

## Chapitre 2

# Pesanteur et géoïde



# Table des matières

<b>2</b>	<b>Pesanteur et géoïde</b>	<b>1</b>
2.1	Introduction . . . . .	4
2.2	La pesanteur terrestre . . . . .	4
2.2.1	Attraction gravitationnelle d'une Terre sphérique . . . . .	4
2.2.2	Altération pour une Terre aplatie aux pôles . . . . .	8
2.2.3	Altération pour une Terre en rotation . . . . .	10
2.2.4	Moment d'inertie . . . . .	11
2.3	Le potentiel de pesanteur et le géoïde . . . . .	14
2.3.1	Potentiel du champ normal . . . . .	14
2.3.2	Ellipsoïde de référence . . . . .	16
2.3.3	Pesanteur sur l'ellipsoïde de référence . . . . .	18
2.3.4	Equipotentielle du champ de pesanteur réel – LE géoïde	19
2.4	Les altitudes . . . . .	23
2.4.1	Quelques définitions . . . . .	23
2.4.2	Principe de la détermination de l'altitude . . . . .	24
2.4.3	Le nivellement . . . . .	25
2.4.4	Altitude orthométrique . . . . .	26
2.4.5	Altitude normale . . . . .	28
2.4.6	Subtilités des altitudes en France . . . . .	29
2.5	Les anomalies de pesanteur . . . . .	31
2.5.1	Calcul des anomalies . . . . .	31
2.5.2	Réduction des mesures de la pesanteur . . . . .	35
2.5.3	Les anomalies de pesanteur . . . . .	37
2.5.4	Quelques exemples . . . . .	41
2.6	Le géoïde à l'isostasie . . . . .	42

2.6.1	Moment de la distribution de densité . . . . .	42
2.6.2	Les forces qui maintiennent la topographie . . . . .	45
2.7	Mesure du champ de pesanteur terrestre . . . . .	46
2.7.1	Pendule . . . . .	46
2.7.2	Déviaton de la verticale . . . . .	47
2.7.3	Mesures relatives . . . . .	48
2.7.4	Gravimètres absolus . . . . .	49
2.7.5	Précision des mesures . . . . .	50
2.7.6	Gravimétrie spatiale . . . . .	51

## 2.1 Introduction

Toute masse à la surface où à l'intérieur de la Terre subit une force dont l'origine est l'attraction gravitationnelle de la Terre (et des autres corps proches ou très massifs : la lune et le soleil) et une force dont l'origine est la rotation de la terre. La somme de ces deux forces est appelée "pesanteur". En anglais, pesanteur se traduit par *gravity*.

## 2.2 La pesanteur terrestre

### 2.2.1 Attraction gravitationnelle d'une Terre sphérique

Nous cherchons à déterminer l'attraction gravitationnelle à la surface d'une Terre sphérique immobile.

La loi de la gravitation de Newton nous permet d'écrire la force gravitationnelle exercée sur une masse  $m$  située au point  $P$ , à l'extérieur de la Terre, par un petit élément de masse  $dm$ , comme indiqué sur la figure 2.1 :

$$df_m = G \frac{m dm}{b^2} \tag{2.1}$$

où  $G$  est la constante de gravitation universelle ( $6.673 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$ ) et  $b$  la distance entre  $m$  et  $dm$ .  $m$  est ici la "masse grave", propriété de la matière qui crée un champ de gravité autour d'elle.

Le principe fondamental de la dynamique nous permet aussi d'écrire que la force exercée en  $P$  de masse  $m$  par l'élément de masse  $dm$  est liée à l'attraction gravitationnelle de  $dm$ , que nous appellerons  $dg_m$ , par :

$$df_m = m dg_m \tag{2.2}$$

$m$  est ici la "masse inerte", propriété de la matière qui se manifeste par son inertie et donc la force à exercer pour l'accélérer.

