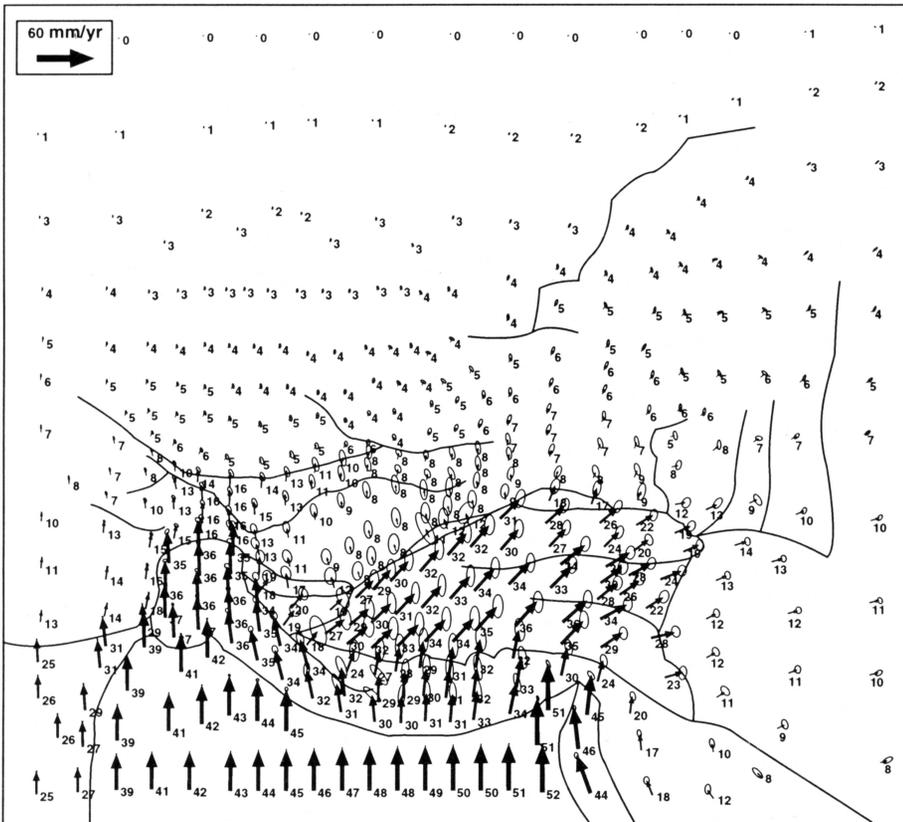
Déformation par rotation de blocs rigides le long de grandes failles continentales, moteur = forces exercées par les plaques entre elles, milieu fragile discontinu.



