

Chapitre 3

Forces et rhéologie

Table des matières

3	Forces et rhéologie	1
3.1	Introduction	3
3.2	Forces et contraintes	4
3.2.1	Force	4
3.2.2	Contrainte	5
3.2.3	Déformation	8
3.2.4	Équilibre dynamique	9
3.3	Équilibre hydrostatique	12
3.3.1	Définition	12
3.3.2	Pratt versus Airy	16
3.3.3	Forces horizontales résultantes	18
3.3.4	Énergie potentielle de gravité	20
3.3.5	Application	22
3.3.6	Effet de la température	24
3.3.7	La profondeur des océans	27
3.4	Lois de déformation	32
3.4.1	Quelques observations	32
3.4.2	Principaux comportements	32
3.4.3	Comportement frictionnel	33
3.4.4	Comportement visqueux	46
3.4.5	Stratification mécanique de la lithosphère	50

3.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est d'une part, après avoir brièvement défini forces et contraintes dans la lithosphère, de déterminer l'équilibre des forces qui per-

mettent au relief d'être créée et de se maintenir. On verra que les forces aux limites exercées sur un volume de roche sont équilibrés par les forces de volume (figure 3.1). Le cas particulier de l'équilibre hydrostatique permet de traiter la question de l'isostasie et des forces horizontales résultantes. On verra que ces forces sont équivalentes aux gradients latéraux d'énergie potentielle de gravité. D'autre part, nous définirons les lois constitutives (ou de déformation, ou de comportement) qui lient les déformations de la lithosphère aux forces exercées. Nous verrons que la lithosphère est mécaniquement stratifiée et que sa résistance mécanique moyenne est supérieure aux forces tectoniques. Cela lui permet de transmettre les contraintes sur de grandes distances, en particulier en domaine océanique.

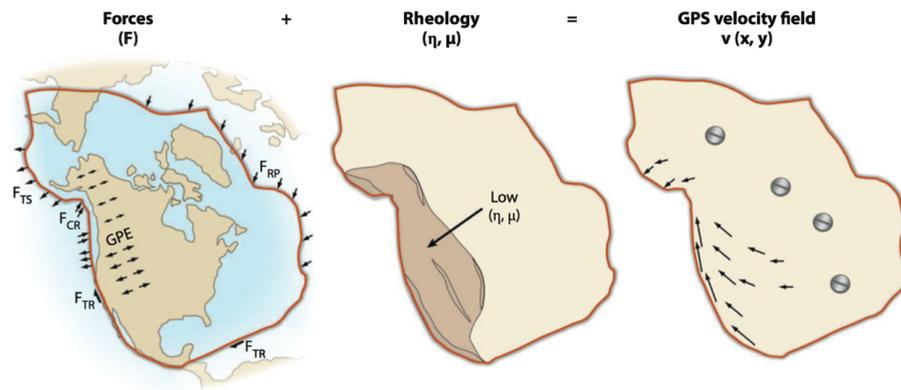


FIGURE 3.1 – Illustration schématique que la déformation d'un continent, telle que mesuré par GPS par exemple, résulte de l'action de forces s'appliquant sur une lithosphère dont les propriétés mécaniques varient dans l'espace. Les forces de volume se développent en réponse à l'accélération de la pesanteur sur les éléments de masse qui composent la lithosphère : F_{TS} = "suction" des subductions, F_{RP} = "poussée" aux dorsales. Les forces aux limites se développent en réponse à des mouvements : F_{CR} = résistance à la collision, F_{TR} = résistance des failles transformantes. La force de traction résultant du mouvement relatif lithosphère – manteau sous-jacent n'est pas représentée. Les propriétés mécaniques de la lithosphère dépendent de leur élasticité (μ) et viscosité (η), eux-mêmes dépendants du type de roche, de la température, de la présence de fluides, etc. Figure tirée de Thatcher, 1999.

Contrainte principale

3.2 Forces et contraintes

3.2.1 Force

Une force :

- Est une quantité vectorielle
- S'applique en un point

- A une magnitude et une direction
- A la dimension d'une masse \times accélération = kg m s^{-2}

Les forces agissant sur un élément de volume de roche peuvent être divisées en :

- **Forces de volume ou “efforts volumiques”** : elles agissent au travers de l'ensemble d'un matériau, à distance (sans contact mécanique). Elle dépendent de la densité massique de l'élément de solide considéré : $f dm$. Ces forces résultent des interactions à longue portée par exemple de gravitation ou d'électromagnétisme). Dans le cas général en géodynamique ces forces se réduisent au poids causé par l'attraction de la pesanteur sur une masse = densité \times volume.
- **Forces de surface ou “efforts surfaciques”** : elles agissent au contact entre des éléments de volume. Elles dépendent de la densité surfacique sur la frontière de l'élément de solide considéré : $T dS$. Ces forces correspondent aux interactions interparticulaires à très courte portée et responsables de la cohésion de la matière.

Les solides, contrairement aux fluides, peuvent soutenir des forces appliquées tangentiellement à leur surface. Cette force tangentielle par unité de surface est la contrainte de cisaillement. Un fluide ne peut pas soutenir de contrainte de cisaillement.

3.2.2 Contrainte

Définition

- Quantité tensorielle
- Force par unité de surface \implies unité = Nm^{-2} = Pa. On utilise aussi le bar : 1 MPa = 10 bars.
- Associé à une surface (2D) ou un volume (3D) élémentaire
- Se décompose en 9 composantes :

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

- Le premier indice donne la direction dans laquelle la contrainte agit. Le second donne la normale au plan sur lequel la contrainte agit.
- σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} agissent sur la surface normale à la direction dans laquelle la contrainte agit, ce sont les contraintes “normales”.
- Les 6 autres éléments du tenseur des contraintes sont les contraintes “de cisaillement”, elles agissent parallèlement aux plans sur lesquels elles s'appliquent.
- Le tenseur des contraintes est symétrique : $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$, $\sigma_{xz} = \sigma_{zx}$, $\sigma_{yz} = \sigma_{zy}$. Il est donc défini par 6 quantités indépendantes, 3 contraintes normales + 3 contraintes de cisaillement.

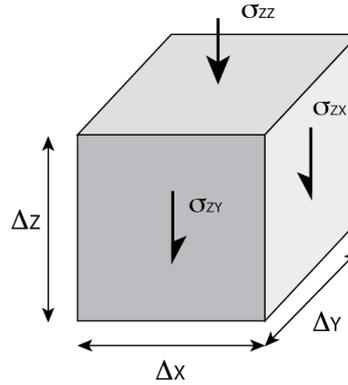


FIGURE 3.2 – Schéma illustrant les contraintes s’exerçant sur 3 des faces d’un cube (les contraintes sur les autres faces ne sont pas représentées). Au repos, ces contraintes – ou forces surfaciques – sont équilibrées par des contraintes de même direction et magnitude mais de sens opposé.

Contrainte principale

Il existe un repère (O, x', y', z') dans lequel les contraintes de cisaillement sont nulles (Figure 3.3). Dans ce repère on a :

$$\sigma' = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

où $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sont les “contraintes principales”.

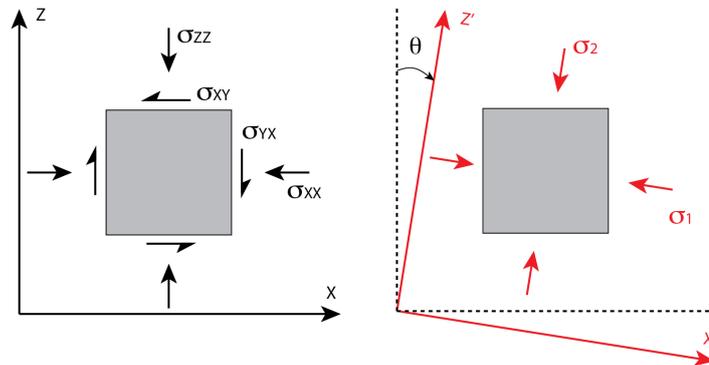


FIGURE 3.3 – Contraintes s’exerçant sur un carré unitaire dans le repère d’origine (x, y) et dans celui des contraintes principales (x', y') tel que les contraintes cisailantes sur les faces du cube sont nulles. C’est le repère des contraintes principales. L’état de contrainte du carré est le même dans les deux cas, seul change le repère dans lequel elles sont exprimées.

Le passage du repère originel au repère des contraintes principales se fait par une rotation d’un angle θ . Appliquons cette rotation au tenseur des contraintes

dans un cas à deux dimensions. On doit écrire :

$$\sigma' = R \sigma R^t \quad (3.3)$$

où R est une matrice rotation :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

En développant, et en se souvenant que $\cos^2 \theta = (1 + \cos 2\theta)/2$, $\sin^2 \theta = (1 - \cos 2\theta)/2$, et $\sin \theta \cos \theta = (\sin 2\theta)/2$, on obtient les contraintes principales :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{zz}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{zz}}{2} \cos(2\theta) - \sigma_{xz} \sin(2\theta) \\ \sigma_2 &= \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{zz}}{2} - \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{zz}}{2} \cos(2\theta) + \sigma_{xz} \sin(2\theta) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Dans le repère des contraintes principales la contrainte cisailante est par définition nulle, on a donc aussi :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{zz}}{2} \sin 2\theta + \sigma_{xz} \cos 2\theta \\ \implies \tan 2\theta &= \frac{2 \sigma_{xz}}{\sigma_{xx} - \sigma_{zz}} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Ceci nous donne donc la valeur de l'angle de rotation à appliquer pour se placer dans le repère des contraintes principales. On peut substituer cette valeur dans les équations de σ_1, σ_2 ci-dessus pour écrire :

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{zz}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{zz}}{2}\right)^2 + \sigma_{xz}^2} \quad (3.7)$$

La transformation inverse consiste à appliquer une rotation d'angle $-\theta$ au tenseur des contraintes principales, soit :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

En développant, on obtient :

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} &= \sigma_1 \cos^2 \theta + \sigma_2 \sin^2 \theta \\ &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\theta \\ \sigma_{zz} &= \sigma_1 \sin^2 \theta + \sigma_2 \cos^2 \theta \\ &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\theta \\ \sigma_{xz} &= -\sigma_1 \sin \theta \cos \theta \\ &= -\frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\theta \end{aligned} \quad (3.9)$$

Invariants

Contrainte moyenne

La contrainte moyenne est un scalaire défini par :

$$\sigma_m = P = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \quad (3.10)$$

C'est la contrainte isotrope, aussi appelée "pression".

Contrainte différentielle

La contrainte différentielle est un scalaire défini par :

$$\sigma_d = \sigma_1 - \sigma_3 \quad (3.11)$$

Contrainte déviatorique

La contrainte déviatorique est un tenseur donnant la déviation du tenseur des contraintes par rapport à la contrainte moyenne :

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} - P & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} - P & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} - P \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

De la même manière que pour les contraintes totales, il existe un repère (O, x', y', z') dans lequel les contraintes déviatoriques de cisaillement sont nulles. Dans ce repère on a :

$$\tau' = \begin{bmatrix} \tau'_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \tau'_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \tau'_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 - \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 - \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 - \sigma_m \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

où $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sont les "contraintes déviatoriques principales".

3.2.3 Déformation

Lorsque des forces s'exercent sur un solide, celui-ci se déforme = il change de forme. On peut représenter ce changement de forme par un tenseur d'ordre 2, analogue au tenseur des contraintes :

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

$\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}$ représentent des allongements. Les 6 autres éléments représentent des glissements.

Les formules de changement de repère s'obtiennent comme pour le tenseur des contraintes pour calculer les déformations principales ou obtenir les invariants du tenseur des déformations.

3.2.4 Équilibre dynamique

La relation d'équilibre des contraintes est dérivée du principe fondamental de la dynamique (= seconde loi de Newton) qui dit que :

$$\overrightarrow{force} = masse \times \overrightarrow{acceleration} \quad (3.15)$$

Considérons un petit cube de roche unitaire (côtés = 1) de densité ρ , dont les faces sont perpendiculaire au directions du repère orthonormé (O, x, y, z) , comme schématisé sur la Figure 3.2. z est par exemple la verticale. Ce cube est soumis à des forces s'exerçant le long des ses bords et des forces causées par sa propre masse sous l'effet de la gravité (= forces de volume). Les contraintes associées sur les trois faces visibles sur la figure sont la contrainte normale à la face horizontale σ_{zz} et les contraintes tangentielles aux deux faces verticales σ_{xz} et σ_{yz} . Au repos, les forces exercées sur ces trois faces doivent être compensées par des forces de magnitude et direction égales mais de sens opposé s'exerçant sur les trois faces opposées du cube.

Par exemple, le long de (O, z) la force exercée en z sur la face $\Delta x, \Delta y$ est :

$$p(z) = \sigma_{zz} \Delta x \Delta y \quad (3.16)$$

Elle est compensée en $z + \Delta z$ par une force opposée que l'on peut écrire, en utilisant un développement de Taylor au premier degré :

$$p(z + \Delta z) = p(z) + \frac{\partial p(z)}{\partial z} \Delta z \quad (3.17)$$

Le même principe est utilisé pour déterminer les forces s'exerçant sur les deux faces perpendiculaires. On peut donc écrire l'équilibre des forces dans la direction (O, z) en écrivant que les forces s'exerçant sur chaque paire de faces parallèles entre elles se compensent. On a alors par exemple pour la face horizontale $(\Delta x, \Delta y)$:

$$-\sigma_{zz} \Delta x \Delta y = \left(\sigma_{zz} + \frac{\partial \sigma_{zz} \Delta z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \quad (3.18)$$

On peut donc écrire l'équilibre des contraintes dans la direction (O, z) en incluant les 3 paires de faces du cube unitaire de la manière suivante :

$$\begin{aligned} & \left(\sigma_{zz} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \Delta z \right) \Delta x \Delta y - \sigma_{zz} \Delta x \Delta y \\ & + \left(\sigma_{zx} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y \Delta z - \sigma_{zx} \Delta y \Delta z \\ & + \left(\sigma_{zy} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} \Delta y \right) \Delta x \Delta z - \sigma_{zy} \Delta x \Delta z \\ & \qquad - \rho g \Delta x \Delta y \Delta z \\ & \qquad = \rho a_z \Delta x \Delta y \Delta z \end{aligned} \quad (3.19)$$

où :

- les 3 premières lignes correspondent aux 3 paires de faces du cube ;
- la quatrième ligne correspond au poids du cube ;

— la cinquième ligne donne l'accélération du cube dans la direction (O, z) .

On voit que l'équation 3.19 se simplifie pour s'écrire :

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} - \rho g = \rho a_z \quad (3.20)$$

De la même manière, on a dans les directions (O, x) et (O, y) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} &= \rho a_x \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} &= \rho a_y \end{aligned} \quad (3.21)$$

Passons en notation indicielle, qui utilise une convention de notation pour écrire des sommes un peu longues. Par exemple :

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i = x_i y_i \quad (3.22)$$

On appelle cela la "sommation d'Einstein". L'opération suivante, dans une base orthonormée $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

s'écrit simplement :

$$\sigma_{ij} x_j = b_i \quad (3.24)$$

Cette dernière équation contient donc en fait 3 égalités. De fait, les 3 équations de l'équilibre dynamique (3.21) peuvent, en notation indicielle, se réduire à :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i = \rho a_i \quad (3.25)$$

avec $g_x = g_y = 0$.

On peut aussi écrire le principe fondamental de la dynamique pour un élément de solide E en notation indicielle en écrivant que l'accélération est égale à la somme des forces de surface et des forces de volume :

$$\iiint_E \rho a_i dv = \iiint_E \rho f_i dv + \iint_E \sigma_{ij} n_j dS \quad (3.26)$$

Le théorème de la divergence permet de transformer l'intégrale de surface en intégrale de volume :

$$\iint_E \sigma_{ij} n_j dS = \iiint_E \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} dv \quad (3.27)$$

d'où :

$$\iiint_E \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i - \rho a_i \right) dv = 0 \quad (3.28)$$

et finalement, en remplaçant la force de volume f_i par celle exercée par la pesanteur g :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i = \rho a_i \quad (3.29)$$

CQFD.

Dans la plupart des problèmes géodynamiques l'accélération est négligeable. L'équilibre des contraintes s'écrit alors :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = -\rho g_i \quad (3.30)$$

soit, sous forme explicite :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} &= \rho g_z \\ \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (3.31)$$

Cette équation fondamentale dit que les forces aux limites exercées sur un volume de roche sont équilibrés par les forces de volume. Elle constitue la base de la géodynamique de la lithosphère continentale.

Utilisons la conservation du moment cinétique pour déterminer l'ordre de grandeur de $m\vec{a}$. Le moment cinétique L en un point de vecteur position \vec{r} par rapport à l'origine est donné par :

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p} \quad (3.32)$$

Par exemple, lors de la collision entre deux plaques si l'une des deux ralentit, alors son moment cinétique diminue. Le moment cinétique de ce système de deux plaques étant constant, cette diminution de moment est "transférée" à l'autre plaque. Ce transfert de moment cinétique se réalise par une force (en toute rigueur un moment de force $\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F}$) dont la magnitude est donnée par le théorème du moment cinétique :

$$M = \frac{\Delta L}{\Delta t} \quad (3.33)$$

ΔL = variation de moment cinétique ($\text{kg m}^2 \text{s}^{-1}$) et Δt = temps écoulé durant la variation du moment cinétique (s).

Application numérique : considérons la collision entre la plaque indo-australienne et l'Eurasie et simplifions le problème à une translation de la plaque indo-australienne, donc à la conservation de la quantité de mouvement (équivalent du moment cinétique utilisé dans le cas général d'une rotation). La surface de la plaque indo-australienne est $5 \times 10^6 \text{ km}^2$, son épaisseur 100 km, sa densité moyenne 3000 kg/m^3 , donc sa masse totale est $1.5 \times 10^{21} \text{ kg}$. Prenons une vitesse initiale de 0.1 m/an soit $3.2 \times 10^{-9} \text{ m/s}$. On a donc $L = 4.7 \times 10^{12} \text{ kg/m/s}$. Arrêter la plaque en un million d'années développe une force :

$$F = \frac{4.7 \times 10^{12}}{3.15 \times 10^{13}} = 0.15 \text{ N} \quad (3.34)$$

Pour une longueur de contact de collision de 5000 km, la force par unité de longueur est de 3×10^{-8} N/m. Cette force est très faible, négligeable par rapport aux forces de la tectonique des plaques qui sont de l'ordre de 10^{12} N/m. Il faudrait que la plaque soit ralentie en une fraction de seconde pour que la force résultante soit significative. Par conséquent, les variations du moment cinétique des plaques sont sans effet sur la tectonique et leurs accélérations peuvent être négligées.