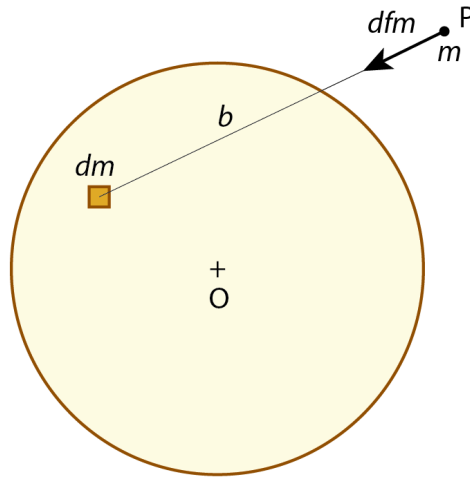


FIGURE 2.1

En l'absence de toute autre force que celle liée à l'attraction gravitationnelle causée par  $dm$ , les deux équations précédentes donnent :

$$dg_m = G \frac{dm}{b^2} \quad (2.3)$$

On fait ici l'hypothèse que masse inerte = masse grave, c'est-à-dire que le principe d'équivalence est valide. Celui-ci ( $m_g = m_i$ ) est actuellement démontré à  $10^{-12}$  près. La mission spatiale française MICROSCOPE doit bientôt tester cette équivalence avec une précision de  $10^{-15}$ . Une violation du principe d'équivalence n'aurait cependant aucun impact détectable sur ce qui suit !

Supposons que la totalité de la masse de la Terre  $M$ , sphérique et de rayon  $r$  soit concentrée en son centre. L'équation 2.3 permet d'écrire l'accélération gravitationnelle à la surface de la Terre  $g_m$  :

$$g_m = G \frac{M}{r^2} \quad (2.4)$$

Pour une Terre plus réaliste, et si la distribution des masses  $dm$  était parfaitement connue, il suffirait d'utiliser l'équation 2.3 et d'intégrer  $dm$  sur l'ensemble de cette distribution pour trouver  $g_m$ . Dans la réalité, cette information n'est pas connue. On commence donc par chercher a valeur de  $g_m$  pour des cas simples.

Cherchons maintenant à déterminer l'attraction gravitationnelle exercée par une Terre sphérique de rayon  $a$  en un point  $P$  situé à l'extérieur de cette masse à une distance  $r$  de son centre  $O$ . On fait l'hypothèse que la distribution de densité  $\gamma$  dépend uniquement de la distance  $r'$  à son centre. Le point  $P$  est tel que la droite  $OP$  est colinéaire avec l'axe de rotation de la Terre. Ceci simplifie la démonstration mais n'enlève aucune généralité au résultat.

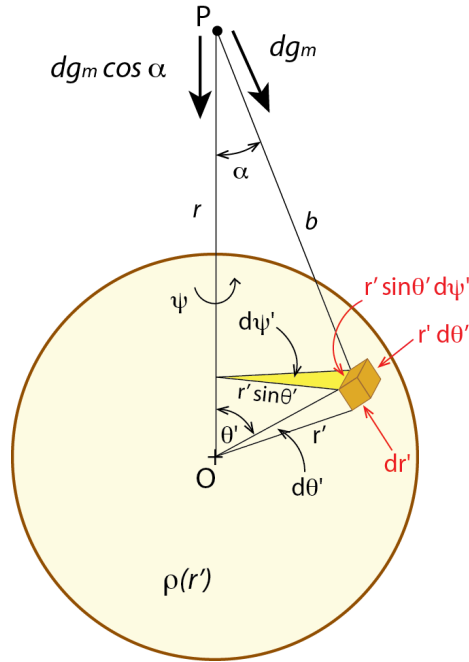


FIGURE 2.2

On considère un petit élément de masse cubique  $dm$  dont les coordonnées sphériques sont  $r'$ ,  $\theta'$ ,  $\psi'$  et situé à une distance  $b$  de  $P$ . Il exerce, en  $P$ , une attraction gravitationnelle  $dg_m$  dirigée vers  $dm$  dont la composante selon  $OP$  est :

$$dg_m \cos \alpha = \frac{G dm}{b^2} \cos \alpha \quad (2.5)$$

L'attraction gravitationnelle de la planète est la somme de celle exercée par ces éléments de masse, soit :