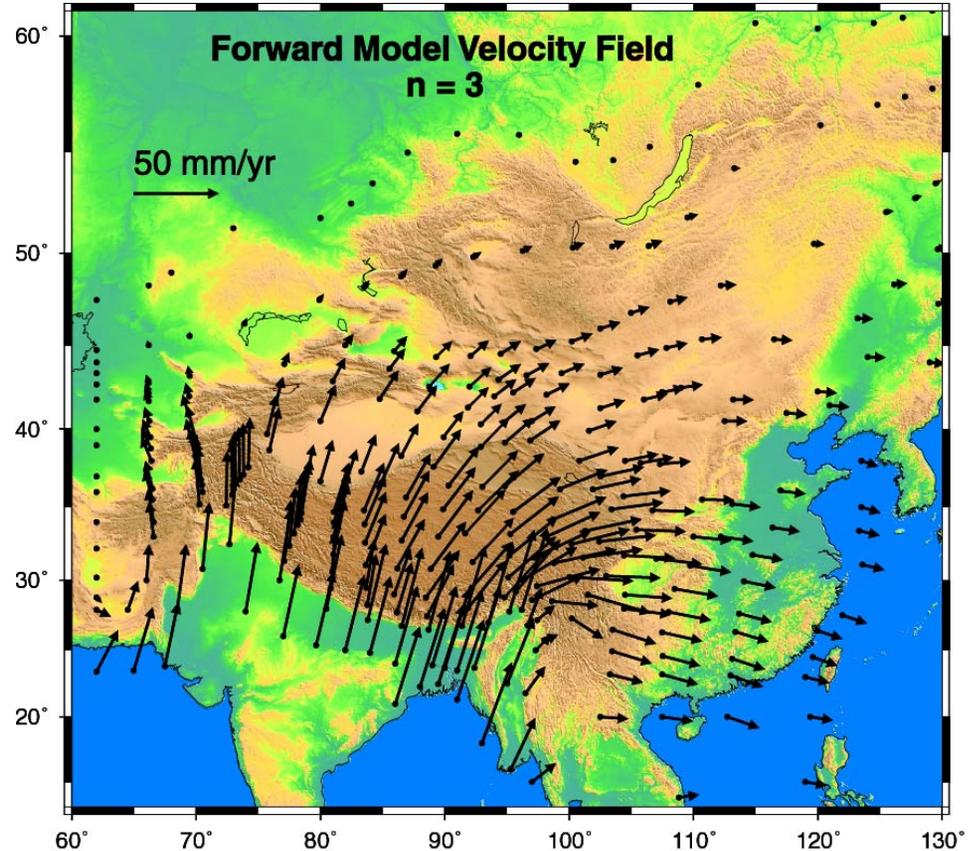
England and Houseman, 1986

Déformation continue d'une lithosphère visqueuse sans failles, moteur = forces de volumes générées par l'épaississement crustal lié à la collision.