On peut généraliser et écrire que dans le cas de la tectonique des plaques instantanée :

$$\sum \vec{F}_r \sim \vec{0} \quad (3.35)$$

3.3 Équilibre hydrostatique

3.3.1 Définition

Considérons un prisme de roche vertical, de densité homogène, de section δA et de longueur z , comme schématisé sur la Figure 3.4. Le poids de ce prisme est :

$$F_v = \rho g z \delta A \quad (3.36)$$

Pour que ce prisme soit au repos, cette force doit être équilibrée par une force verticale vers le haut exercée sur la base du prisme. Cette force s'écrit :

$$F_s = \sigma_{zz} \delta A \quad (3.37)$$

et la condition d'équilibre :

$$F_v = -F_s \implies \sigma_{zz} = \rho g z \quad (3.38)$$

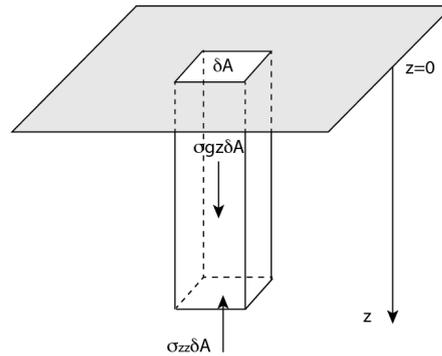


FIGURE 3.4 – Equilibre des forces verticales de volume et de surface pour un prisme de section δA .

Même idée, autre approche : la force verticale exercée par un cube unitaire de roche est :

$$F = \rho g \quad (3.39)$$

De fait, la force verticale exercée par une colonne de roche d'épaisseur z par m^2 (= contrainte normale σ_{zz}) est l'intégrale sur l'épaisseur de la colonne, soit :

$$\sigma_{zz} = \int_0^z \rho g dz \quad (3.40)$$

Pour une colonne de densité uniforme, on a donc :

$$\sigma_{zz} = \rho g z \quad (3.41)$$

On voit donc que la force par unité de surface sur des plans horizontaux augmente linéairement avec la profondeur. La contrainte normale causée par le poids des roches s'appelle la contrainte (ou pression) lithostatique.

Une dernière façon de raisonner, plus complète, est de partir de l'équation d'équilibre dynamique et de faire l'hypothèse simplificatrice que les contraintes cisailantes s'exerçant sur des plans verticaux est nulle. En d'autres termes, le poids des colonnes de lithosphère est soutenu uniquement par une traction à leur base, pas par les contraintes de cisaillement le long de ses bords verticaux. Ceci est justifiable si la dimension horizontale des objets étudiés est très grande par rapport à leur dimension verticale – par exemple un plateau de 500, 1000 ou 2000 km de largeur tels le Colorado, le Tibet ou le Sud de l'Afrique dont les croûtes ont 40-70 km d'épaisseur. On a alors :

$$\sigma_{xz} = \sigma_{zx} = \sigma_{zy} = \sigma_{yz} \approx 0 \quad (3.42)$$

L'équation d'équilibre des forces dans la direction verticale devient alors :

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \rho g \quad (3.43)$$

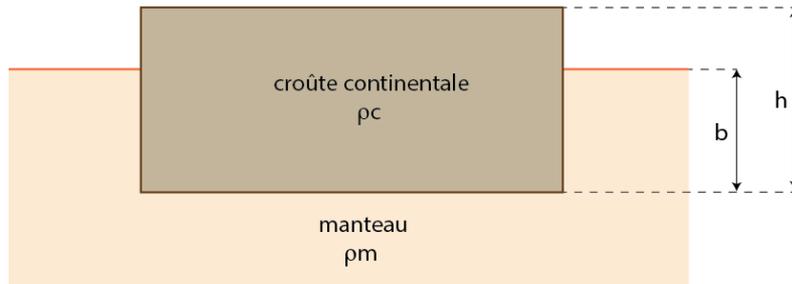


FIGURE 3.5 – Equilibre isostatique dans le cas d'un bloc continental qui "flotte" sur le manteau.

Considérons le cas d'un bloc de croûte continentale de densité $\rho_c = 2700 \text{ km/m}^3$ inclus dans un manteau de densité $\rho_m = 3300 \text{ km/m}^3$ (Figure 3.5). La croûte continentale flotte sur le manteau en vertu du principe d'Archimède = la force exercée sur la croûte continentale est égale au poids du manteau déplacé. La contrainte normale à la base de la croûte continentale est :

$$\sigma_{zz} = \rho_c g h \quad (3.44)$$

et la contrainte normale correspondant au poids du manteau déplacé est :

$$\sigma_{zz} = \rho_m g b \quad (3.45)$$

Le principe d'Archimède, encore appelé "équilibre hydrostatique", implique donc que :

$$\rho_c h = \rho_m b \quad (3.46)$$

On peut donc déterminer la hauteur du continent par rapport au manteau $h - b$:

$$h - b = h - \frac{\rho_c}{\rho_m} h = h \left(1 - \frac{\rho_c}{\rho_m} \right) \quad (3.47)$$

Pour une croûte continentale moyenne $h = 35$ km, donc $h - b = 5.8$ km.

Quand on l'applique à la croûte continentale, l'équilibre hydrostatique s'appelle "isostasie". Il implique que le relief continental est maintenu en place uniquement par les contraintes normales exercées par le manteau au repos sur la base de la croûte. Dans ce cas de figure, les contraintes de cisaillement sur des plans verticaux, la résistance élastique de la croûte et les contraintes exercées par le manteau en mouvement sont négligés. Dans la réalité ces trois processus contribuent aussi à créer et maintenir les reliefs. On constate cependant que l'isostasie seule permet d'expliquer une grande partie des reliefs continentaux de grande échelle.

Si le poids exercé par la croûte continentale change, par exemple sous l'effet de l'érosion ou de variations thermiques, alors le manteau sous-jacent répond en se déformant par fluage solide jusqu'à ce que le système ait retrouvé son équilibre isostatique : c'est le "réajustement isostatique". Ce réajustement s'opère grâce à des mouvements de matière dans le manteau.

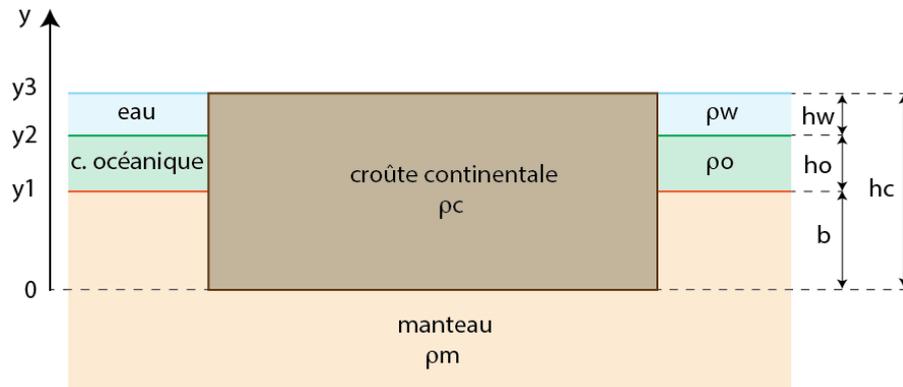


FIGURE 3.6 – Équilibre isostatique entre une croûte continentale et un bassin océanique.

Un cas plus réaliste (Figure 3.6) est celui d'une marge passive qui juxtapose une croûte continentale ($h_c = 35$ km, $\rho_c = 2800$ kg/m³) à une croûte océanique ($h_o = 6$ km, $\rho_o = 2900$ kg/m³) surmontée d'un océan ($h_w, \rho_w = 1000$ kg/m³). On fait l'hypothèse simplificatrice que le continent a une élévation nulle par

rapport au niveau de la mer. On écrit le principe d'isostasie à la base de la croûte continentale :

$$\rho_c h_c = \rho_w h_w + \rho_o h_o + \rho_m (h_c - h_o - h_w) \quad (3.48)$$

On peut donc calculer le dénivelé continent-plancher océanique :

$$h_w = \frac{\rho_m - \rho_c}{\rho_m - \rho_w} h_c - \frac{\rho_m - \rho_o}{\rho_m - \rho_w} h_o \quad (3.49)$$

soit $h_w = 6.6$ km.

Notons au passage que la condition d'isostasie peut s'écrire sous la forme d'une intégrale, que nous reverrons plus tard. Par exemple, dans le cas précédent d'une colonne de croûte continentale en équilibre isostatique avec une superposition manteau – croûte océanique – eau (Figure 3.6), on écrit :

$$\begin{aligned} \rho_c y_1 + \rho_c (y_2 - y_1) + \rho_c (y_3 - y_2) &= \rho_m y_1 + \rho_o (y_2 - y_1) + \rho_w (y_3 - y_2) \\ \implies (\rho_c - \rho_m) y_1 + (\rho_c - \rho_o) (y_2 - y_1) + (\rho_c - \rho_w) (y_3 - y_2) &= 0 \\ \implies \sum_{i=1}^3 \Delta \rho_i (y_{i+1} - y_i) &= 0 \end{aligned} \quad (3.50)$$

De fait, si ρ varie de manière continue avec la profondeur, la condition d'isostasie s'écrit :

$$\int_0^h \Delta \rho(y) dy = 0 \quad (3.51)$$

Considérons maintenant le cas d'un rift continental et imaginons qu'il se forme par l'étirement de la croûte continentale sous l'effet de forces tectoniques (Figure 3.7). Il en résulte un amincissement local de la croûte continentale. L'isostasie implique alors que cette croûte amincie se trouve plus bas que la croûte continentale normale : elle subside pour atteindre sa profondeur d'équilibre. Cette subsidence crée donc un bassin dans lequel des sédiments issus de l'érosion de la croûte continentale alentour vont s'accumuler pour former un "bassin sédimentaire".

Considérons une largeur initiale w_o de croûte continentale étirée jusqu'à une largeur finale w_b . Le facteur d'étirement α est :

$$\alpha = \frac{w_b}{w_o} \quad (3.52)$$

La conservation du volume de roche étiré implique que :

$$w_b h_b = w_o h_c \quad (3.53)$$

On combine ces deux équations pour trouver :

$$h_c = \alpha h_b \quad (3.54)$$

On écrit le principe d'isostasie à la base de la croûte continentale :

$$\rho_c h_c = \rho_s h_s + \rho_c h_b + \rho_m (h_c - h_s - h_b) \quad (3.55)$$

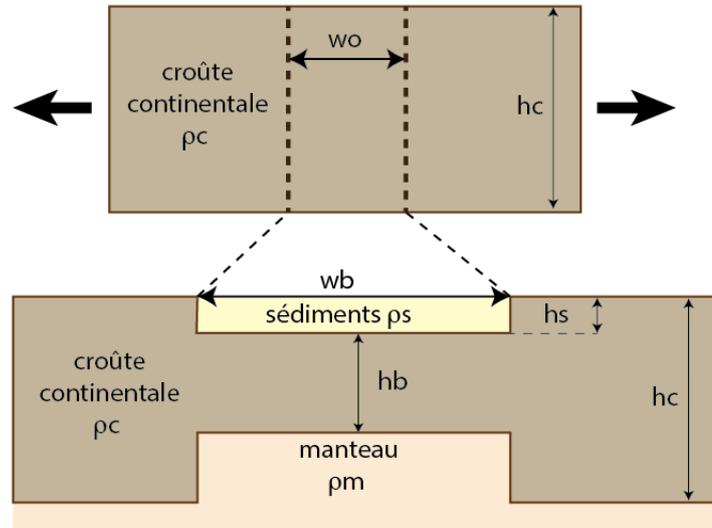


FIGURE 3.7 – Extension d’une croûte continentale et formation d’un bassin sédimentaire en condition d’isostasie. Une largeur de croûte initialement w_o est étiré d’un facteur α pour atteindre une largeur finale w_b .

Et on détermine la profondeur du bassin sédimentaire h_s :

$$h_s = h_c \left(\frac{\rho_m - \rho_c}{\rho_m - \rho_s} \right) \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) \quad (3.56)$$

La profondeur du bassin sédimentaire dépend donc du facteur d’étirement, qui augmente avec le temps. Utilisons $h_c = 35$ km, $\rho_m = 3300$ kg/m³, $\rho_c = 2800$ kg/m³, $\rho_s = 2500$ kg/m³. La figure 3.8 montre l’évolution de la profondeur du bassin en fonction du facteur d’étirement α , qui croît avec le temps. La profondeur du bassin tend vers un maximum de 22 km quand α tend vers l’infini.

Cet exemple est bien sûr très simplifié – que lui manque-t-il d’important pour qu’il se rapproche de la réalité ?

3.3.2 Pratt versus Airy

Dans les années 1850, deux théories s’opposaient pour expliquer d’une part l’élévation des montagnes, d’autre part le fait que l’anomalie de pesanteur associée à leur évident excès de masse – leur topographie – n’était pas aussi importante qu’attendue. L’histoire retient généralement que cette dernière observation fut réalisée par Sir George Everest en 18XX, alors géomètre général des Indes, lors d’observations gravimétriques au sud de l’Himalaya. Le français Pierre Bouguer avait réalisé la même observation sur les Andes en 18XX. Airy et Pratt proposèrent deux explications différentes à ces observations. Ils s’accordaient sur le fait que celles-ci devaient se trouver en état d’équilibre hydrostatique – l’isostasie – et que leur élévation étaient proportionnelle au contraste de densité entre

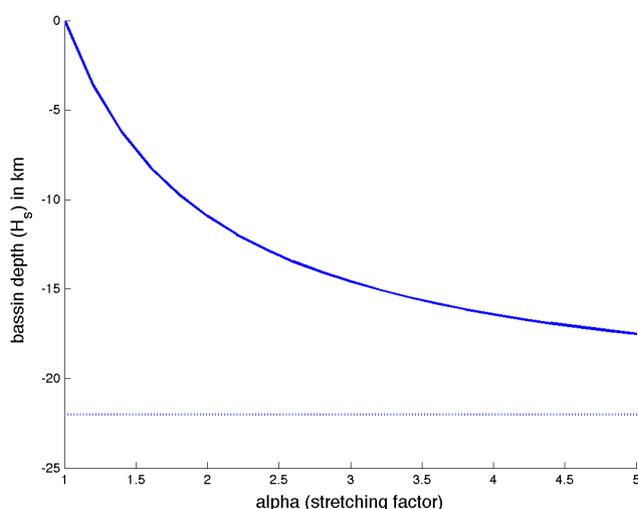


FIGURE 3.8 – Profondeur d’un bassin sédimentaire simplifié en régime d’extension continentale en fonction du facteur d’étirement α , qui croît avec le temps.

la croûte et le manteau. Ils étaient cependant en désaccord sur la manière dont ce contraste de densité s’exprimait.

John Henry Pratt, mathématicien anglais et missionnaire anglican en Inde, avait observé que les boucliers protérozoïques de faible élévation étaient formés de roches métamorphiques de haut grade et de forte densité, tandis que les ceintures orogéniques plus récentes qui les encadrent étaient constituées de roches métamorphiques de bas grade et de roches sédimentaire de plus faible densité. Il conclut en 1854 que les différences d’élévations observées étaient dues à des variations latérales de densité au sein de la croûte, dont la base restait donc à une profondeur constante.

Sir George Biddell Airy, mathématicien et astronome anglais, pensait au contraire que la densité moyenne de la croûte variait peu latéralement et qu’il fallait invoquer des variations de profondeur du Moho pour expliquer l’élévation des chaînes de montagne. Dans une publication de 1855, il écrit *“It appears to me that the state of the earth’s crust lying upon the lava may be compared with perfect correctness to the state of a raft of timber floating upon water; in which, if we remark one log whose upper surface floats much higher than the upper surfaces of the others, we are certain that its lower surface lies deeper in the water than the lower surfaces of the others”*.

Les observations plus récentes de la profondeur du Moho, notamment à partir d’observations sismologiques, donnent raison à Airy – en général – sur les continents. Elles montrent que la profondeur du Moho augmente sous les chaînes de montagne. Dans les océans, on observe que la profondeur du Moho varie peu et que les variations de bathymétrie doivent plus aux variations latérale de densité de la croûte – en relation avec son âge – comme le proposait Pratt. Nous reviendrons plus loin sur ce cas qui relève de l’isostasie thermique.

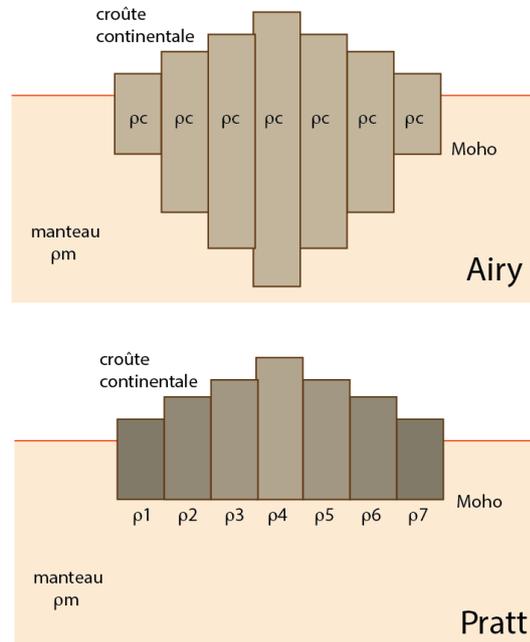


FIGURE 3.9 – Comparaison des interprétations de Pratt et d’Airy pour expliquer la topographie des montagnes et les anomalies de pesanteur associées. Pour l’hypothèse de Pratt, les densités diminuent des zones externes vers les zones internes. Pour celle d’Airy, c’est la profondeur du Moho qui varie, tandis que la densité de la croûte continentale ne varie pas latéralement.

Deux points importants sont à noter concernant ces deux théories de l’isostasie :

1. Toutes deux font l’hypothèse que la densité du manteau est constante et ne varie pas latéralement. En réalité, rien ne le garantit.
2. Toutes deux impliquent l’absence de contraintes cisailantes le long des plans verticaux qui séparent les colonnes de croûte ou de lithosphère adjacentes.

Discutons ces deux points.

3.3.3 Forces horizontales résultantes

Considérons un état de contrainte dit “de référence” tel que :

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} \quad (3.57)$$

Cela correspond à une contrainte isotrope dans un milieu où les contraintes de cisaillement sont nulles, le déviateur des contraintes est donc nul. C’est par exemple le cas dans un fluide au repos. On peut considérer que c’est aussi le cas de solides suffisamment peu résistants pour être capables de fluer : les roches sur des échelles de temps géologiques. On a bien sûr :

$$\sigma_{zz} = \rho g z \quad (3.58)$$

Cet état de contraintes de référence s'appelle "état lithostatique".