$$g_m = G \int \frac{\cos \alpha}{b^2} dm \quad (2.6)$$

Les longueurs des côtés de l'élément de masse  $dm$ , en coordonnées sphériques, sont :

$$\text{radial : } dr' \quad (2.7)$$

$$\text{latitudinal : } r' d\theta' \quad (2.8)$$

$$\text{longitudinal : } r' \sin \theta' d\psi' \quad (2.9)$$

On peut donc écrire l'intégrale précédente de manière explicite maintenant :

$$g_m = G \int_0^a \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\rho(r') r'^2 \sin \theta' \cos \alpha}{b^2} d\psi' d\theta' dr' \quad (2.10)$$

L'intégration sur  $\psi'$  est  $2\pi$  puisque l'expression intégrée ne dépend pas de  $\psi'$ . Donc :

$$g_m = 2\pi G \int_0^a \int_0^\pi \frac{\rho(r') r'^2 \sin \theta' \cos \alpha}{b^2} d\theta' dr' \quad (2.11)$$

Il faut maintenant s'occuper du terme  $\cos \alpha$ . La loi des cosinus donne :

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + r^2 - r'^2}{2rb} \quad (2.12)$$

On voit que cette expression est une fonction de  $b$ , il sera donc plus simple d'intégrer l'équation 2.11 en fonction de  $b$ . On fait donc un changement de variable d'intégration. La loi des cosinus permet aussi d'écrire :

$$\cos \theta' = \frac{r'^2 + r^2 - b^2}{2rr'} \quad (2.13)$$

La dérivée de cette expression pour  $r$  et  $r'$  constants donne :

$$\sin \theta' d\theta' = \frac{b}{rr'} db \quad (2.14)$$

Quand  $\theta'$  varie de 0 à  $\pi$ ,  $b$  varie de  $r - r'$  à  $r + r'$ . On peut donc maintenant écrire :

$$g_m = 2\pi G \int_0^a \rho(r') \int_{r-r'}^{r+r'} \frac{r'^2}{b^2} \frac{b}{rr'} \frac{b^2 + r^2 - r'^2}{2rb} db dr' \quad (2.15)$$

On simplifie et déplace les variables à l'extérieur des intégrales où elles n'interviennent pas :

$$g_m = 2\pi G \int_0^a \rho(r') \int_{r-r'}^{r+r'} \frac{r'}{b} \frac{1}{r} \frac{b^2 + r^2 - r'^2}{2rb} db dr' \quad (2.16)$$

$$= \frac{\pi G}{r^2} \int_0^a r' \rho(r') \int_{r-r'}^{r+r'} \frac{b^2 + r^2 - r'^2}{b^2} db dr' \quad (2.17)$$

$$= \frac{\pi G}{r^2} \int_0^a r' \rho(r') \int_{r-r'}^{r+r'} \left( 1 + \frac{r^2 - r'^2}{b^2} \right) db dr' \quad (2.18)$$

L'intégrale selon  $b$  est égale à  $4r'$ , d'où :

$$g_m = \frac{4\pi G}{r^2} \int_0^a r'^2 \rho(r') dr' \quad (2.19)$$

La masse d'une sphère de rayon  $a$  à l'intérieur de laquelle la densité varie uniquement radialement est donnée par :

$$M = 4\pi \int_0^a r'^2 \rho(r') dr' \quad (2.20)$$

On retrouve bien, pour  $\rho = \text{constante}$ , que  $M = 4\pi a^3 \rho / 3$ .

On en déduit que l'attraction gravitationnelle en  $P$  hors d'une Terre sphérique où la distribution de densité est de symétrie radiale est :

$$g_m = \frac{GM}{r^2} \quad (2.21)$$

soit la même que si la totalité de la masse de la Terre était concentrée en son centre.

Malgré les variations latérales de densité à l'intérieur de la Terre et malgré la distorsion de sa forme sous l'effet de sa rotation, on constate dans la pratique que l'équation 2.21 est une très bonne approximation de  $g_m$ .