La déformation continentale en Asie

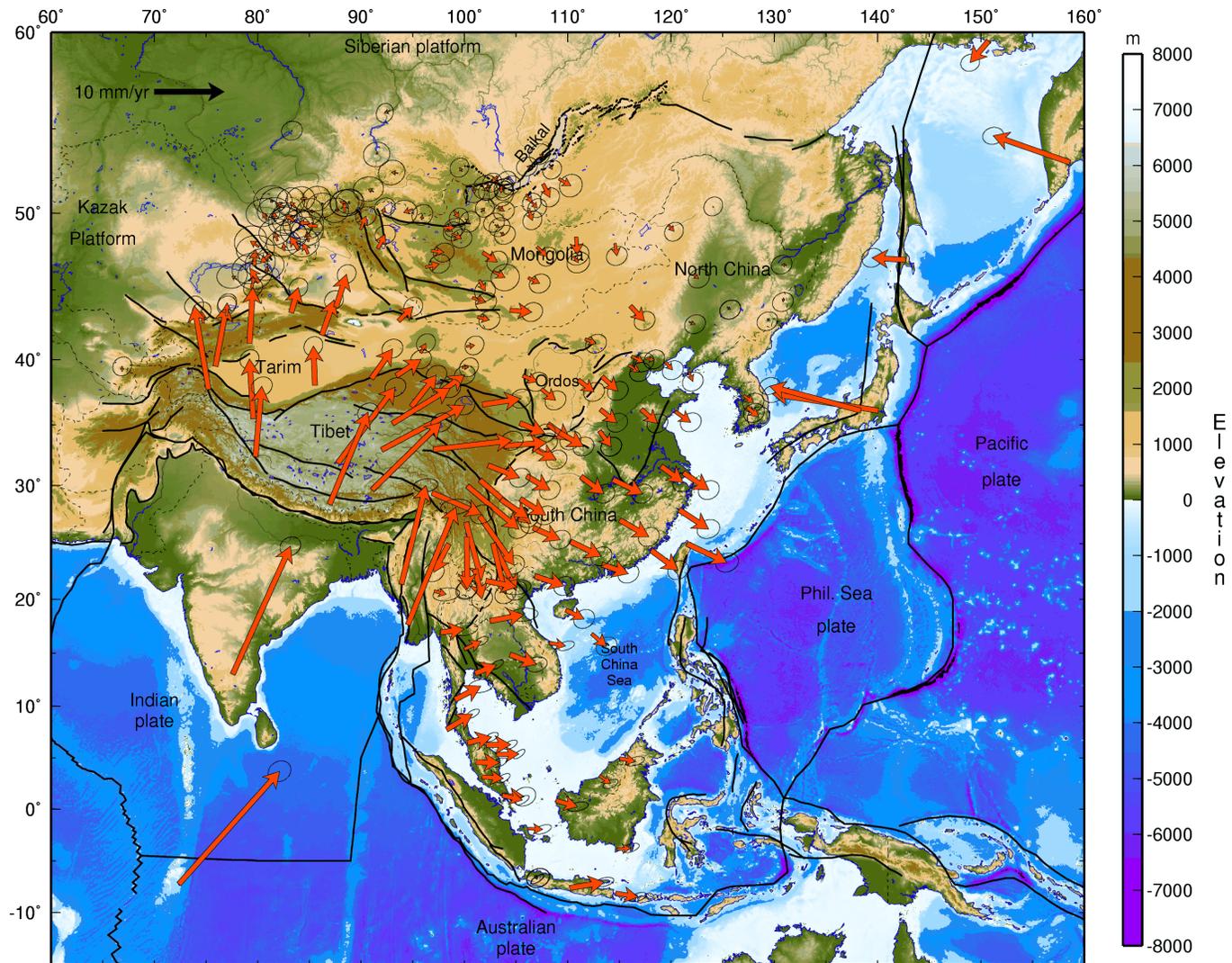


Peltzer and Saucier, 1996



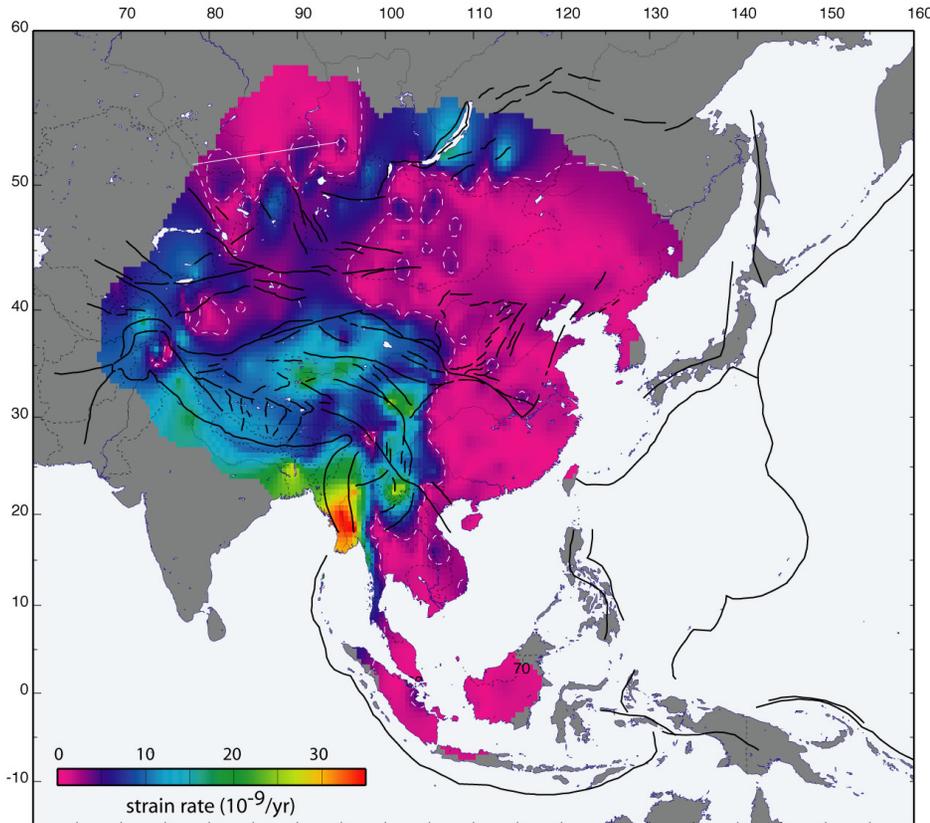