Examinons le cas simple abordé ci-dessus où un bloc de croûte continentale "flotte" sur du manteau. Isolons (par la pensée) un volume de croûte continentale juste au contact avec le manteau. Le manteau exerce une force horizontale F_m sur ce volume de croûte continentale attenante dont la magnitude est :

$$F_m = \int_0^b \sigma_{zz} dz = \int_0^b \rho_m g z dz = \rho_m g \int_0^b z dz = \frac{1}{2} \rho_m g b^2 \quad (3.59)$$

où F_m est en unité de force par unité de longueur (N/m) et on suppose ρ constant.

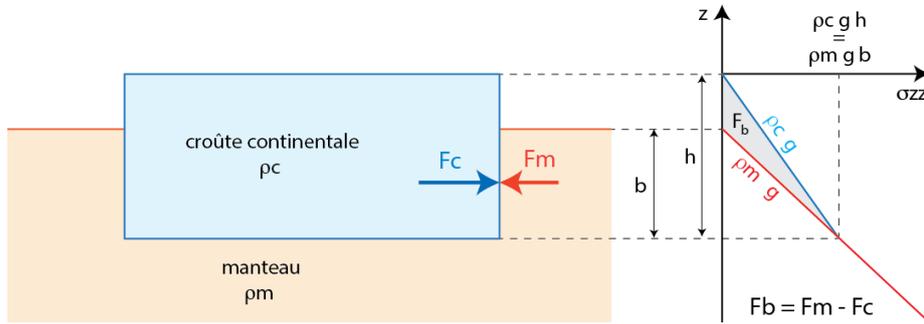


FIGURE 3.10 – Forces horizontales exercées par le manteau F_m et la croûte continentale F_b sur un plan vertical à leur contact. F_m est aussi l'aire du triangle sous la droite de pente $\rho_m g$ et F_c l'aire du triangle sous la droite de pente $\rho_c g$. La force résultante, F_b , correspond au triangle grisé. En toute rigueur ces forces sont des "forces par unité de longueur", comme il deviendra clair dans la section suivante. On note au passage que, par définition de l'isostasie, la contrainte verticale σ_{zz} est identique pour les colonnes de croûte et de manteau à la profondeur de compensation.

Représentons graphiquement (Figure 3.64) la contrainte $\sigma_{xx} = \sigma_{zz}$ en fonction de la profondeur z . La relation, donnée par l'équation 3.45, est linéaire, avec une pente qui vaut $\rho_m g$. La force horizontale résultante – l'intégrale de la contrainte en fonction de la profondeur, cf. équation 3.59 – est donc l'aire sous cette pente. La surface de ce triangle se détermine graphiquement de manière triviale :

$$F_m = \frac{1}{2} (b \times \rho_m g b) = \frac{1}{2} \rho_m g b^2 \quad (3.60)$$

La croûte continentale exerce elle-même une force par unité de longueur F_c sur une section de croûte continentale adjacente. La question est de savoir si la résultante $F_b = F_m - F_c$ est nulle – auquel cas le système modélisé ne génère pas de force horizontale – ou si elle est non-nulle.

La force horizontale F_c (par unité de longueur) est l'intégrale des contraintes normales le long du contact entre les deux blocs de croûte :

$$F_c = \int_0^h \sigma_{zz} dz = \int_0^h \rho_c g z dz = \frac{1}{2} \rho_c g h^2 \quad (3.61)$$

La résultante est :

$$F_b = F_m - F_c = \frac{1}{2}\rho_m g b^2 - \frac{1}{2}\rho_c g h^2 \quad (3.62)$$

que l'on simplifie en posant que l'isostasie s'applique, soit :

$$\rho_c h = \rho_m b \quad (3.63)$$

pour obtenir :

$$F_b = -\frac{1}{2}\rho_c g h^2 \left(1 - \frac{\rho_c}{\rho_m}\right) \quad (3.64)$$

Revenons au graphique précédent (Figure 3.64) et plaçons-y la droite qui décrit l'évolution de σ_{zz} avec la profondeur pour la croûte, droite de pente $\rho_c g$ cette fois. La résultante des forces horizontales exercées par le manteau est la croûte se visualise graphiquement comme le triangle hachuré. On note sur ce graphique que $F_c > F_m$, comme l'indique aussi l'équation 3.64.

On constate que l'équilibre hydrostatique s'accompagne une force horizontale entre le plateau et le manteau encaissant. L'application numérique pour $h = 35$ km, $\rho_m = 3300$ kg/m³, $\rho_c = 2750$ kg/m³ donne $F_b = 2.75 \times 10^{12}$ N/m. Intégrée sur une lithosphère de 100 km d'épaisseur, cette force par unité de longueur correspond à une contrainte déviatorique $\Delta\sigma_{xx} = 27.5$ MPa (1 Pa = 1 N/m²). Les valeurs typiques des contraintes déviatoriques dans les continents sont de 10–100 MPa.

La force F_b est ici une tension s'exerçant sur le plan vertical qui borde la croûte continentale, où sur des plans verticaux à l'intérieur de celle-ci. Elle est équilibrée par une force de compression $-F_b$ qui s'exerce aux contacts entre le plateau et son encaissant. L'isostasie n'implique donc pas que les forces horizontales exercées par une colonne de lithosphère sur sa voisine soient nulles. Par ailleurs, le signe de ces forces implique que la plateau est soumis à de l'extension tandis que la bordure océanique est, elle, soumise à de la compression.

3.3.4 Énergie potentielle de gravité

L'énergie potentielle de gravité est l'énergie que possède un objet du fait de sa position dans le champ de gravité terrestre. C'est donc aussi le travail à mettre en oeuvre pour déplacer cet objet d'une position de référence à sa position z dans le champ de gravité. De manière générale on a donc :

$$U = - \int_{ref}^z \vec{F} d\vec{z} \quad (3.65)$$

Dans notre cas la force en question par unité de surface, à une profondeur donnée z , est :

$$\sigma_{zz} = \int_{ref}^z \rho(z) g dz \quad (3.66)$$

Nous choisissons la surface $z = 0$ comme référence. On a donc :

$$U = \int_0^z \sigma_{zz} dz = \int_0^z \int_0^z \rho(z) g dz dz = \int_0^z \rho(z) g z dz \quad (3.67)$$

Soit, pour une colonne de roche de section unitaire et de densité uniforme :

$$U = \frac{1}{2} \rho g z^2 \quad (3.68)$$

On note que U a la dimension de kg s^{-2} . Une force mécanique ayant la dimension de kg m s^{-2} , U a la dimension d'une force par unité de longueur. On exprimera donc U et cette force en unité de N/m .

On retrouve donc ce que nous avons écrit dans la section précédente en terme de forces – qui étaient en toute rigueur des forces par unité de longueur. La représentation graphique de σ_{zz} en fonction de la profondeur z montre donc que, pour une colonne de roche de densité ρ uniforme, σ_{zz} augmente linéairement avec la profondeur selon une pente qui vaut ρg . L'aire sous cette droite, l'intégrale de ρg selon z , est l'énergie potentielle de gravité de cette colonne de roches.

Puisque $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz}$, la différence d'énergie potentielle de gravité entre deux colonnes A et B de roche de densité ρ_A et ρ_B donne la force horizontale (par unité de longueur) qu'elles exercent l'une sur l'autre :

$$\Delta U = F = \int_0^z \int_0^z \rho_A(z) g dz dz - \int_0^z \int_0^z \rho_B(z) g dz dz \quad (3.69)$$

Si ces deux colonnes de roches ont la même énergie potentielle de gravité la force résultante est nulle. Dans le cas inverse il existe une force résiduelle exercée par la colonne de haut potentiel vers celle de bas potentiel. Cette force est appelée "force de volume" ou "force gravitationnelle". Elle a la dimension d'une force par unité de longueur.

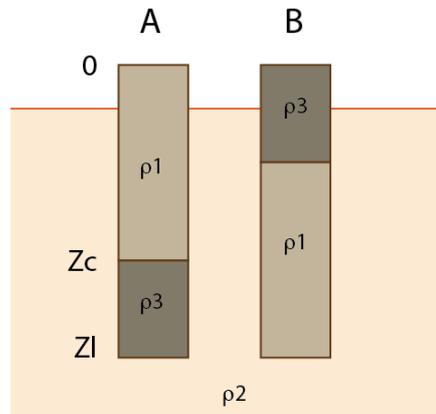


FIGURE 3.11 – Deux colonnes de lithosphère à l'équilibre isostatique avec deux niveaux de densité ρ_1 et ρ_3 séparés par le Moho. On a $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$. L'élévation des deux colonnes est la même car elles ont le même poids, mais leur énergie potentielle est différente, avec $E_{PB} > E_{PA}$.

On voit aussi que U dépend de la profondeur considérée z ainsi que de la distribution de densité en fonction de la profondeur. Si la densité est une fonction continue de la profondeur, alors l'équation 3.69 s'intègre facilement. S'il y a une discontinuité, comme par exemple le Moho, il faut séparer l'intégrale. Prenons

l'exemple d'une colonne A avec deux niveaux de densité ρ_1 et ρ_3 séparés, par exemple, par le Moho (figure 3.11). On a :

$$\begin{aligned}
 \int_0^{z_L} \int_0^{z_L} \rho_A(z) g dz dz &= \int_0^{z_c} \sigma_{zz} dz + \int_{z_c}^{z_L} \sigma_{zz} dz \\
 &= \int_0^{z_c} \rho_1 g z dz + \int_{z_c}^{z_L} [\rho_1 g z_c + \rho_3 (z - z_c)] dz \\
 &= \frac{\rho_1 g z^2}{2} \Big|_0^{z_c} + \rho_1 g z_c z \Big|_{z_c}^{z_L} + \frac{\rho_3 g z^2}{2} \Big|_{z_c}^{z_L} - \rho_3 g z_c z \Big|_{z_c}^{z_L}
 \end{aligned} \tag{3.70}$$

Notons dans le cas de la figure 3.11 que les deux colonnes A et B, de même épaisseur, sont à la même élévation car elles ont le même poids : l'épaisseur des matériaux de densité ρ_1 et ρ_3 est la même dans les deux cas. Par contre, la colonne B a une énergie potentielle supérieure à la colonne A du fait de la distribution différente des densités en fonction de la profondeur, avec une section de densité ρ_3 en surface pour la colonne B, en profondeur pour la colonne A. De fait, ces deux colonnes en équilibre isostatique de même épaisseur et de même élévation, mais avec une distribution inverse des densités, exercent une force résultante non nulle l'une sur l'autre.

On retient que des forces horizontales dans la lithosphère se développent en fonction des gradients horizontaux d'énergie potentielle. Ce concept est fondamental pour la géodynamique de la lithosphère. Ces forces de volume dépendent (1) de l'épaisseur crustale – ou en tous cas jusqu'à la profondeur de compensation choisie – et (2) de la distribution latérale de densité.

3.3.5 Application

Considérons une montagne ou un plateau de haute élévation et son avant-pays (figure 3.12) et appliquons le raisonnement de Molnar et Lyon-Caen (1988). En l'absence de forces aux limites externes qui seraient exercées sur les bords du système, quelle est la force horizontale générée au contact entre ces deux domaines ?

On voit déjà sur la figure 3.12 que la partie hachurée correspondant à un plateau de croûte continentale d'épaisseur Z_c n'intervient pas dans cette différence. La même chose est vraie pour le manteau situé sous la racine crustale (au-delà de $H + Z_c + W$).

Plaçons arbitrairement le zéro au niveau de la surface de l'avant-pays, avec z positif vers le bas. L'énergie potentielle de gravité d'une colonne de roche de l'avant-pays, de section unitaire, est :

$$E_P^{foreland} = \int_0^{Z_c} \sigma_{zz} dz + \int_{Z_c}^{Z_c+W} \sigma_{zz} dz \tag{3.71}$$

et pour une colonne de roche du plateau :

$$E_P^{range} = \int_0^{Z_c} \sigma_{zz} dz + \int_H^0 \sigma_{zz} dz + \int_{Z_c}^{Z_c+W} \sigma_{zz} dz \tag{3.72}$$

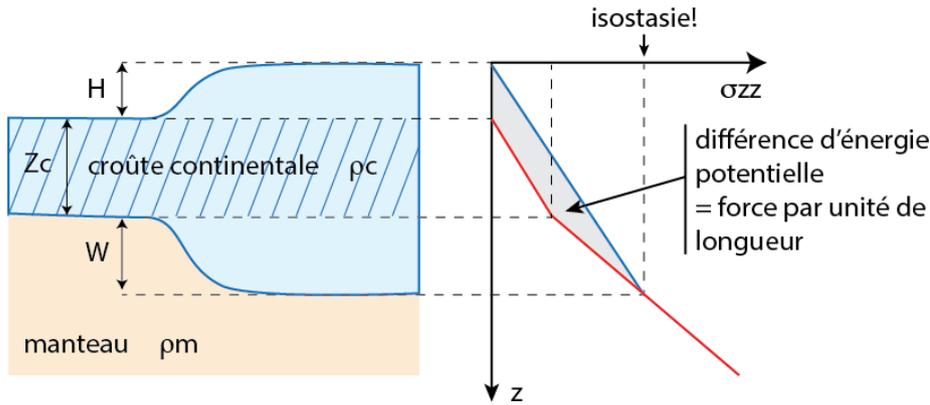


FIGURE 3.12 –

Notons que pour respecter le zéro choisi on doit écrire l'intégrale de H à zéro et non l'inverse.

La première intégrale de 0 à Z_c est la même dans les deux équations, mais pas dans la dernière Z_c à $Z_c + W$ car elle concerne de la croûte continentale dans un cas, du manteau dans l'autre.

Le gradient horizontal d'énergie potentielle – dans ce cas une simple différence entre nos deux colonnes de roches – donne la force horizontale résultante par unité de longueur :

$$\begin{aligned}
 F_b &= \Delta E_P = E_P^{foreland} - E_P^{range} \\
 &= \int_{Z_c}^{Z_c+W} \rho_m g z dz - \int_H^0 \rho_c g z dz - \int_{Z_c}^{Z_c+W} \rho_c g z dz \\
 &= \frac{1}{2} (\rho_m - \rho_c) g z^2 \Big|_{Z_c}^{Z_c+W} - \frac{1}{2} \rho_c g z^2 \Big|_H^0 \\
 &= \frac{1}{2} \Delta \rho g \left[(Z_c + W)^2 - Z_c^2 \right] + \frac{1}{2} \rho_c g H^2 \\
 &= \frac{1}{2} \rho_c g H^2 + \Delta \rho g Z_c W + \frac{1}{2} \Delta \rho g W^2
 \end{aligned} \tag{3.73}$$

Avec $\Delta \rho = \rho_m - \rho_c$.

Faisons l'hypothèse que le système considéré est à l'équilibre isostatique. On peut alors écrire que :

$$\rho_c H = \Delta \rho W \tag{3.74}$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
 F_b &= \frac{1}{2} \rho_c g H^2 + \rho_c g H Z_c + \frac{1}{2} \rho_c g H W \\
 &= \rho_c g H \left(\frac{H}{2} + Z_c + \frac{W}{2} \right)
 \end{aligned} \tag{3.75}$$

Le cas du Tibet (Figure 3.13) illustre l'existence de ces forces horizontales générées par les gradients horizontaux d'énergie potentielle de gravité. Le Tibet est

un plateau continental de 5 km d'élévation moyenne dont l'épaisseur crustale est d'environ 70 km. Il est sismiquement actif – il se déforme donc – comme le montre la sismicité au sein du plateau, ainsi que le long de ses bordures. Les mécanismes au foyer indiquent (1) une déformation extensive (extension \approx est-ouest) au coeur du plateau, notamment dans ses régions les plus hautes, et (2) une déformation compressive le long de ses bordures dans une direction perpendiculaires a ces bordures.

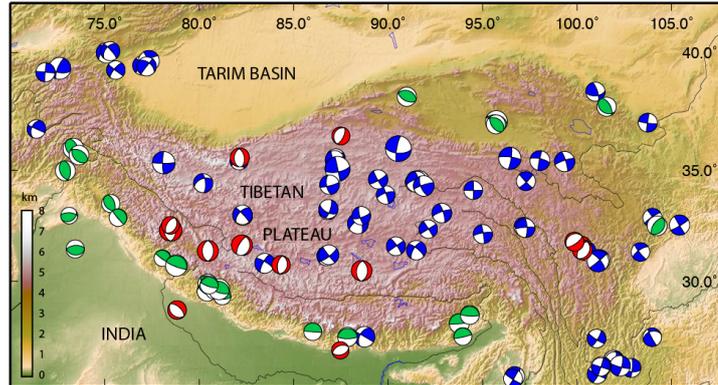


FIGURE 3.13 – Mécanismes au foyer des principaux séismes instrumentaux au Tibet et régions adjacentes (données reprises de Copley et al., 2011).

L'élévation moyenne du plateau tibétain est $H = 5$ km. Dans l'hypothèse isostatique et avec $\rho_c = 2800 \text{ kg/m}^{-3}$ et $\rho_m = 3300 \text{ kg/m}^{-3}$, on obtient une épaisseur de la racine crustale $W = 28$ km. Pour une épaisseur crustale totale de 70 km, on a donc $Z_c = 37$ km. On calcule donc que $F_b = 7.5 \times 10^{12} \text{ N/m}$. Cette valeur est comparable à la force de traction exercée par les slabs de lithosphère océanique, ou à la "poussée à la ride" aux dorsales d'accrétion océaniques.

Cette observation a conduit P. Molnar, P. England et G. Houseman, dans les années 1980, à expliquer les déformations intracontinentales en Asie comme l'équilibre dynamique entre forces de volume – essentiellement dues au Tibet – et forces aux limites – essentiellement dues à la collision himalayenne – agissant sur une lithosphère se comportant comme un fluide visqueux.

3.3.6 Effet de la température

Nous allons maintenant considérer, de manière isolée des effets précédents (c'est-à-dire sans variation de densité liée au type de matériau), celui de la température T qui provoque une expansion ou contraction des roches, donc des variations de leur densité. Considérons par exemple des roches mantelliques. La relation entre densité et température dépend du coefficient d'expansion thermique α , qui vaut environ $3 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ pour la plupart des roches, selon la loi suivante :

$$\begin{aligned} \rho_c(T) &= \rho_c [1 + \alpha (T_l - T)] \quad \text{dans la croûte} \\ \rho_m(T) &= \rho_m [1 + \alpha (T_l - T)] \quad \text{dans le manteau} \end{aligned} \quad (3.76)$$

TABLE DES MATIÈRES

où T_l est la température à la base de la lithosphère ($T_l = 1200^\circ\text{C}$), à la profondeur $z = Z_l$. À cette profondeur, la densité des roches du manteau est $\rho_m = 3200 \text{ kg/m}^3$. On fera dans la suite l'approximation simplificatrice que $\rho_c \approx \rho_m$ dans le second terme de la partie droite de ces équations (terme en α); l'erreur introduite est faible car α est petit.