L'unité S.I. de  $g_m$  est le  $\text{m s}^{-2}$ , mais les variations de  $g_m$  à la surface de la Terre sont de l'ordre de  $10^{-8}$  à  $10^{-3} \text{ m s}^{-2}$ . De fait, afin de rendre ces variations plus visibles numériquement, on utilise une unité différente, le Gal, pour *Galileo* :

- $1 \text{ Gal} = 1 \text{ cm s}^{-2} = 10^{-2} \text{ m s}^{-2}$
- $1 \text{ mGal} = 10^{-5} \text{ m s}^{-2}$
- $1 \mu\text{Gal} = 10^{-8} \text{ m s}^{-2}$
- À la surface de la Terre,  $g_m \approx 9.8 \text{ m s}^{-2} = 982\,000 \text{ mGal}$

### 2.2.2 Altération pour une Terre aplatie aux pôles

La distorsion de la forme de la Terre sous l'effet de sa rotation induit une légère altération du terme purement "central" de l'équation 2.21. Cette altération est uniquement fonction de la latitude  $\varphi$  du point d'observation dans le cas d'une Terre aplatie aux pôles par sa rotation. Cette altération est la somme d'une composante radiale  $g'_r$  qui s'ajoute à l'attraction centrale (eq. 2.21) et d'une composante tangentielle  $g'_t$  due à l'aplatissement polaire (ou, de manière équivalente, au bourrelet équatorial) de la Terre.

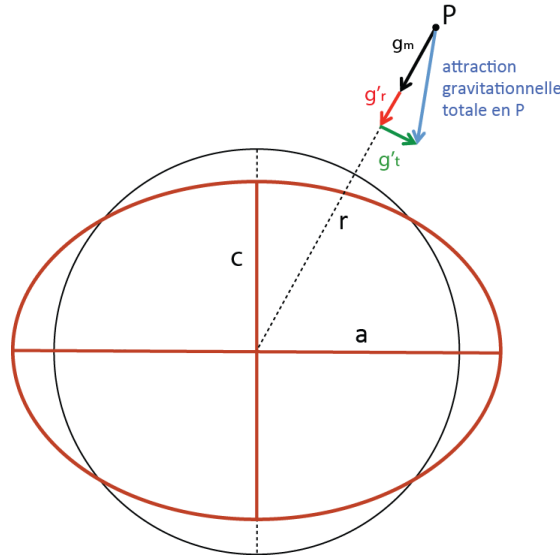


FIGURE 2.3

On peut donc écrire que l'attraction gravitationnelle totale au point  $P$  est :

$$\left[ \left( \frac{GM}{r^2} + g'_r \right)^2 + g'_t{}^2 \right]^{1/2} = \left[ \left( \frac{GM}{r^2} \right)^2 + 2 \left( \frac{GM}{r^2} \right) g'_r + g'_r{}^2 + g'_t{}^2 \right]^{1/2} \quad (2.22)$$

Les termes quadratiques sont très petits par rapport à  $GM/r^2$ , on peut les



négliger. L'attraction gravitationnelle devient alors :

$$\begin{aligned} \left[ \left( \frac{GM}{r^2} \right)^2 + 2 \left( \frac{GM}{r^2} \right) g'_r \right]^{1/2} &= \frac{GM}{r^2} \left[ 1 + \frac{2g'_r}{GM/r^2} \right]^{1/2} \\ &= \frac{GM}{r^2} \left[ 1 + \frac{g'_r}{GM/r^2} \right] \\ &= \frac{GM}{r^2} + g'_r \end{aligned} \quad (2.23)$$

On a utilisé le développement limité binomial :

$$\left[ 1 + \frac{2g'_r}{GM/r^2} \right]^{1/2} = 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{2g'_r}{GM/r^2} \right) - \frac{1}{8} \left( \frac{2g'_r}{GM/r^2} \right)^2 \dots \quad (2.24)$$

que l'on tronque à l'ordre un.