Flesch et al., 2000

La déformation continentale en Asie

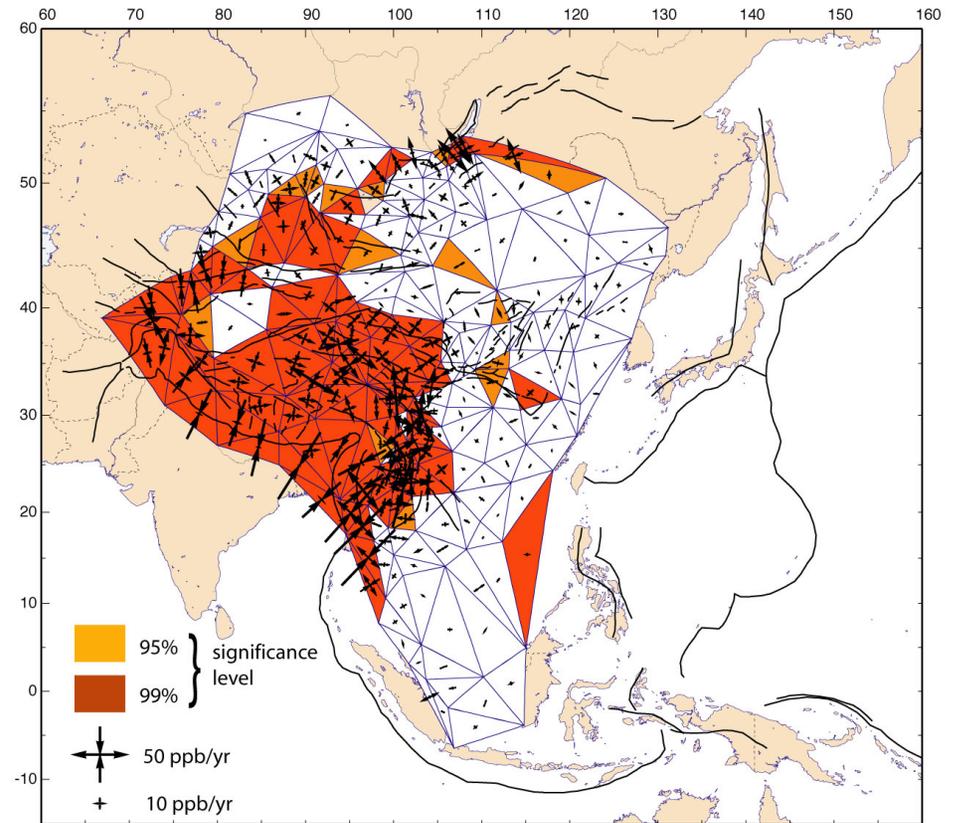


La déformation continentale en Asie