On choisit $T_s = 0$, valeur raisonnable et qui permettra de simplifier les expressions ci-dessous. De fait, la densité du manteau ρ_0 à la surface de la lithosphère (où $z = 0$ et $T = T_s$) est donnée par :

$$\rho_0 = \rho_m (1 + \alpha T_l) = 3300 \text{ kg/m}^3 \quad (3.77)$$

Supposons un géotherme (= variation de la température en fonction de la profondeur) linéaire et une lithosphère de température constante à sa base (T_l) et à son sommet (T_s). La densité moyenne $\bar{\rho}$ d'une colonne de manteau entre T_l et T_s s'écrit alors simplement, puisque la température varie linéairement :

$$\begin{aligned} \bar{\rho} &= \frac{\rho_m(T_l) + \rho_m(T_s)}{2} \\ &= \frac{\rho_m + \rho_m(1 + \alpha(T_l - T_s))}{2} \\ &= \rho_m \left(1 + \alpha \frac{T_l - T_s}{2} \right) \end{aligned} \quad (3.78)$$

L'approximation ci-dessus d'un géotherme linéaire n'est pas exactement valide dans la réalité, car la production de chaleur radiogénique dans la croûte n'est pas constante en fonction de la profondeur et il y a une (faible) production de chaleur radiogénique dans le manteau.

D'après l'expression de $\bar{\rho}$ dérivée ci-dessus, on s'attend à une flottabilité négative de lithosphère de densité $\bar{\rho}$ par rapport à celle de densité ρ_m car $\bar{\rho} > \rho_m$ dans l'équation ci-dessus. En d'autres termes, une lithosphère qui se refroidit devient plus dense, donc sa flottabilité diminue. On dessine donc la Figure 3.14 de manière à prendre ce comportement en compte.

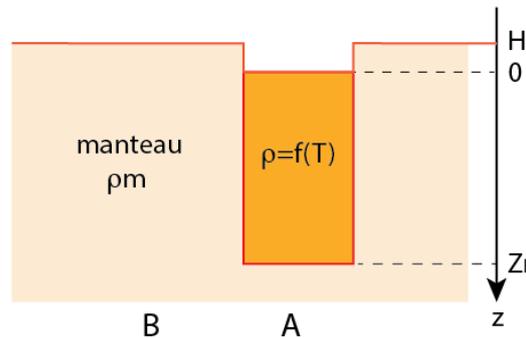


FIGURE 3.14 – Isostasie thermique. La colonne B est “normale”, de densité constante ρ_m . La colonne A voit sa densité varier linéairement en fonction de la température, c'est-à-dire en fonction de la profondeur ici.

On cherche à déterminer l'élévation du relief due uniquement à l'expansion thermique (Figure 3.14). On compare donc deux colonnes, l'une "normale" (B) dont le manteau a une densité constante ρ_m et l'autre où la densité varie en fonction de la température comme déterminé ci-dessus (A). La condition d'équilibre isostatique entre ces deux colonnes s'écrit :

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{Z_l} \rho_A(z) g dz = \int_H^{Z_l} \rho_B(z) g dz \\
 \implies & \int_H^0 \rho_{air}(z) g dz + \int_0^{Z_l} \rho_A(z) g dz = \int_H^{Z_l} \rho_B(z) g dz \\
 \implies & \bar{\rho} z|_0^{Z_l} = \rho_m z|_H^{Z_l} \\
 \implies & \bar{\rho} Z_l = \rho_m (Z_l - H) \\
 \implies & \rho_m \left(1 + \alpha \frac{T_l - T_s}{2} \right) Z_l = \rho_m (Z_l - H) \\
 \implies & H = -\alpha Z_l \frac{T_l - T_s}{2} = H_{th}
 \end{aligned} \tag{3.79}$$

Notons cette hauteur H_{th} . On a bien sûr négligé la densité de l'air.

On note que $H_{th} < 0$, ce qui implique que le sommet de la colonne A se trouve bien sous celui de la colonne B . Ceci est cohérent avec l'expression dérivée plus haut pour $\bar{\rho}$, qui impliquait une flottabilité négative. Celle-ci doit se manifester par une subsidence.

On considère maintenant de manière conjointe l'effet du type de matériau et de la température sur la distribution des densités. L'équation (3.76) implique que l'on peut écrire l'élévation H d'un relief en équilibre isostatique comme la somme de la contribution du matériau H_{mat} et de la température H_{th} , puisque la densité en fonction de la température est la combinaison linéaire de la densité nominale du matériau et de l'effet de la température. La somme des deux contributions $H = H_{mat} + H_{th}$ s'écrit ($\xi = xi$) :

$$\begin{aligned}
 H &= H_{mat} + H_{th} \\
 H &= Z_c \left(\frac{\rho_m - \rho_c}{\rho_m} \right) - \alpha Z_l \frac{T_l - T_s}{2} \\
 H &= \delta Z_c + \xi Z_l
 \end{aligned} \tag{3.80}$$

Pour les valeurs standard suivantes : $\rho_m = 3300 \text{ kg/m}^3$, $\rho_c = 2800 \text{ kg/m}^3$, $\alpha = 3 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1}$, $T_s = 0^\circ\text{C}$, $T_l = 1200^\circ\text{C}$. on trouve $\delta \approx 0.16$ et $\xi \approx 0.018$. L'effet du matériau (flottabilité positive d'une croûte moins dense) est donc environ 10 fois plus important que l'effet thermique (flottabilité négative d'une roche qui se refroidit). Pour une croûte continentale d'épaisseur 35 km et une lithosphère d'épaisseur 100 km on trouve $H = 3503 \text{ m}$ et $H_{mat} = 5303 \text{ m}$. Ces deux valeurs sont très différentes. Cela indique qu'il est indispensable de prendre en compte la contribution de la température à la densité dans les problèmes d'isostasie.

La représentation graphique de H en fonction de Z_c (Figure 3.15) montre que l'effet du matériau est d'autant plus important que la croûte est épaisse. Décrivons trois cas particuliers :

3.3. ÉQUILIBRE HYDROSTATIQUE

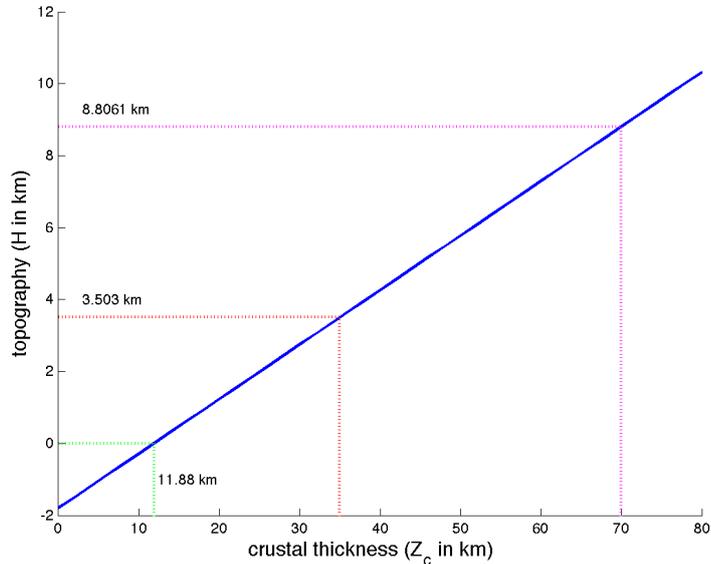


FIGURE 3.15 – Topographie en fonction de l’épaisseur crustale dans le cas où l’on combine les effets du type de matériau et de la température sur la distribution des densités. On a considéré ici une lithosphère d’épaisseur 100 km.

1. Pour $Z_c = 35$ km – cas d’une croûte continentale normale – on trouve $H = 3503$ m. Cette valeur est très proche de l’élévation des dorsales océaniques par rapport aux continents, dont la valeur d’environ 3500 m est à peu près constante sur Terre. Les dorsales océaniques représentent donc un niveau de référence pour l’équilibre hydrostatique. Ce sont en quelque sorte les “valves hydrostatiques” de la lithosphère.
2. Pour $Z_c = 70$ km – cas d’une croûte continentale sur-épaissie, comme au Tibet par exemple – on trouve $H = 8806$ m, soit une élévation $8806 - 3503 = 5303$ m par rapport à une région de croûte continentale normale. Cette valeur est proche de l’élévation moyenne observée du plateau tibétain qui est de l’ordre de 5000 m.
3. On trouve que $H = 0$ pour $Z_c = 12$ km. Cela implique que si on amincit la croûte continentale d’un facteur au moins trois, alors elle se trouve à la même élévation que le plancher océanique. Cette situation est observée sur certaines marges passives dites “hyper-étendues” comme au large de la péninsule ibérique et sur la marge conjuguée de Terre Neuve par exemple, ou sur les pourtours du Golfe de Gascogne (Figure 3.16). On y observe de la croûte continentale étirée d’un facteur 3 à 4 à la même profondeur que la croûte océanique adjacente.

3.3.7 La profondeur des océans

La lithosphère océanique consiste pour l’essentiel en un matériau asthénosphérique (manteau) refroidit pour former un manteau lithosphérique. Elle comprend

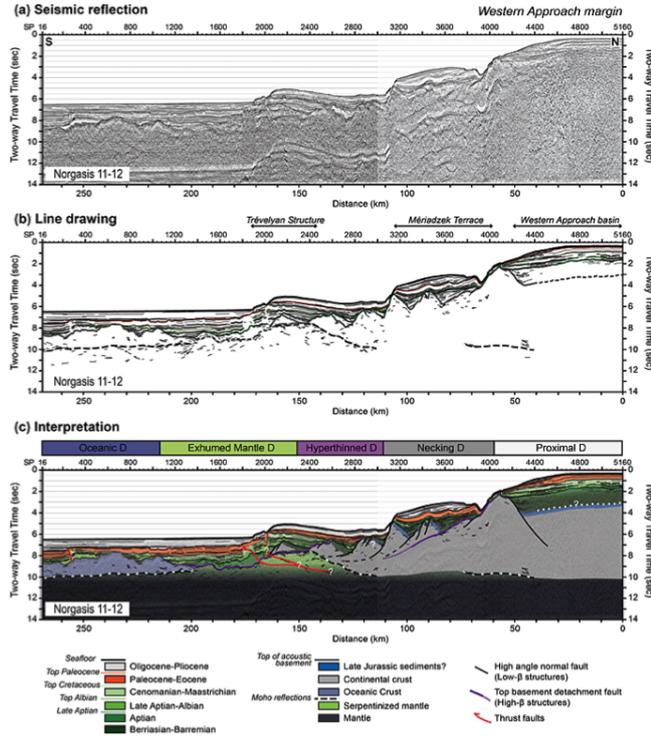


FIGURE 3.16 – Profil sismique perpendiculaire à la marge passive dans la région des Approches Ouest montrant la partie continentale hyper-étendue qui se trouve quasiment à la profondeur de la croûte océanique. Noter sur l'interprétation l'indication de manteau exhumé entre la croûte océanique et la croûte hyper-étendue. Ce type de marge passive est très peu volcanique.

une mince (7 km) couche de croûte océanique. À mesure que la lithosphère océanique s'éloigne de la dorsale, sa température moyenne diminue. Par conséquent sa densité moyenne augmente. La croûte, elle, reste inchangée ; nous ferons l'hypothèse qu'elle n'intervient pas dans ce problème.

Nous allons chercher à déterminer la profondeur du plancher océanique w par rapport à l'axe de la dorsale. Cet espace est évidemment occupé par de l'eau, de densité ρ_w . Comparons deux colonnes de lithosphère océanique, l'une en plaine abyssale, l'autre à la dorsale, comme indiqué sur la Figure 3.17.

On écrit la contrainte normale σ_{zz} à la profondeur de compensation Z_l pour la colonne A en plaine abyssale :

$$\sigma_{zz}^A|_{Z_l} = \rho_w g w + \int_0^{Z_l} \rho(z) g dz \quad (3.81)$$

De la même façon, pour la colonne B à la dorsale on écrit, par symétrie :

$$\sigma_{zz}^B|_{Z_l} = \rho_m g w + \int_0^{Z_l} \rho_m g dz \quad (3.82)$$

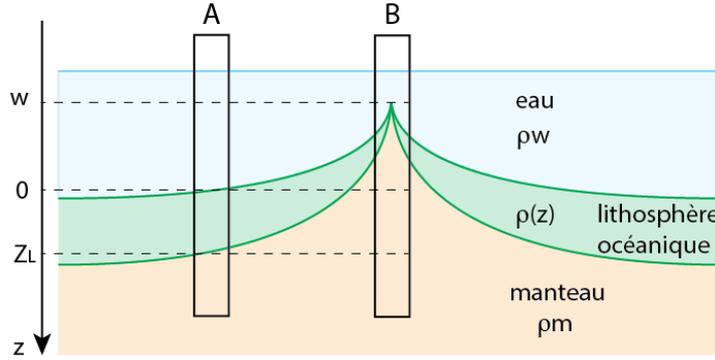


FIGURE 3.17 – Coupe simplifiée au travers d'une dorsale océanique. L'épaississement thermique de la lithosphère océanique à mesure qu'elle se refroidit de part et d'autre de la dorsale est schématisée. La croûte océanique a une épaisseur constante et ne participe pas à ce problème.

La condition d'isostasie implique que $\sigma_{zz}^A|_{Z_l} = \sigma_{zz}^B|_{Z_l}$, d'où :

$$w(\rho_m - \rho_w) = \int_0^{Z_l} (\rho(z) - \rho_m) dz \quad (3.83)$$

On observe donc que la profondeur d'eau w dépend de la structure en densité de la lithosphère océanique en fonction de la profondeur. Cette densité varie avec la température comme indiqué dans l'équation 3.76, que nous écrivons :

$$\rho(z) = \rho_m [1 + \alpha(T_l - T(z))] \quad (3.84)$$

T_l est la température à la base de la lithosphère ($T_l = 1200^\circ\text{C}$), à la profondeur $z = Z_l$. On insère cette équation dans celle définissant la condition d'isostasie pour trouver :

$$\begin{aligned} w(\rho_m - \rho_w) &= \int_0^{Z_l} [\rho_m + \alpha(T_l - T(z)) - \rho_m] dz \\ \Rightarrow w(\rho_m - \rho_w) &= \int_0^{Z_l} \alpha \rho_m (T_l - T(z)) dz \end{aligned} \quad (3.85)$$

Tous les termes de cette équation sont connus sauf $T(z)$. L'équation de la chaleur en une dimension spatiale z , en l'absence d'advection ou de production de chaleur, est :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (3.86)$$

où T est la température, z la profondeur, t le temps et κ la constante de diffusivité thermique :

$$\kappa = \frac{k}{\rho c_p} \quad (3.87)$$

où ρ est la densité du matériau, k est la conductivité thermique et c_p est la chaleur spécifique. La résolution de cette équation différentielle du second degré

nécessite deux conditions aux limites. Plaçons-nous dans le cas d'un demi-espace qui se refroidit par conduction par sa surface. Dans ce cas les conditions aux limites sont $T = T_s$ pour $z = 0$ et $T = T_l$ pour $z \rightarrow \infty$. On montre que la solution de l'équation de la chaleur est alors (voir chapitre Chaleur et Température) :

$$T = T_s + (T_l - T_s) \operatorname{erf}\left(\frac{z}{\sqrt{4\kappa t}}\right) \quad (3.88)$$

où t est le temps et erfc est la "fonction erreur" (Figure 3.18) :

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-y^2} dy \quad (3.89)$$

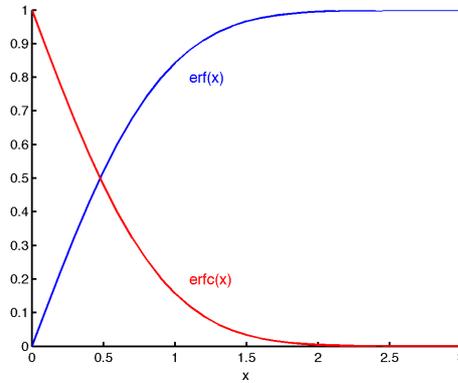


FIGURE 3.18 – La fonction erreur erf et son complémentaire erfc , tels que $\operatorname{erfc}(n) = 1 - \operatorname{erf}(n)$.

On a donc :

$$w(\rho_m - \rho_w) = \int_0^{Z_l} \alpha \rho_m \left(T_l - T_s + (T_l - T_s) \operatorname{erf}\left(\frac{z}{\sqrt{4\kappa t}}\right) \right) dz \quad (3.90)$$

qui se simplifie en se souvenant que $\operatorname{erfc}(n) = 1 - \operatorname{erf}(n)$ (Figure 3.18) :

$$w(\rho_m - \rho_w) = \int_0^{Z_l} \alpha \rho_m (T_l - T_s) \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{\sqrt{4\kappa t}}\right) dz \quad (3.91)$$

On sort les constantes de l'intégrale pour trouver :

$$w = \frac{\alpha \rho_m (T_l - T_s)}{\rho_m - \rho_w} \int_0^{Z_l} \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{\sqrt{4\kappa t}}\right) dz \quad (3.92)$$

Introduisons la variable $n = z/\sqrt{4\kappa t}$ pour écrire l'équation précédente en sortant les dernières constantes de l'intégrale :

$$w = \sqrt{4\kappa t} \frac{\alpha \rho_m (T_l - T_s)}{\rho_m - \rho_w} \int_0^{Z_l} \operatorname{erfc}(n) dn \quad (3.93)$$

TABLE DES MATIÈRES

Cette intégrale de la fonction erreur n'est pas définie entre 0 et Z_l , mais elle est connue entre 0 et ∞ comme

$$\int_0^{\infty} \operatorname{erfc}(n) \, dn = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \quad (3.94)$$

que nous utiliserons comme approximation. On a donc, *in fine* :

$$w = \frac{2\alpha\rho_m(T_l - T_s)}{\rho_m - \rho_w} \sqrt{\frac{\kappa t}{\pi}} \quad (3.95)$$

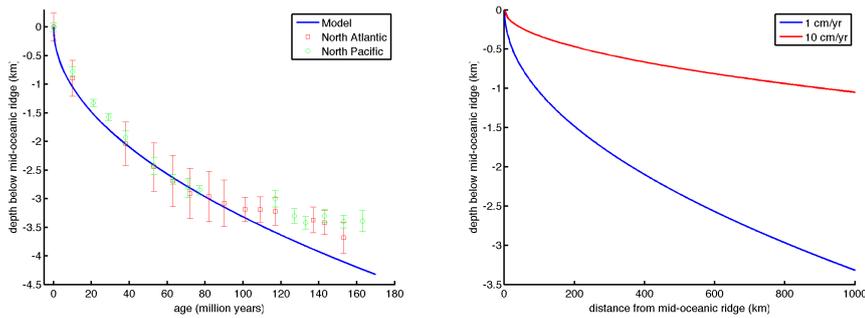


FIGURE 3.19 – Gauche : la courbe bleue montre la profondeur du plancher océanique par rapport à la dorsale en fonction de l'âge de celui-ci selon l'équation 3.95 avec $\rho_m = 3200 \text{ kg/m}^3$, $\rho_w = 1000 \text{ kg/m}^3$, $\alpha = 3 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1}$, $T_L = 1200 \text{ C}$, $T_S = 0 \text{ C}$, $\kappa = 1 \times 10^{-6} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$. Les symboles sont des observations bathymétriques corrigées du poids des sédiments (Parsons et Sclater, 1977). Droite : on a ici converti l'âge du plancher océanique en distance à la dorsale pour deux valeurs du taux d'accrétion.