Strain rate - Second invariant

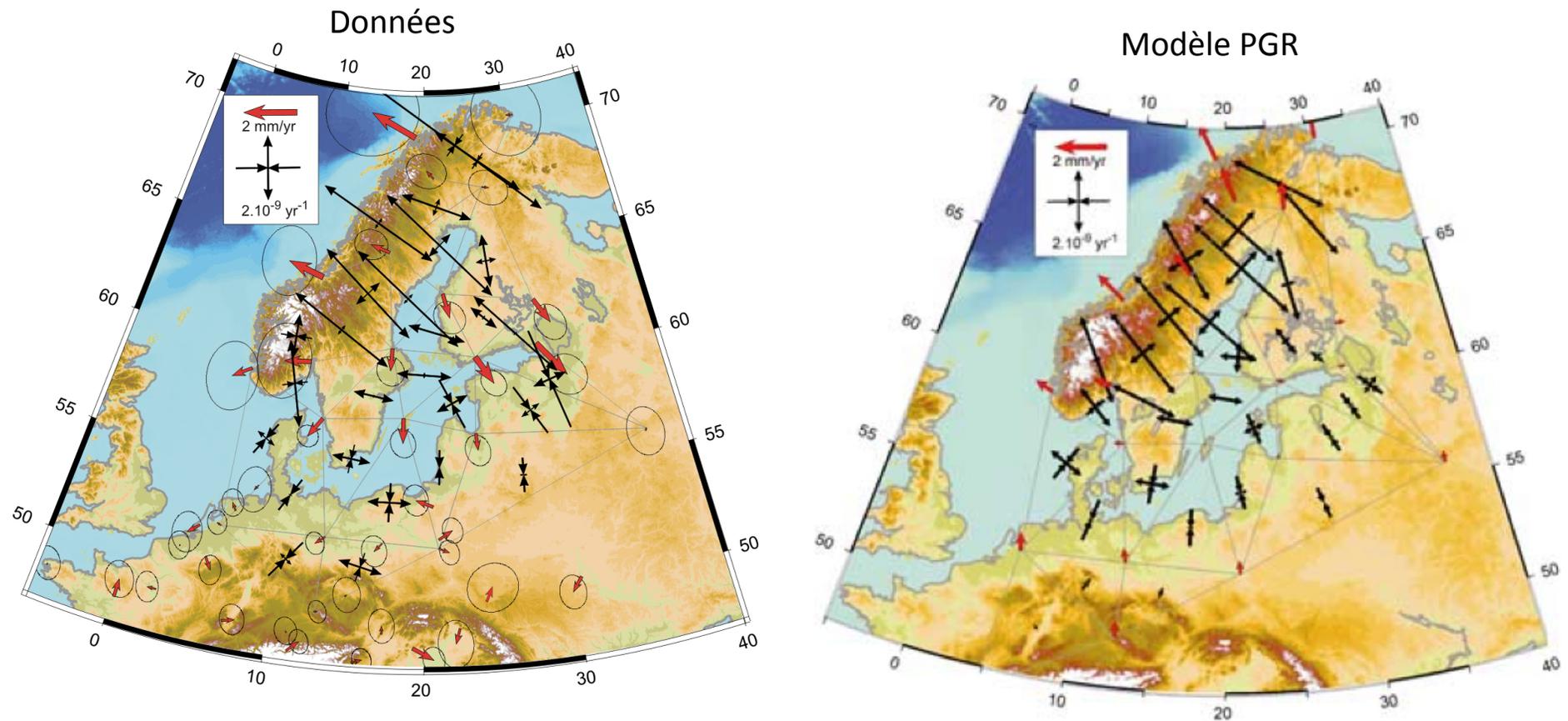


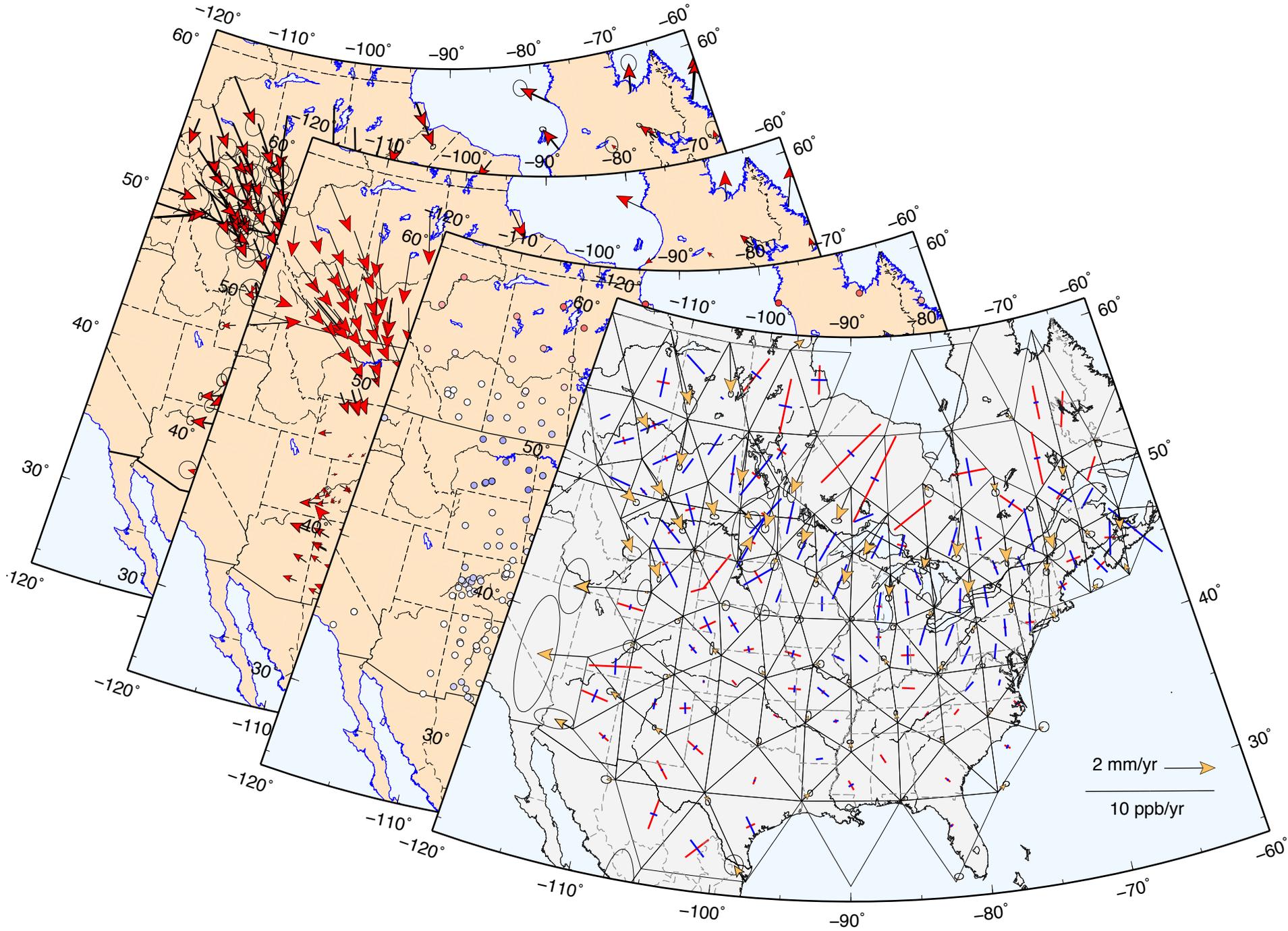
Strain rate tensors and significance level