On observe sur la figure 3.19 que l'accord entre les observations et ce modèle simple d'isostasie thermique est très bon pour des lithosphères dont l'âge ne dépasse pas 80 Ma. Au-delà, l'accord entre les observations et le modèle se dégrade de manière significative. Le plancher océanique est trop haut par rapport aux prédictions du modèle. De nombreux travaux ont cherché à expliquer cette différence, avec deux catégories d'explications possibles :

- La lithosphère océanique ne se refroidit pas aussi rapidement que le prédit un modèle de demi-espace conductif car elle est chauffée par dessous par des anomalies thermiques mantelliques.
- La lithosphère océanique est maintenue dynamiquement au-dessus de son élévation théorique par la poussée de remontées mantelliques.

3.4 Lois de déformation

3.4.1 Quelques observations

3.4.2 Principaux comportements

La description mécanique d'un système nécessite de pouvoir relier les efforts qui s'y appliquent aux déformations qui en résultent. Ces relations sont les "lois constitutives" des matériaux, ou lois de déformation ou de comportement.

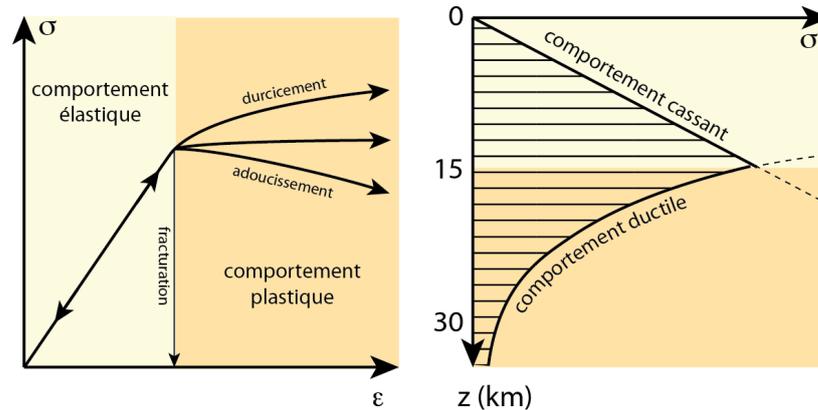


FIGURE 3.20 – Représentations schématiques du comportement des roches sous l'effet d'un effort mécanique appliqué. Gauche : une roche soumise à une contrainte σ qui augmente se déforme de manière élastique – donc réversible – jusqu'à un seuil au-delà duquel elle se déforme de manière plastique – donc irréversible. Droite : ces deux types de comportement sont fonction de la température, donc de la profondeur. Dans la croûte supérieure, les roches se déforment par rupture cassante quand la contrainte dépasse leur résistance mécanique. Dans la croûte inférieure, les roches se déforment de manière ductile car la température y est suffisante pour y activer des déformations plastiques, soit par dislocation au sein du réseau cristallin ou par diffusion atomique aux frontières des grains minéraux.

La quantité de déformation subie par un échantillon de solide est fonction de ses propriétés mécaniques, de son "comportement" en réponse à des forces appliquées. À l'échelle atomique des réseaux cristallins on distingue classiquement les comportements suivants :

- **Comportement élastique** : la déformation (ϵ) est proportionnelle aux contraintes appliquées et est réversible : le solide reprend sa forme originelle si les contraintes disparaissent. Il restitue donc la déformation qu'il a accumulée quand la contrainte est relâchée. Dans le cas d'une traction ou compression simple, on a :

$$\sigma_{ij} = E \epsilon_{ij} \quad (3.96)$$

où le facteur de proportionnalité E est module d'Young ou module d'élasticité, caractéristique du matériau (= par exemple la raideur d'un ressort). La déformation a lieu par distorsion du réseau cristallin qui reprend

sa forme originelle si la contrainte appliquée est relâchée. Ce mécanisme permet notamment la propagation des ondes sismiques, qui sont de très petites déformations élastiques transmises de proche en proche.

- **Comportement plastique** : au-delà d'un certain seuil, les réseaux cristallins s'endommagent de manière irréversible. Le comportement des minéraux est dit "plastique". Par analogie avec le comportement élastique, on définit une relation de proportionnalité entre contrainte et – cette fois – vitesse de déformation $\dot{\epsilon} = d\epsilon/dt$:

$$\sigma_d = \eta \dot{\epsilon} \quad (3.97)$$

où η , facteur de proportionnalité, est la viscosité du matériau. La déformation s'accomode par dislocation au sein du réseau cristallin ou par diffusion atomique aux frontières des grains minéraux. La déformation est non réversible et la relation entre contrainte et déformation n'est pas linéaire. En régime plastique, à mesure que la déformation augmente le matériau peut "durcir" ou au contraire "s'adoucir".

Quand les contraintes appliquées à la roche sont suffisamment fortes et ne peuvent plus être compensées élastiquement, alors celle-ci se déforme de manière permanente. À l'échelle macroscopique cette déformation permanente peut se manifester de manière cassante sur des fractures discrètes, ou de manière ductile par une déformation distribuée au sein d'un volume :

- **Comportement cassant** : il se manifeste macroscopiquement par un glissement localisé le long d'une fracture pré-existante ou nouvellement créée = une faille. La propriété du milieu qui détermine l'apparition d'une fracture ou le glissement sur une fracture pré-existante est sa friction. On parle aussi de comportement "frictionnel".
- **Comportement ductile** : il se manifeste macroscopiquement par le fluage solide d'un volume de roche. Le taux de déformation ($\dot{\epsilon}$) est proportionnel aux contraintes appliquées. La roche subit de grandes déformations sans rupture. La propriété du milieu qui détermine la déformation subie est sa viscosité. On parle aussi de comportement "visqueux".

Ces relations entre contrainte et déformation ou taux de déformations sont les équations constitutives du matériau.

On intuite dès à présent que ces deux types de comportement seront, pour un type de roche donné, fonction de la température – donc de la profondeur – qui va permettre d'activer le comportement visqueux, comme le montre de manière schématique la figure 3.20.

FIG 3 BIRD 1980

3.4.3 Comportement frictionnel

Dans la partie supérieure de la croûte la température est suffisamment faible pour que les roches se déforment de manière permanente par rupture cassante. La rupture se manifeste macroscopiquement par du glissement sur des discontinuités mécaniques dans la roche = les fractures ou failles. Elles peuvent être

pré-existantes ou néo-formées. En moyenne, en supposant que la croûte continentale puisse être approximée par du quartz, ceci est valide jusqu'à $\sim 350^\circ\text{C}$ soit environ 15 km de profondeur pour un gradient géothermique moyen de $25^\circ/\text{km}$.

Loi de Coulomb

Coulomb (1773) étudie la rupture des matériaux et découvre que leur résistance mécanique dépend de la contrainte normale appliquée σ_n et, au second ordre, d'une constante caractéristique du matériau appelée "cohésion" σ_0 . Il écrit que :

$$\sigma_s^c = \sigma_0 + \mu \sigma_n \quad (3.98)$$

où μ est le coefficient de friction interne de la roche. Cette équation donne la contrainte de cisaillement critique σ_s^c à laquelle la rupture a lieu. Ce critère de rupture est aussi appelé "critère de Coulomb".

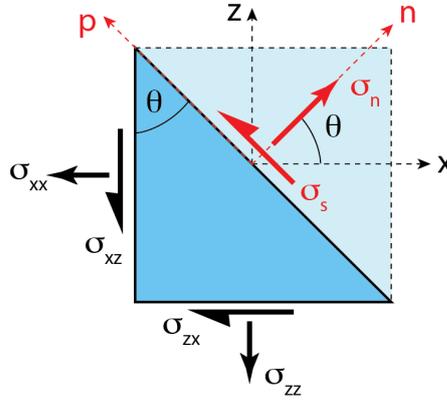


FIGURE 3.21 – Représentation graphique des contraintes normale et cisailante (ou tangentielle) s'exerçant sur un plan faisant un angle θ au sein d'un volume – ici une surface en deux dimensions – soumis aux contraintes $\sigma_{xx}, \sigma_{zz}, \sigma_{xz} = \sigma_{zx}$.

En présence de fluides, la loi de Coulomb (équation 3.98) inclut la pression due au fluide P_f :

$$\sigma_s^c = \sigma_0 + \mu (\sigma_n - P_f) \quad (3.99)$$

Cette relation est vérifiée expérimentalement. On l'écrit parfois :

$$\sigma_s^c = \sigma_0 + \mu \sigma_n^{eff} \quad (3.100)$$

où $\sigma_n^{eff} = (\sigma_n - P_f)$ est la contrainte normale dite "effective". Une augmentation de la pression de pore P_f abaisse la contrainte normale effective et permet donc, sans modifier la valeur de σ_n , de se rapprocher de la condition de rupture.

On utilise souvent le facteur de pression de pore λ :

$$\lambda = \frac{P_f}{\sigma_n} \quad (3.101)$$

pour écrire l'équation 3.99 :

$$\sigma_s^c = \sigma_0 + \mu \sigma_n (1 - \lambda) \quad (3.102)$$

Dans un milieu parfaitement perméable dans lequel les fractures sont interconnectées jusqu'à la surface, la pression de pore est simplement le poids de la colonne d'eau dans la croûte, soit $P_f = \rho_w g z$, où ρ_w est la densité de l'eau, de l'ordre de $1 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ qui varie un peu en fonction de la salinité, température et pression. On a donc, pour un plan d'orientation θ :

$$\lambda = \frac{P_f}{\sigma_n} = \frac{\rho_w g z \sin \theta}{\rho_c g z \sin \theta} = \frac{1}{2.7} \approx 0.37 \quad (3.103)$$

Cet état s'appelle "hydrostatique". Le "gradient hydrostatique" est de 10 MPa/km.

Dans certains cas, on observe des gradients dits "suprahydrostatiques" avec $\lambda > 0.4$. C'est par exemple le cas des régions sédimentaires en régime de compression tectonique active. On a ainsi mesuré $\lambda \approx 0.9$ à des profondeurs de 2 à 5 km dans des bassins sédimentaires adjacents aux failles du système de San Andreas en Californie.

Si $P_f \ll \sigma_n$ alors on se trouve dans le cas purement lithostatique, ou "sec", où $\lambda \approx 0$.

Cercle de Mohr

Mohr (1900) décrit une représentation graphique de la relation de Coulomb à l'aide du cercle ou diagramme de Mohr. En effet, si on écrit l'équilibre des forces en deux dimensions pour un élément infinitésimal, on montre que l'on peut relier les contraintes normale σ_n et tangentielle σ_s s'appliquant sur un plan de direction θ en fonction des contraintes $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$ s'exerçant sur cet élément (voir cours d'élasticité ou le chapitre 2.3 de TS) :

$$\sigma_n = \frac{1}{2} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \frac{1}{2} (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \cos 2\theta + \sigma_{xy} \sin 2\theta \quad (3.104)$$

$$\sigma_s = -\frac{1}{2} (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \sin 2\theta + \sigma_{xy} \cos 2\theta \quad (3.105)$$

On élimine le paramètre 2θ en réarrangeant la première équation, puis en exprimant les deux équations au carré, enfin en les additionnant pour trouver :

$$\left[\sigma_n - \frac{1}{2} (\sigma_{xx} + \sigma_{zz}) \right]^2 + \sigma_s^2 = \left[\frac{1}{2} (\sigma_{xx} - \sigma_{zz}) \right]^2 + \sigma_{xz}^2 \quad (3.106)$$

soit :

$$(\sigma_n - \sigma_{moy})^2 + \sigma_s^2 = R^2 \quad (3.107)$$

avec :

$$R = \sqrt{\left[\frac{1}{2} (\sigma_{xx} - \sigma_{zz}) \right]^2 + \sigma_{xz}^2} \quad (3.108)$$

et

$$\sigma_{moy} = \frac{1}{2} (\sigma_{xx} + \sigma_{zz}) \quad (3.109)$$

L'équation 3.106 est, dans le système de coordonnées (σ_n, σ_s) celle d'un cercle de rayon R centré sur le point de coordonnées $\sigma_n = \sigma_{moy}$ et $\sigma_s = 0$. On peut

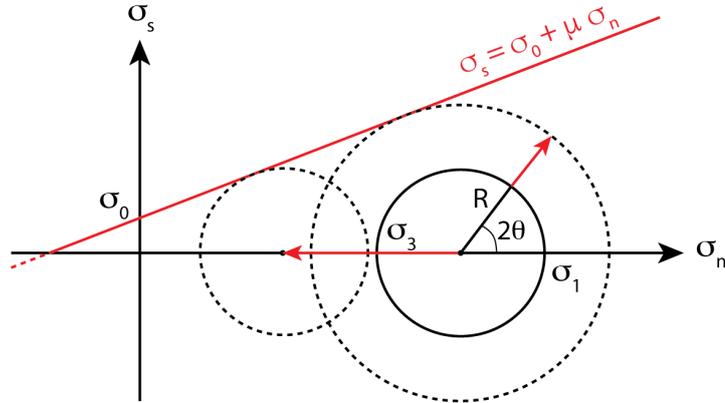


FIGURE 3.22 – Le cercle continu – dit “cercle de Mohr” – indique la relation entre contrainte normale σ_n et contrainte tangentielle σ_s (ou de cisaillement) dans la théorie de Mohr-Coulomb, en deux dimensions. L’angle 2θ est l’angle entre n’importe quel plan dans la roche et la direction des contraintes normales appliquées au volume de roche considéré. On observe que l’on peut faire intersecter le cercle de Mohr avec la droite de rupture donnée par la loi de Coulomb (en rouge) de deux manières : (1) en augmentant le rayon du cercle de Mohr R , c’est-à-dire en augmentant la contrainte différentielle $\sigma_1 - \sigma_3$, ou (2) en déplaçant le cercle de Mohr vers la gauche, c’est-à-dire en diminuant la contrainte normale effective, par exemple en augmentant la pression de fluide.

donc représenter l’état de contrainte d’une roche par un cercle. L’angle 2θ est l’angle entre n’importe quel plan dans la roche et la direction des contraintes normales appliquées au volume de roche considéré.

Si on se place dans la configuration des contraintes principales, c’est-à-dire $\sigma_{xx} = \sigma_1$, $\sigma_{yy} = \sigma_3$, et $\sigma_{xy} = 0$, le rayon du cercle de Mohr devient :

$$R = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad (3.110)$$

Le centre de ce cercle est alors simplement donné par :

$$\sigma_s = 0 \quad (3.111)$$

$$\sigma_n = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \quad (3.112)$$

On peut alors écrire, en n’importe quel point du cercle de Mohr (par exemple au point B) que :

$$\sin(2\theta) = \frac{2\sigma_s}{\sigma_1 - \sigma_3} \quad (3.113)$$

Le cercle de Mohr, représenté sur la figure 3.22 en trait noir continu, indique la relation entre contrainte normale σ_n et contrainte tangentielle σ_s (ou de cisaillement) pour un volume de roche donné. L’angle 2θ est l’angle entre n’importe quel plan dans la roche et la direction des contraintes normales appliquées au volume de roche considéré.

Dans ce repère, la loi de rupture Coulomb (équation 3.98) décrit une droite. Dès que cette droite est tangente au cercle de Mohr (en A), les conditions de la rupture sont réunies dans le volume de roche considéré. Pour atteindre la rupture – faire intersecter le cercle de Mohr avec la droite de rupture donnée par la loi de Coulomb – deux solutions sont possibles comme le montrent les flèches rouges sur la figure 3.22. La première consiste à augmenter le rayon du cercle de Mohr R , c'est-à-dire à augmenter la contrainte différentielle $\sigma_1 - \sigma_3$. La seconde consiste à déplacer le cercle de Mohr vers la gauche, c'est-à-dire à diminuer la contrainte normale effective, par exemple en augmentant la pression de fluide (équation 3.99).

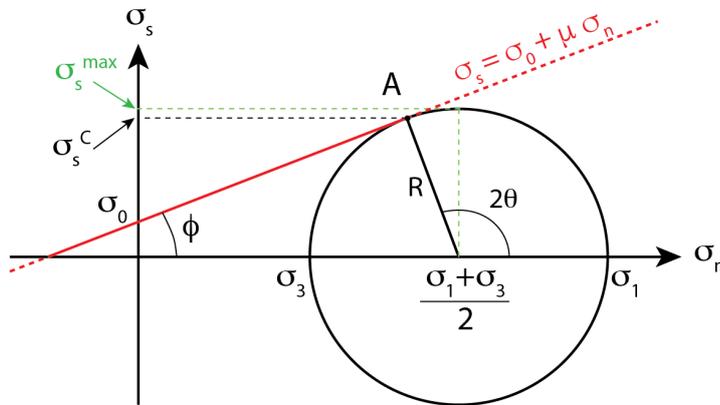


FIGURE 3.23 – Le cercle de Mohr (cercle noir) en condition de rupture : il intersecte la loi de rupture Coulomb (droite rouge). La rupture a lieu sur un plan d'orientation 2θ – dont dira qu'il est "favorablement orienté" pour la rupture étant donné les valeurs de σ_1 et σ_3 . La rupture a lieu pour la contrainte de cisaillement σ_s^c .

La figure 3.23 montre un cas particulier où le cercle de Mohr est tangent à loi de rupture Coulomb (en A). Nous sommes donc dans les conditions de la rupture pour des plans dont l'orientation par rapport à la direction des contraintes principales est donnée par :

$$\sin 2\theta = \frac{2}{\sigma_1 - \sigma_3} \sigma_s^c \quad (3.114)$$

On voit aussi que la contrainte de cisaillement σ_s est maximale sur un plan à 45° de la direction de la contrainte principale. On a donc :

$$\sigma_s^{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad (3.115)$$

Cela implique que la contrainte de cisaillement maximale qu'une roche peut soutenir avant rupture est la moitié de la contrainte différentielle $\sigma_1 - \sigma_3$.

La figure 3.23 montre que la contrainte de cisaillement maximale ne correspond pas à la rupture, qui est atteinte pour $\sigma_s^c < \sigma_s^{max}$. Cela s'explique par le rôle de la contrainte normale σ_n dans l'équation 3.98, qui est supérieure pour σ_s^{max} . De

manière schématique, on peut dire que la contrainte normale “bloque” la faille (“clamping effect”).

L’angle de la tangente au cercle de Mohr, dit “angle de friction”, est relié au coefficient de friction μ par :

$$\tan \phi = \mu \tag{3.116}$$

On constate que la rupture peut avoir lieu sur deux plans conjugués d’orientation $\theta = \pi/4 - \phi/2$ (car $2\theta + \pi/2 + \phi = \pi$). FAIRE DESSIN.

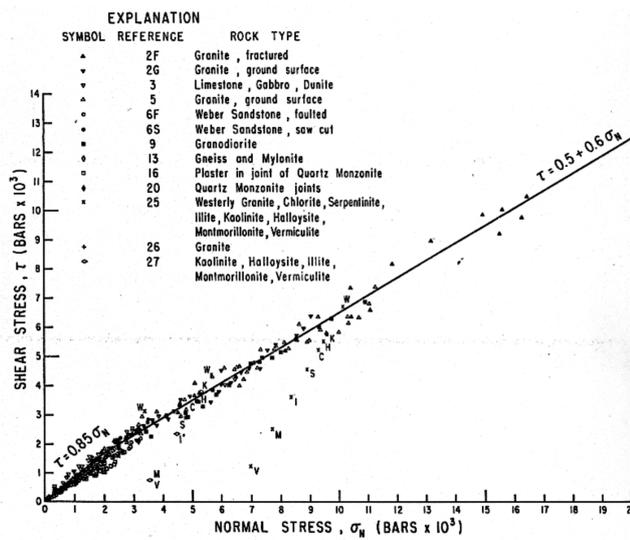


FIGURE 3.24 – Contrainte de cisaillement en fonction de la contrainte normale à la friction maximale pour une gamme de roches. On observe un comportement différent pour une contrainte normale supérieure à environ 2000 bars. Les droites qui approximent ces valeurs mesurées de part et d’autre de $\sigma_n=2000$ bars représentent la “loi de Byerlee”.

Loi de Byerlee

Byerlee (1978) mesure en laboratoire la contrainte de cisaillement nécessaire pour faire glisser deux surfaces en contact en fonction de la contrainte normale. Il observe une relation linéaire entre σ_s et σ_n , comme le prédit la loi de Coulomb (équation 3.98). Comme le montre la figure 3.24, il détermine empiriquement les valeurs de σ_0 et μ :

$$\sigma_s = 0.85 \sigma_n \tag{3.117}$$

pour des contraintes normales jusqu’à 2 kbars (200 MPa) et au-dessus :

$$\sigma_s = 0.5 + 0.6 \sigma_n \tag{3.118}$$

Il est important de constater que cette loi ne dépend ni du type de roche ni de la température, mais seulement de la contrainte normale, donc de la profondeur.

Application aux séismes

Dans les années 1990, Ross Stein – de l’U.S. Geological Survey – et ses collaborateurs observent que les répliques des séismes importants en Californie sont géographiquement distribués de manière structurée. Elles ont préférentiellement lieu (1) le long de la rupture co-sismique et (2) à ses terminaisons. Ils proposent que ces répliques sont le résultat de petites ruptures (= de faible longueur, donc de faible magnitude) sur des failles qui sont (1) proches du seuil de rupture et (2) favorablement orientées dans le champ de contrainte régionale. Dans la théorie de Mohr-Coulomb, de telles failles sont donc très proches du point A de la figure 3.23, mais juste en-dessous de la droite rouge de Mohr-Coulomb

Leur raisonnement suit simplement celui de Mohr-Coulomb. Une séisme induit une variation des contraintes dans le volume de roche qui contient la rupture. Cette variation des contraintes – dite “co-sismique” – agit sur des (petites) failles contenues dans le volume autour de la rupture, failles qui sont supposées être proche du seuil de rupture. S’il certaines ont une orientation (2θ des équations ci-dessus) telle que la variation de contrainte co-sismique y augmente la contrainte cisailante et/ou diminue la contrainte normale, alors elles rompent. Cela se manifestera sous la forme de répliques.

La figure 3.25 montre cela de manière théorique dans le cas où deux champs¹ de contraintes se superposent : (1) le champ de contrainte déviatorique tectonique régional, ici une compression de 100 bars direction $N27E$, et (2) le champ de contrainte induit par le glissement cosismique induit par un décrochement dextre dans un milieu supposé élastique. Connaissant ces deux contributions, on peut calculer la direction des failles favorablement orientées pour la rupture ainsi que la valeur des contraintes normale et cisailante s’exerçant sur ces failles.

On applique alors la loi de Coulomb en chaque point du domaine considéré, en additionnant le changement de contrainte cisailante et le changement de contrainte normale multipliée par la friction effective pour y trouver le “changement de contrainte de Coulomb”. Le résultat du calcul montre la contrainte de Coulomb augmente dans certaines régions (en rouge) et diminue dans d’autres. De fait, les régions rouges devraient être celles où les répliques ont préférentiellement lieu.

Stein et collaborateurs testent cette hypothèse pour la séquence de séismes de Landers (M7.4) et Big Bear (M6.5) en Californie en 1992. Ils montrent que la faille de Big Bear était favorablement orientée et dans un lobe d’augmentation de contrainte de Coulomb à la suite du séisme de Landers. Il est donc très probable que le séisme de Big Bear ait été déclenché par celui de Landers (Figure 3.26). Ils montrent aussi que les répliques de cette séquence de séismes ont lieu essentiellement dans les régions où les contraintes de Coulomb ont augmenté. À l’inverse, celles où elles ont diminué – appelées “*stress shadows*” – voient très peu de répliques.

On note que les valeurs des changements de contrainte de Coulomb obtenues ici sont faibles, de l’ordre de 1 bar au maximum, soit 0.1 MPa. Cela est du même ordre de grandeur que la contrainte qui s’exerce si l’on joint ses deux mains

1. Le terme “champ” désigne simplement la distribution spatiale des contraintes. Ce n’est pas un champ au sens “champ potentiel”, par exemple.

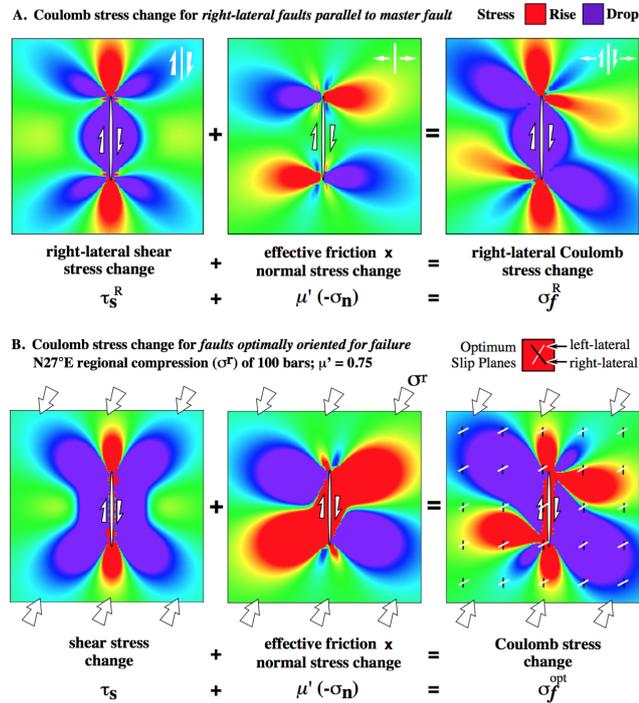


FIGURE 3.25 – Illustration de la notion de “changement de contrainte de Coulomb”. Les panneaux sont des vues en carte du changement de contrainte pour des failles décrochantes nord-sud dû à un glissement sismique sur une faille décrochante verticale au milieu de la figure. Les régions en rouges sont celles où la contrainte de Coulomb augmente, donc celle où des failles décrochantes nord-sud se rapprochent du seuil de rupture. Les régions en mauve, à l’inverse, sont celles où la rupture est inhibée pour des failles décrochantes nord-sud. Les panneaux du bas ajoutent une contrainte régionale à la variation de contrainte de Coulomb cosismique. La distribution géographique du changement de contrainte change, mais le principe reste le même. Figure tirée de Stein et al., BSSA, 1992.

l’une contre l’autre ! La coïncidence systématique des répliques avec les régions d’augmentation des contraintes de Coulomb pour les séismes indique donc que la plupart des failles sont proches du seuil de rupture. Une très légère augmentation des contraintes suffit donc à les faire passer au-delà de ce seuil. Ces failles sont donc très proches du seuil de rupture, on dit qu’elles sont “critically stressed”. Nous présenterons plus bas une série d’observations indépendante qui indique que c’est bien le cas.

État de contrainte “andersonien”

Anderson (1951) reformule la loi de Coulomb en terme de contrainte différentielle $\sigma_1 - \sigma_3$. Il dit tout d’abord que la surface terrestre étant une surface où les contraintes cisailantes sont nulles, elle est donc, par définition de la contrainte principale, perpendiculaire à une contrainte principale. En d’autres termes, σ_{xx}

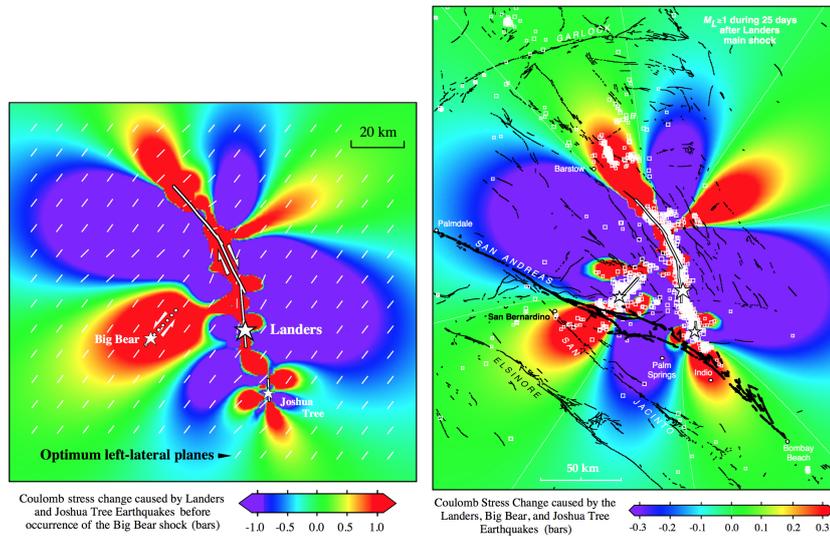


FIGURE 3.26 – Gauche : variations de contraintes de Coulomb induites par les séismes de Johua Tree et de Landers sur des failles dont l’orientation est celle de la (future) rupture de Big Bear. On observe que la faille de Big Bear était favorablement orientée et située dans une région d’augmentation des contraintes de Coulomb. Droite : répliques (carrés blancs) à la suite du séisme de Landers. On observe qu’elles sont préférentiellement localisées dans des régions d’augmentation des contraintes de Coulomb. Figures tirées de Stein et al., BSSA, 1992.

et σ_{zz} sont les contraintes principales, l’une est σ_1 , l’autre est σ_3 , en fonction de leur magnitude relative ($\sigma_1 > \sigma_3$). Anderson définit les 3 types de failles – normale, inverse, décrochante – en fonction de l’orientation des contraintes principales, comme le montre la figure 3.27. On intuite que le cas où la contrainte maximale σ_1 est horizontale et la contrainte minimale σ_3 est verticale tend à activer des failles inverses. À l’opposé, le cas où la contrainte maximale σ_1 est verticale et la contrainte minimale σ_3 est horizontale tend à activer des failles inverses.

Anderson établit une théorie qui permet de déterminer l’angle optimal des plans de rupture par rapport aux contraintes $\sigma_{1,2,3}$; nous reprenons ici son raisonnement. Plaçons-nous dans une situation de contrainte lithostatique où les contraintes horizontales sont équilibrées par une contrainte tectonique déviatorique $\Delta\sigma_{xx}$. On a :

$$\begin{aligned}\sigma_{zz} &= \rho g z \\ \sigma_{xx} &= \rho g z + \Delta\sigma_{xx}\end{aligned}\tag{3.119}$$

Pour générer des failles inverses il faudra $\Delta\sigma_{xx} > 0$, pour des failles normales $\Delta\sigma_{xx} < 0$. On cherche ici à déterminer $\Delta\sigma_{xx}$ qui, dans le cas andersonien, vaut $\sigma_1 - \sigma_3$.

On peut pour cela utiliser l’équation 3.9 pour relier ces contraintes principales σ_{xx} et σ_{zz} aux contraintes normales σ_n et tangentielles σ_s sur un plan de pendage

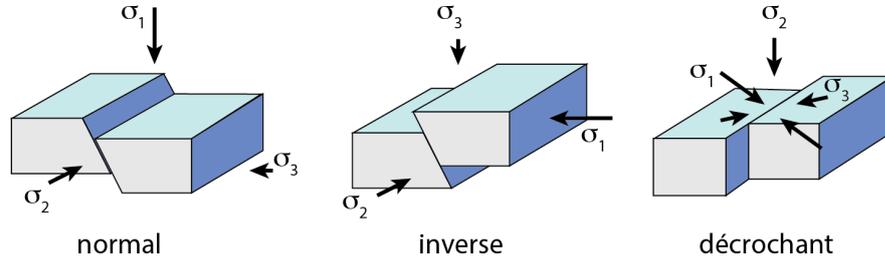


FIGURE 3.27 – Géométrie d'une rupture cassante dans le cas d'une faille normale ($\sigma_1 - \sigma_3 < 0$), d'une faille inverse ($\sigma_1 - \sigma_3 > 0$) ou du cas intermédiaire d'une faille décrochante.

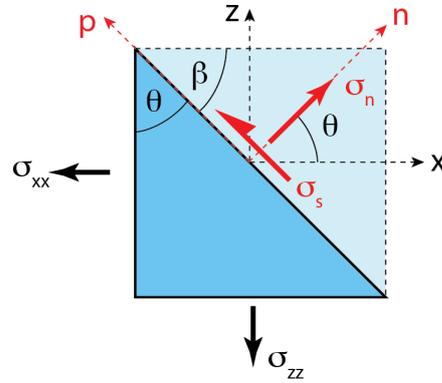


FIGURE 3.28 – Représentation graphique des contraintes normale et cisailante (ou tangentielle) s'exerçant sur un plan de pendage β dans le cas "andersonien" où σ_{xx} et σ_{zz} sont les contraintes principales – par définition $\sigma_{xz} = 0$.

$\beta = \pi/2 - \theta$ (Figure 3.28), θ est l'angle entre ce plan et la direction de la contrainte verticale :

$$\begin{bmatrix} \sigma_n & \sigma_s \\ \sigma_s & \sigma_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 \\ 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (3.120)$$

En développant, on obtient (cf. équation 3.9) :

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{zz}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{zz}}{2} \cos 2\theta \\ \sigma_s &= -\frac{1}{2} (\sigma_{xx} - \sigma_{zz}) \sin 2\theta \end{aligned} \quad (3.121)$$

En combinant les deux équations ci-dessus et les équations 3.119 on obtient :

$$\sigma_n = \rho g z + \frac{\Delta \sigma_{xx}}{2} (1 + \cos 2\theta) \quad (3.122)$$

$$\sigma_s = -\frac{\Delta \sigma_{xx}}{2} \sin 2\theta \quad (3.123)$$

Plaçons-nous dans le cas de la limite de rupture donnée par la loi de Coulomb (3.98) :

$$\sigma_s = \mu (\sigma_n - P_f) \quad (3.124)$$

On obtient par substitution :

$$\pm \frac{\Delta\sigma_{xx}}{2} \sin 2\theta = \mu \left(\rho g z + \frac{\Delta\sigma_{xx}}{2} (1 + \cos 2\theta) - P_f \right) \quad (3.125)$$

soit :

$$\Delta\sigma_{xx} = \frac{2\mu (\rho g z - P_f)}{\pm \sin 2\theta - \mu (1 + \cos 2\theta)} \quad (3.126)$$

Dans le cas de failles inverses $\Delta\sigma_{xx} > 0$ et le signe + s'applique. Inversement pour les failles normales.

Anderson fait l'hypothèse d'un milieu contenant des fractures pré-existantes d'orientations variées, typique de la croûte supérieure. Il pose que la rupture se fera d'abord sur la fracture dont l'orientation permet le glissement pour une contrainte déviatorique minimale. On cherche donc θ tel que $d\Delta\sigma_{xx}/d\theta = 0$, ce qui donne :

$$\tan 2\theta = \mp \frac{1}{\mu} \quad (3.127)$$

avec le pendage de la faille $\beta = \pi/2 - \theta$.

On retrouve cette relation à partir du cercle de Mohr. On a en effet, pour la partie supérieure du cercle de Mohr :

$$\tan(\pi - 2\theta) = -\tan(2\theta) = -\frac{A}{R} \quad (3.128)$$

où A est la distance le long de la droite de Coulomb entre l'intersect des abscisses et le point A et R est le rayon du cercle de Mohr. La pente de la droite de Coulomb est donnée par :

$$\mu = \tan \phi = \frac{R}{A} \quad (3.129)$$

Donc :

$$\tan 2\theta = -\frac{1}{\mu} \quad (3.130)$$

On obtient l'opposé (signe +) pour la partie inférieure du cercle de Mohr.

La relation entre le pendage d'une faille β et la friction μ sur celle-ci est représentée graphiquement sur la figure 3.29. Si $\mu = 0$, alors $\tan 2\theta \rightarrow \infty$ donc $2\theta \rightarrow \pi$, soit $\beta \rightarrow \pi/2$. Pour $\mu = 0.4$, on a :

$$\beta = \frac{\pi}{2} \mp \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{1}{0.4} \quad (3.131)$$

soit 56° pour des failles normales et 34° pour des failles inverses. Pour $\mu = 0.1$, on obtient 67° pour des failles normales et 22° pour des failles inverses. La représentation graphique de β en fonction de μ montre que les failles inverses devraient avoir un pendage plus faible que les failles normales. Ceci est généralement vérifié dans la partie supérieure de la croûte cassante.