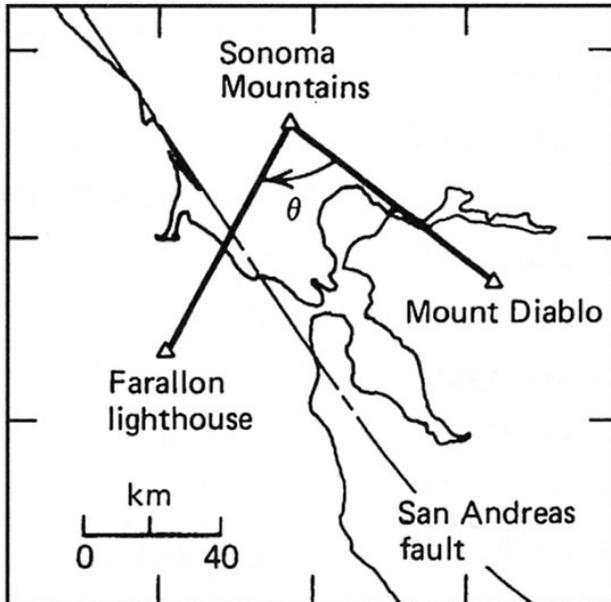
- The $3 \times 10^{-9} \text{ yr}^{-1}$ line coincides with the 95% significance level
- A large part of Asia shows strain rates that are not significant at the 95% confidence level and are lower than $3 \times 10^{-9} \text{ yr}^{-1}$

Le rebond post-glaciaire en Europe

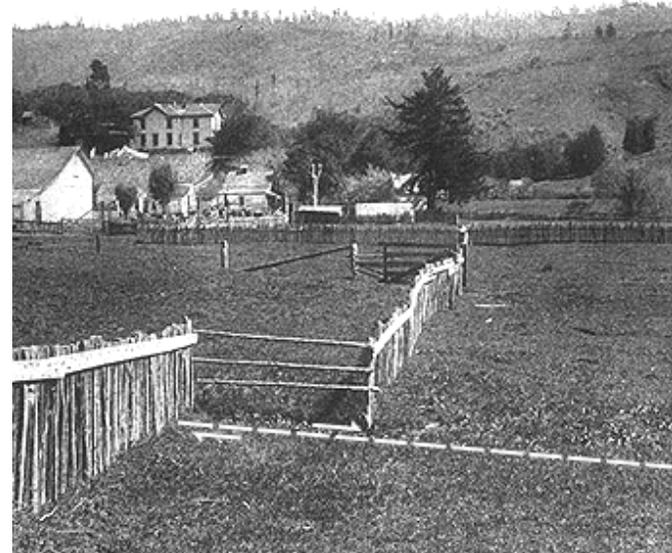




Déformations localisées



Fence displaced by surface rupture during the 1906 San Francisco earthquake



- Un peu d'histoire : H.F. Reid, 1910
- San Francisco, 1906, earthquake
 - 450 km fault rupture, 360 km on-land
 - Average right-lateral slip = 4.5 m
- Triangulation network across the San Andreas fault:
 - Surveyed in the 1880s, resurveyed after the earthquake:
 - Max. displacement on the fault, consistent with geological observations
 - Displacements decay rapidly away from the fault, reaching ~zero at ~20 km
 - Same network surveyed in the 1860s, 1860-1880 comparison:
 - Farallon island (lighthouse) had been moving to the NW w.r.t. inland sites (west of the SAF)