À l'inverse, on peut donc dire que, en état de contrainte andersonien hydrostatique à lithostatique, des failles normales de pendage proche de $56-60^\circ$ ou des

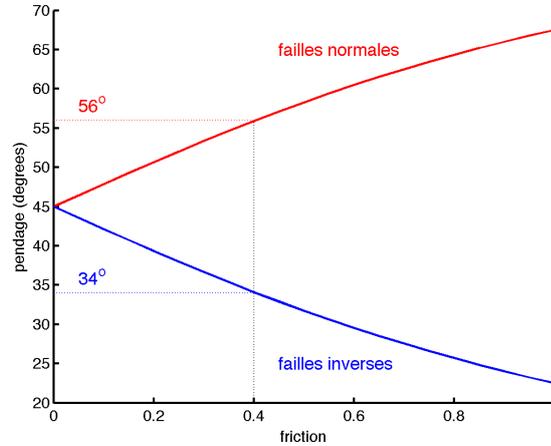


FIGURE 3.29 – Relation entre le pendage d’une faille à la limite de rupture et la friction sur celle-ci dans un état de contrainte andersonien. Cette théorie prédit que les failles inverses sont plus “plates” que les failles normales, ce qui est effectivement observé dans la croûte supérieure.

failles inverses de pendage proche de 22–34° sont “favorablement orientées” pour la rupture. Si, dans ces conditions, des failles autres que celles favorablement orientées rompent, alors leur réactivation est le résultat (1) d’une contrainte locale anormale, ou (2) d’une pression de pore supra-hydrostatique.

On obtient finalement la contrainte tectonique $\Delta\sigma_{xx}$ qui par définition est égale à $\sigma_{xx} - \rho g z = \sigma_{xx} - \sigma_{zz}$ donc égale à $\sigma_1 - \sigma_3$ puisqu’Anderson postule qu’une des contraintes principales est verticale. On a alors pour des failles inverses, normales et décrochantes :

$$\begin{aligned}
 \text{inverse : } \Delta\sigma_{xx} &= \frac{2\mu(\rho g z - P_f)}{\sqrt{1 + \mu^2} - \mu} \\
 \text{normal : } \Delta\sigma_{xx} &= -\frac{2\mu(\rho g z - P_f)}{\sqrt{1 + \mu^2} + \mu} \\
 \text{décrochant : } \Delta\sigma_{xx} &= \frac{2\mu(\rho g z - P_f)}{\sqrt{1 + \mu^2}}
 \end{aligned} \tag{3.132}$$

La représentation graphique de ces situations sur la figure 3.30 montre que l’activation de failles inverses requiert des contraintes déviatoriques supérieures – en valeur absolue – à celles requises pour les failles normales. Cela se comprend intuitivement car l’activation des failles inverses nécessite de dépenser de l’énergie contre la pesanteur, alors que cette dernière agit en faveur de l’activation des failles normales. On retient donc qu’il est plus facile de casser une roche en régime extensif qu’en régime compressif – en d’autres termes la résistance mécanique des roches est plus faible en extension qu’en compression.

La valeur de $\Delta\sigma_{xx} = \sigma_1 - \sigma_3$ pour laquelle une faille est activée représente la limite de résistance mécanique des roches dans la croûte supérieure. On peut la représenter en fonction de la profondeur dans le cas d’une compression ($\sigma_1 - \sigma_3 >$

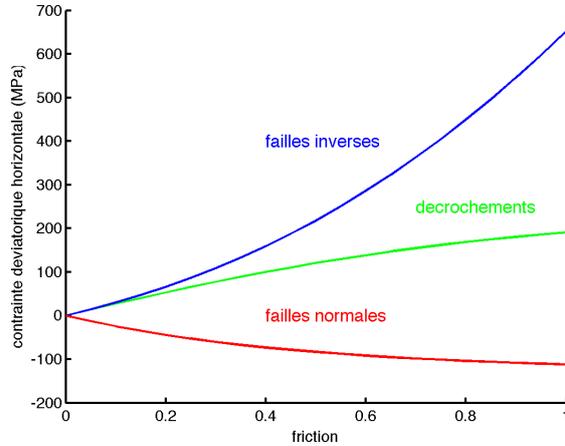


FIGURE 3.30 – Relation entre la contrainte déviatorique horizontale et le coefficient de friction statique pour les trois types de faille d’après les équations 3.132. Ici $\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$, $z = 5 \text{ km}$, $P_f = 0$, $g = 10 \text{ ms}^{-2}$. On observe que la réactivation de failles normales requiert des contraintes déviatoriques inférieures au cas des failles inverses car, dans ce dernier cas, il faut dépenser un travail contre la gravité. Il est donc plus “facile” d’activer des failles en extension.

0) ou d’une extension ($\sigma_1 - \sigma_3 < 0$), comme le montre la figure 3.31. Le cas décrochant est intermédiaire.

Comment les failles rendent la croûte résistante

Si les failles sont pour la plupart d’entre elles proches du seuil de rupture, une question évidente est comment dans ce cas la croûte continentale possède-t-elle une résistance mécanique significative? Townend et Zoback (2000) apportent une réponse à cette question, d’abord en montrant que les données montrent que les failles sont au seuil de rupture et que la perméabilité dans la croûte cristalline est suffisamment haute pour que l’état de contraintes y soit hydrostatique.

Plaçons-nous dans le cas d’un régime tectonique décrochant. On peut alors écrire, d’après l’équation 3.132 :

$$\frac{\Delta\sigma_{xx}}{(\rho g z - P_f)} = \frac{2\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}} \quad (3.133)$$

Townend et Zoback dénomment $\rho g z$ “contrainte moyenne” \bar{S} et $\Delta\sigma_{xx}$ “contrainte différentielle maximale” ΔS . Ils disent alors que si les roches sont proches de leur seuil de rupture, alors le ratio entre contrainte différentielle maximale et contrainte moyenne doit être constant et valoir :

$$\frac{\Delta S}{(\bar{S} - P_f)} = \frac{2\mu}{\sqrt{\mu^2 + 1}} \quad (3.134)$$

Ils montrent que les mesures de contraintes in situ dans la plupart des cas confirment cette relation, comme l’indique la figure 3.32, avec une valeur de μ

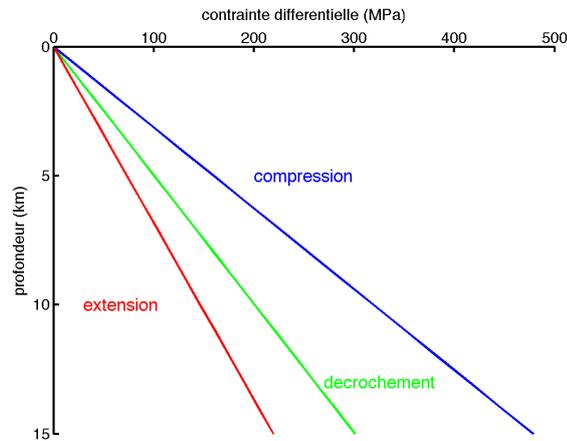


FIGURE 3.31 – Évolution de la contrainte différentielle nécessaire à l’activation de failles en contexte de compression, d’extension ou de décrochement en fonction de la profondeur d’après les équations 3.132. Ici $\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$, $\mu = 0.4$, $P_f = 0$, $g = 10 \text{ ms}^{-2}$. On retrouve que l’activation des failles requiert une contrainte différentielle plus faible en extension qu’en compression.

entre 0.6 et 1 en accord avec les mesures expérimentales. Cela implique donc que les failles dans la croûte continentale sont proches du seuil de rupture, ce qui, de fait, limite la résistance mécanique moyenne de la croûte.

CONTINUER AVEC PERMEABILITE

3.4.4 Comportement visqueux

Loi de fluage

On observe que sous certaines conditions, en particulier de température élevée, les roches se déforment de manière plastique. A l’échelle atomique, deux mécanismes de déformation sont prépondérants en fonction de la taille des minéraux (qui diminue avec la pression) et des contraintes appliquées (Karato et Wu, 1993 ; Figure 3.33) :

- Propagation de dislocations mécaniques au travers des réseaux cristallins = fluage dislocation, processus dominant dans le manteau supérieur. La relation entre vitesse de déformation et contrainte est non-linéaire (rhéologie non-newtonienne) mais est insensible à la taille des grains.
- Transport diffusif d’atomes entre les grains = fluage diffusif, processus dominant dans le manteau inférieur. La relation entre vitesse de déformation et contrainte est linéaire (rhéologie newtonienne). Ce processus est dépendant de la taille des grains : la vitesse de déformation diminue quand la taille des grains augmente.

A l’échelle géologique, les déformations plastiques apparaissent comme un fluage solide continu – la déformation est dite “ductile”. En régime ductile, on montre

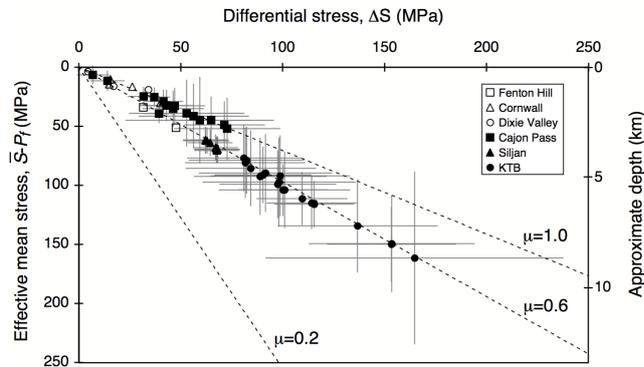


FIGURE 3.32 – Relation entre contrainte différentielle et contrainte moyenne effective à six endroits où celles-ci ont été directement mesurées en profondeur, dans des forages. Les droites reproduisent l'équation 3.134 pour 3 valeurs du coefficient de friction μ . On observe que l'état de contrainte dans la croûte continentale est tel que les failles y sont au seuil de rupture pour des valeurs de μ entre 0.6 et 1 en accord avec les mesures expérimentales. Figure de Townend et Zoback, *Geology*, 2000.

expérimentalement que la vitesse de déformation des roches augmente avec la température. On observe aussi que les roches se déforment ~ 8 fois plus vite quand on double la contrainte appliquée : la relation taux de déformation – contrainte appliquée est donc non-linéaire. Des expériences en laboratoire permettent de montrer qu'en régime ductile, la contrainte différentielle ($\sigma_{zz} - P$ en MPa) est liée au taux de déformation $\dot{\epsilon}$ (en s^{-1}) et à la température T (en K) par la relation suivante :

$$\dot{\epsilon} = \sigma_d^n A e^{-\frac{Q}{RT}} \quad (3.135)$$

où A (constante pré-exponentielle en $MPa^{-n}s^{-1}$) et Q (énergie d'activation en $kJ mol^{-1}$) dépendent du matériau considéré et sont mesurées en laboratoire pour différents minéraux ou assemblages minéraux. $R =$ constante des gaz parfaits ($8.3 Jmol^{-1}K^{-1}$), $T =$ température (K).

Cette relation est communément appelée loi de fluage visqueux (e.g., Kirby, 1977) ou parfois "loi de Dorn". C'est une loi de puissance dont l'exposant caractéristique est n . Si $n = 1$ le fluide est dit "Newtonien". La plupart des roches ont un comportement non-Newtonien avec $2 < n < 4$.

Viscosité effective

Comme en élasticité où contrainte et déformation sont proportionnelles et où la réponse d'une roche à une sollicitation mécanique dépend de son élasticité, on cherche ici à décrire la réponse d'une roche à une sollicitation mécanique en domaine ductile par un paramètre unique, sa viscosité effective. On la définit comme le facteur de proportionnalité entre contrainte différentielle et le taux de déformation :

$$\sigma_d = \eta_e \dot{\epsilon} \quad (3.136)$$

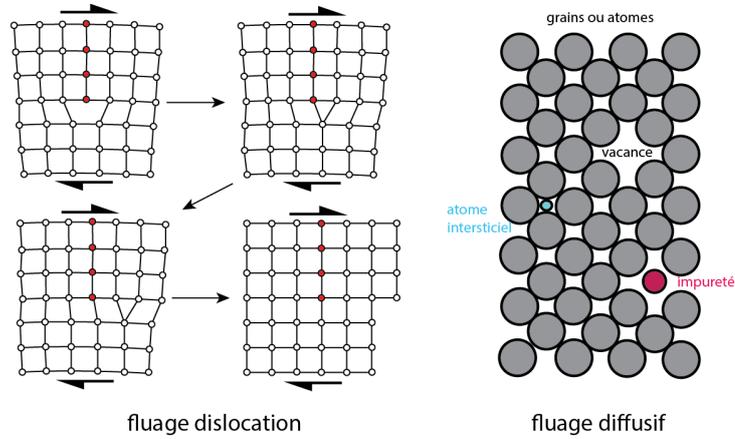


FIGURE 3.33 – Représentation schématique des mécanismes de déformation plastique par fluage dislocation et fluage diffusif.

avec η_e = viscosité effective du matériau en Pa s. La viscosité effective décrit donc la résistance d'une roche aux contraintes appliquées en domaine ductile. Plus la viscosité effective est grande, plus la vitesse de déformation est faible pour une contrainte appliquée donnée.

La loi de fluage (eq. 3.135) peut aussi s'écrire :

$$\sigma_d = \left(\frac{\dot{\epsilon}}{A} \right)^{(1/n)} e^{\frac{Q}{nRT}} \quad (3.137)$$

On cherche η_e tel que défini ci-dessus, on écrit donc :

$$\sigma_d = \dot{\epsilon} \dot{\epsilon}^{\frac{1-n}{n}} \left(\frac{1}{A} \right)^{(1/n)} e^{\frac{Q}{nRT}} \quad (3.138)$$

On utilise cette équation pour écrire la viscosité effective selon sa définition :

$$\eta_e = \frac{\sigma_d}{\dot{\epsilon}} = A^{-\frac{1}{n}} \dot{\epsilon}^{\frac{1-n}{n}} e^{\frac{Q}{nRT}} \quad (3.139)$$

On substitue $\dot{\epsilon}$ en utilisant l'équation 3.136 :

$$\eta_e = A^{-\frac{1}{n}} \left(\frac{\sigma_d}{\eta_e} \right)^{\frac{1-n}{n}} e^{\frac{Q}{nRT}} \quad (3.140)$$

soit :

$$\eta_e \eta_e^{\frac{1-n}{n}} = A^{-\frac{1}{n}} \sigma_d^{\frac{1-n}{n}} e^{\frac{Q}{nRT}} \quad (3.141)$$

que l'on réduit à :

$$\eta_e = \frac{1}{A} \sigma_d^{1-n} e^{\frac{Q}{RT}} \quad (3.142)$$

Cette équation définit la viscosité effective en Pa s, représentée en fonction de la profondeur sur la figure 3.34. On constate que la viscosité effective :

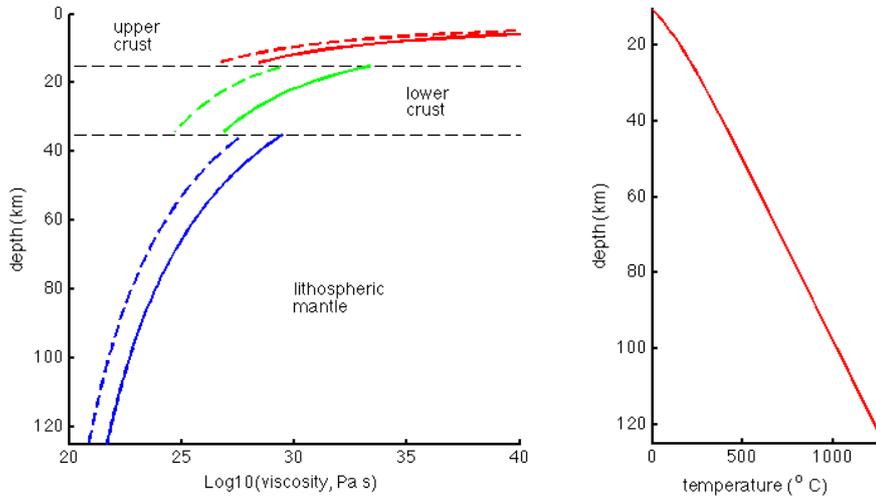


FIGURE 3.34 – Droite : profil de viscosité de la lithosphère, avec l’hypothèse d’une stratification (1) croûte supérieure (quartz = pointillé, Westerly granite = trait plein), (2) croûte inférieure (Adirondack granulite = pointillé, Pikwitonei granulite = trait plein), (3) manteau lithosphérique (Anita Bay dunite = pointillé, dry dunite = trait plein). Ces courbes utilisent l’équation 3.139 avec $\dot{\epsilon} = 10^{-9} \text{ yr}^{-1}$. Droite : évolution de la température en fonction de la profondeur (géotherme) utilisée pour calculer le profil de viscosité de la figure de gauche.

- Est supérieure à 10^{21} Pa s dans la lithosphère, pour un géotherme classique. Par comparaison, voici quelques viscosités de fluides courants à 20°C :
 - Eau = $\times 10^{-3} \text{ Pa s}$.
 - Miel = 10 Pa s .
 - Beurre de cacahuètes = 250 Pa s .
 - Mastic = $\times 10^5 \text{ Pa s}$.
 - Bitume = $\times 10^8 \text{ Pa s}$.
- Tend vers l’infini quand $T \rightarrow 0$.
- Diminue exponentiellement avec la température, qui dépend de la profondeur.
- Diminue exponentiellement avec la profondeur car la température varie à peu près linéairement en fonction de la profondeur.
- Dépend fortement du type de roche et de leur contenu en eau – les exemples de la figure 3.34 n’en montrent qu’un petit sous-ensemble.

Connaissant $T(z)$, on utilise généralement l’équation 3.137 pour de tracer σ_d en fonction de la profondeur, comme le montre la figure 3.35 pour trois différents types de roches. La forme de la loi de fluage en fonction de la profondeur dépend donc :

1. Du gradient géothermique ;
2. Du taux de déformation ;
3. Le type de roche, qui définit n , A et Q .

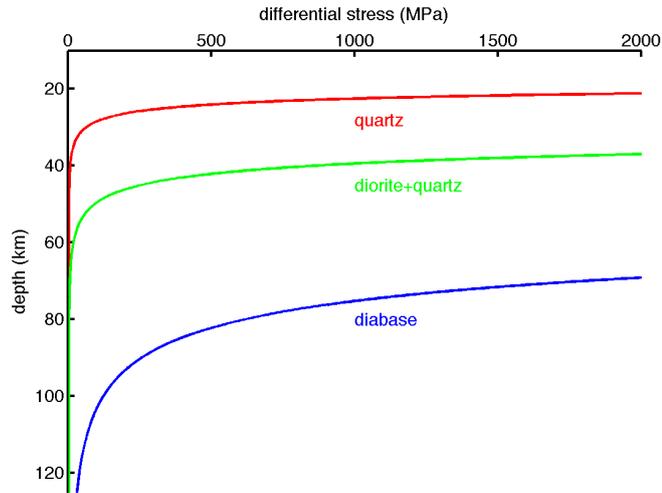


FIGURE 3.35 – Évolution de la contrainte différentielle σ_d nécessaire pour activer le fluage en fonction de la profondeur pour trois types de roches.

On observe sur la figure 3.35 qu'à une profondeur donnée, le quartz flue pour une contrainte différentielle bien inférieure à la diorite ou la diabase. Inversement, pour une contrainte différentielle donnée, il faut atteindre des profondeurs plus importantes pour activer du fluage dans des diorites ou diabases que dans du quartz.

On note enfin que pour un matériau newtonien ($n = 1$) la viscosité effective est simplement la "viscosité" de ce matériau. On note que dans ce cas l'équation 3.142 a la forme de la loi d'Arrhenius pour :

$$\eta = A_0 e^{\frac{Q}{RT}} \quad (3.143)$$

Cette loi décrit la cinétique d'une réaction chimique en fonction de la température. En chimie, l'équivalent de $\dot{\epsilon}$ est le "coefficient de vitesse" de la réaction, généralement noté k .

3.4.5 Stratification mécanique de la lithosphère

Cherchons maintenant, de la surface vers la profondeur et dans une lithosphère continentale, la contrainte minimale nécessaire pour déformer les roches de manière permanente, c'est-à-dire par rupture cassante dans les niveaux frictionnels ou par fluage dans les niveaux ductiles. Ceci est illustré sur la figure 3.36.

Dans les niveaux fragiles de la lithosphère, la résistance mécanique des roches est limitée par la loi de friction, qui dépend linéairement de la pression lithostatique $\sigma_n(z) = \rho g z$. La résistance mécanique augmente donc linéairement avec la profondeur avec une pente égale au coefficient de friction interne des roches qui, d'après Byerlee, est de ~ 0.6 au-delà de 100 MPa et 0.85 au-delà.

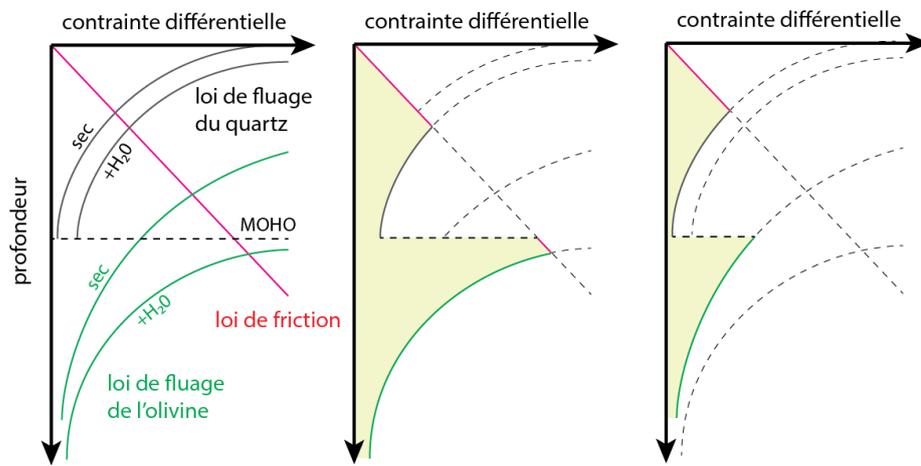


FIGURE 3.36 – Représentation schématique de la stratification mécanique de la lithosphère. Dans les niveaux fragiles de la lithosphère, la résistance mécanique des roches est limitée par la loi de friction, dans les niveaux ductiles par la loi de fluage du quartz (pour une croûte simplifiée) ou de l’olivine (pour un manteau simplifié). Ces lois de fluage dépendent de la présence d’eau. Elles sont schématisées ici pour un taux de déformation donné. Les roches se déforment selon le mécanisme qui requiert la contrainte la plus faible : celle-ci est atteinte, en fonction de la profondeur, en regime cassant ou ductile. Le profil de résistance mécanique de la lithosphère a donc la forme d’un “sapin de Noël”. L’intégrale sous ce profil, indiquée en jaune ici et qui a la dimension d’une force par unité de longueur, est la résistance mécanique moyenne de la lithosphère.

La pente de la loi de Byerlee est modifiée par la pression de fluides P_f dans les pores ou fractures de la roche. Elle dépend aussi du régime de contrainte compressif, extensif ou cisailant.

Dans les niveaux ductiles de la lithosphère, la résistance mécanique des roches est limitée par la loi de fluage, qui dépend de la température de manière exponentielle. Dans ces niveaux, si on augmente la contrainte différentielle, la limite de plasticité des roches est atteinte avant leur limite de rupture frictionnelle. La résistance mécanique décroît donc de manière exponentielle car la température augmente à peu près linéairement avec la profondeur. La loi de fluage dépend aussi du taux de déformation.

Les roches se déforment selon le mécanisme qui requiert la contrainte la plus faible. On peut donc représenter la résistance mécanique en fonction de la profondeur en superposant les lois de friction et lois de fluage et choisir celle qui correspond à la contrainte la plus faible. Cela amène à la représentation du profil de résistance mécanique de la lithosphère sous la forme du fameux “sapin de Noël” de la figure 3.37, aussi appelé profil de Brace–Goetze, les deux chercheurs qui ont les premiers permis de définir ce comportement stratifié à partir d’expériences en laboratoire (Goetze and Evans, 1979 ; Brace and Kohlstedt, 1980 ; voir aussi Molnar, 1992).

On peut déterminer par le calcul le profil de Brace–Goetze (Figure 3.37) si on

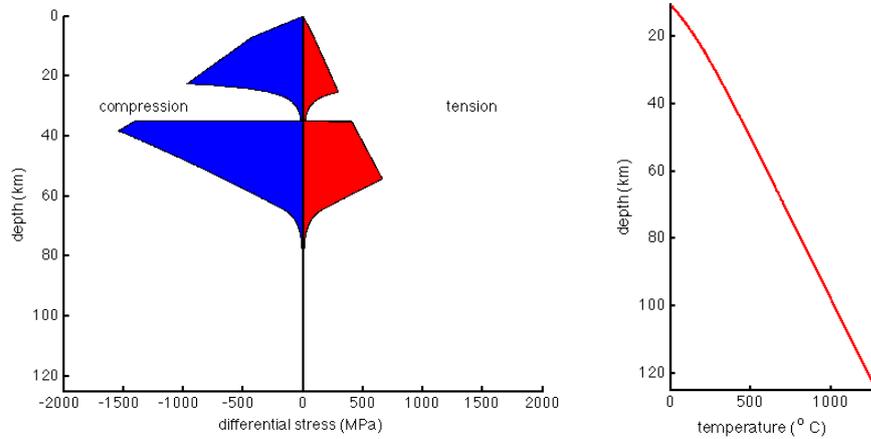


FIGURE 3.37 – Gauche : profil rhéologique de la lithosphère — dit aussi profil de Brace–Goetze — en régime hydrostatique ($\lambda = 0.4$) pour une croûte de quartz d'épaisseur 35 km et un manteau lithosphérique d'olivine jusqu'à une profondeur de 125 km. Il donne la contrainte différentielle minimale en fonction de la profondeur pour que les roches se déforment de manière permanente en régime cassant – selon la loi de friction de Coulomb – ou en régime ductile – selon la loi de fluage. La surface sous la courbe (en couleur ici) donne la résistance mécanique intégrée de la lithosphère. Droite : évolution de la température en fonction de la profondeur (géotherme) utilisé pour calculer le profil rhéologique de la figure de gauche.

connait :

1. La température en fonction de la profondeur = le géotherme. Il dépend (1) de la production de chaleur radiogénique dans la croûte, (2) de la température à la base de la lithosphère et (3) de sa conductivité thermique.
2. Les constantes mécaniques des roches. Elles sont mesurées en laboratoire pour des roches types de la croûte et du manteau, que l'on peut simplifier, respectivement, par des assemblages mono-cristallins de quartz et d'olivine. On distingue les paramètres qui définissent :
 - La loi de friction : coefficient de friction μ , cohésion σ_0 et rapport pression de pore/ pression lithostatique λ .
 - La loi de fluage : constante pré-exponentielle A , énergie d'activation Q , exposant de la loi de puissance n , taux de déformation $\dot{\epsilon}$.
3. La densité de la croûte et du manteau.

Par exemple, Bird and Piper (1986) utilisent le flux de chaleur mesuré en surface qu'ils divisent par une conductivité thermique pour obtenir un gradient géothermique. Ils calculent tous les kilomètres les valeurs des contraintes pour les lois de friction et de fluage et sélectionnent la valeur la plus faible. Ils corrigent ensuite le tenseur des contraintes de la pression standard. Ils intègrent ensuite numériquement pour un $\dot{\epsilon}_{ij}$ donné. Comme on ne connaît pas $\dot{\epsilon}_{ij}$ a priori, ce calcul est fait par itérations successives.

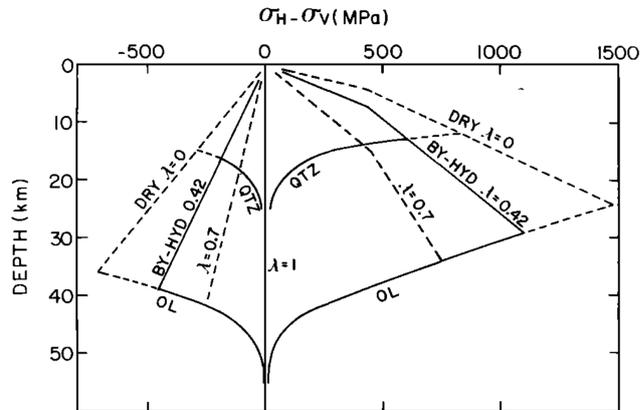


FIGURE 3.38 – Différence entre les contraintes horizontales maximales et minimales en fonction de la profondeur (Brace et Kohlstedt, 1980). Partie gauche = extension, partie droite = compression. Les courbes sont données pour plusieurs valeurs du facteur de pression λ . On rappelle que $\lambda = 0.4 \implies$ hydrostatique.

La figure originelle de Brace and Kohlstedt (1980, Figure 3.38), calculée pour du quartz et de l'olivine, montre que :

1. Pour un gradient géothermique de $15^\circ/\text{km}$, il existe une région résistante de la surface à environ 25 km pour le quartz et à 50 km pour l'olivine, avec un maximum de résistance à 15 km et 30 km respectivement. Pour le quartz, cela définit la croûte continentale supérieure cassante et est cohérent avec la profondeur des séismes – 0 à 15 km – en domaine continental. Pour l'olivine, cela inclut la totalité de la croûte océanique et une partie du manteau supérieur sous-jacent.
2. Ces profondeurs varient en fonction :
 - Du gradient géothermique : la loi de fluage se déplace vers le haut si la température augmente.
 - De la pression de pore : la pente de la loi de friction est plus raide quand P_f augmente. En d'autres termes, les roches sèches sont plus résistantes que les roches chargées d'eau.
 - Du régime de contraintes : les roches ont une résistance inférieure à l'extension qu'à la compression.
 - Du taux de déformation (non représenté ici).
 - De la minéralogie réelle : une croûte inférieure mafique (diabase) augmente la profondeur de la transition fragile-ductile. Cela peut expliquer la présence de séismes sous 15 km dans certains contextes, en particulier d'une croûte fortement intrudée de produits mafiques comme dans certains rifts.
3. De ~ 15 à 30 km la lithosphère continentale est faible et se déforme de manière ductile. C'est la croûte inférieure. Cela est cohérent avec l'absence de séismes au-delà de ~ 15 km de profondeur en domaine continental, qui indique que les roches s'y déforment par des processus aisésmique. La croûte inférieure faible et se déformant par fluage peut par exemple accommoder l'enracinement de grandes failles normales (Basin and Range)

ou constituer une zone de faiblesse permettant le décollement de nappes crustales en contexte de collision continentale.

Par ailleurs, le manteau supérieur présente un second maximum de résistance mécanique sous le Moho. Il peut se trouver en régime fragile (cassant) pour certaines combinaisons de température, de P_f et/ou de $\dot{\epsilon}$. Cela peut expliquer la présence de (rares) séismes sous-crustaux. Il est généralement admis – quoique discuté – que le manteau lithosphérique porte l’essentiel de la résistance mécanique de la lithosphère, voir discussion ci-dessous. Si le flux de chaleur est important, le manteau lithosphérique peut perdre tout ou partie de sa résistance mécanique : on parle parfois “d’érosion thermique” du manteau lithosphérique, par exemple sous l’effet de la chaleur advectée par un panache mantellique.

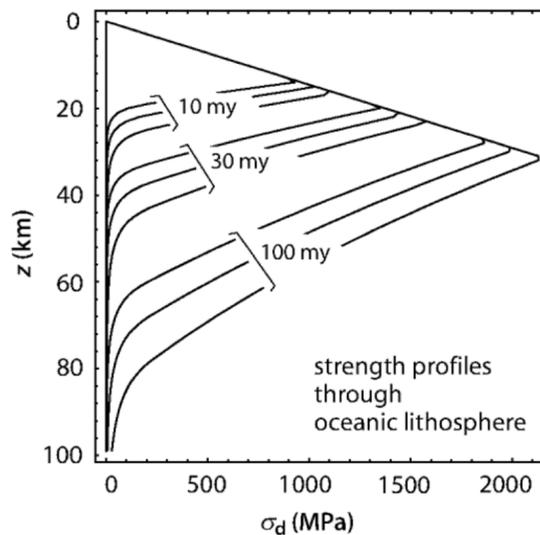


FIGURE 3.39 – Profils de résistance mécanique de la lithosphère océanique d’âge 10, 30 et 100 Ma. Pour chacun de ces âges, la loi de fluage est représentée pour trois taux de déformation, 10^{-16} , 10^{-14} , et 10^{-12} s $^{-1}$. Figure de Stüwe.

Les lois de comportement décrites ci-dessus s’appliquent aussi à la lithosphère océanique. Son profil de résistance mécanique (figure 3.39) est cependant très différent car :

- Le géotherme océanique dépend de l’âge de la lithosphère ;
- Il n’y a pas de production de chaleur radiogénique dans la croûte océanique ;
- La croûte océanique ne contient pas de quartz, son comportement mécanique peut être approximé par celui de l’olivine.

De fait, le profil de résistance mécanique de la lithosphère océanique contient un seul maximum dont la profondeur dépend de l’âge de la croûte océanique.

On peut définir une résistance mécanique “moyenne” de la lithosphère en intégrant la courbe de Brace-Kohlstedt en fonction de la profondeur pour une lithosphère d’épaisseur L :

$$F = \int_0^L \sigma_d(z) dz \quad (3.144)$$

où F est exprimé en $\text{Pa}\cdot\text{m} = \text{N}/\text{m}$. C'est une force par unité de longueur (figure 3.36). La résistance mécanique intégrée varie significativement en fonction du taux de déformation. Elle est de l'ordre de 10–100 TN/m. Ces magnitudes sont du même ordre de grandeur que celles des forces qui concourent aux mouvements des plaques.

La comparaison des résistances mécaniques intégrées des lithosphères continentales et océaniques montre que ces dernières sont beaucoup plus résistantes sauf lorsqu'elles sont très jeunes. Ceci est cohérent avec la quasi-absence de séismes et de déformation en domaine océanique intraplaque (l'océan indien est une exception). De fait la lithosphère océanique, grâce à sa forte résistance mécanique, transmet efficacement les contraintes générées aux rides médio-océaniques – la poussée à la ride – vers les continents.

Une question importante, toujours débattue, est de savoir si la résistance mécanique de la lithosphère tient surtout à la résistance frictionnelle des failles dans la croûte supérieure ou à un manteau lithosphérique résistant (Figure 3.40). Les défenseurs du premier modèle, dit “*jelly sandwich*”, utilisent le paradigme explicite ci-dessus d'après lequel la croûte inférieure de faible résistance mécanique est prise en sandwich entre une croûte supérieure et un manteau plus résistants.

FIG BUROV/WATTS

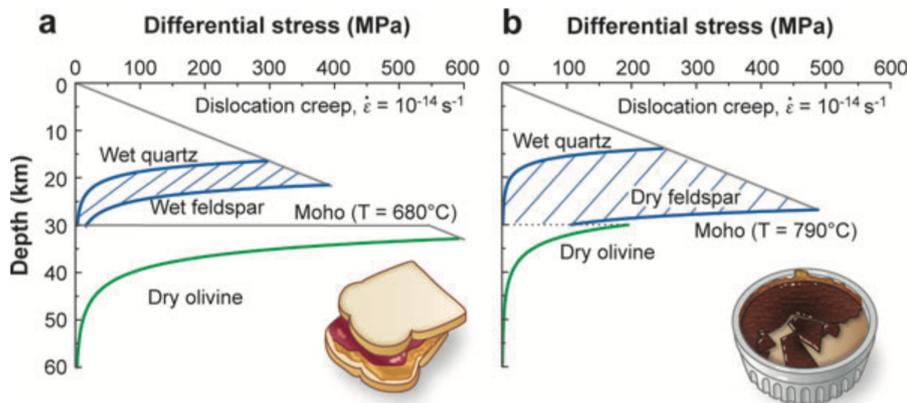


FIGURE 3.40 – Représentation schématique des modèles lithosphériques de type “*jelly sandwich*” ou “*crème brûlée*” (Bürgmann et Dresen, 2008).

Les proposants du second modèle, dit “*crème brûlée*”, avancent la quasi-absence de séismes dans le manteau lithosphérique et la faible épaisseur élastique équivalente de la lithosphère pour proposer un manteau lithosphérique faible (flux de chaleur plus important et/ou matériau hydraté). Les défenseurs du “*jelly sandwich*” rétorquent alors qu’il faut des contraintes différentielles très importantes pour activer la rupture dans le manteau supérieur d’après la loi de Byerlee, contraintes qui ne sont jamais atteintes – en d’autres termes le manteau supérieur frictionnel est au contraire mécaniquement très résistant... Ils argumentent aussi que ce modèle n’explique pas la persistance des reliefs montagneux ni l’intégrité des slabs lors de leur subduction dans le manteau (Burov and Watts, 2006). Ce modèle s’applique par contre peut-être à certains contextes comme par exemple les rifts jeunes et chauds (Basin and Range, Salton Sea, Taupo volcanic zone).

Enfin, il est très probable qu'aucun des deux modèles "*jelly sandwich*" ou "crème brûlée" ne s'applique aux grandes failles des frontières de plaques où la résistance mécanique de la lithosphère est probablement réduite par des processus thermiques (*shear heating*), le développement d'une anisotropie minérale ("fabrique"), la présence de fluides, la réduction de taille des grains, etc. L'orientation des contraintes, le flux de chaleur et des observations sismologiques le long de grandes failles actives comme celle de San Andreas indiquent une faible résistance frictionnelle ($\mu < 0.2$, Zoback et al., 1987).

Observations

Effets non-linéaires