On constate que l'attraction gravitationnelle d'une Terre ellipsoïdale est égale à l'attraction centrale, altérée par une petite composante radiale qui reflète la différence de répartition des masses par rapport à une Terre de symétrie purement sphérique. La composante tangentielle induite par la forme ellipsoïdale d'une Terre en rotation est négligeable.

On montre que l'attraction gravitationnelle d'une Terre ellipsoïdale peut s'exprimer en fonction de ses moments d'inertie  $A$  (autour de l'axe  $x$ ),  $B$  (autour de l'axe  $y$ ) et  $C$  (autour de l'axe  $z$ ). Pour un corps axi-symétrique autour de son axe de rotation  $x$ , on a  $B = A$ . On peut montrer que :

$$g_m = \frac{GM}{r^2} - \frac{3G(C - A)}{2r^4} (3 \sin^2 \phi - 1) \quad (2.25)$$

Cette formule est une version simplifiée de celle de McCullagh pour un corps axi-symétrique. L'appatissement polaire implique que  $C > A$ . De fait,  $g_m$  augmente à la surface de la Terre de l'équateur vers les poles.

On définit "l'appatissement dynamique" de la Terre,  $J_2$  comme :

$$J_2 = \frac{C - A}{Ma^2} \quad (2.26)$$

où  $a$  est le rayon équatorial.  $J_2$  est une quantité appréciée car elle peut être directement déduite du suivi de la trajectoire de satellites artificiels. Pour la Terre,  $J_2 = 1.082639 \times 10^{-3}$ .

On peut donc écrire  $g_m$  en terme de  $J_2$  :

$$g_m = \frac{GM}{r^2} - \frac{3GMa^2 J_2}{2r^4} (3 \sin^2 \phi - 1) \quad (2.27)$$

Les valeurs actuellement acceptées sont :

- $a = 6\,378\,137$  m
- $GM = 3.98600440 \times 10^{14}$  m<sup>3</sup>s<sup>-2</sup>
- $J_2 = 1.0826265 \times 10^{-3}$

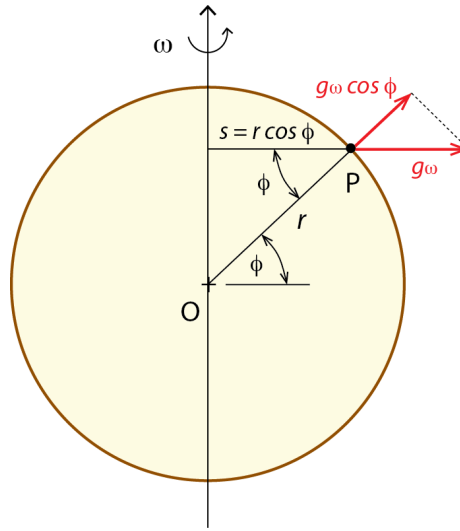


FIGURE 2.4

### 2.2.3 Altération pour une Terre en rotation

Un élément de masse à la surface de la Terre subit, en plus de l'attraction gravitationnelle de la Terre, une force axifuge due à la rotation de la planète dont la vitesse angulaire de rotation est  $\omega$ . Cette force est dirigée vers l'extérieur, dans une direction perpendiculaire à l'axe de rotation de la Terre. L'accélération correspondante, notée  $g_\omega$ , est :

$$g_\omega = \omega^2 s \quad (2.28)$$

où  $s$  est la distance du point considéré à l'axe de rotation dans une direction perpendiculaire à celui-ci. Notons  $r$  la distance radiale du point considéré au centre de la Terre et  $\phi$  sa latitude. On a alors :

$$s = r \cos \phi \quad (2.29)$$

donc :

$$g_\omega = \omega^2 r \cos \phi \quad (2.30)$$

La composante radiale de  $g_\omega$  est donc :

$$g'_r = g_\omega \cos \phi g'_r = -\omega^2 r \cos^2 \phi \quad (2.31)$$

ou le signe  $-$  reflète le fait que  $g'_r$ , maximale à l'équateur et égale à zero aux pôles, agit en sens opposé de l'attraction gravitationnelle de la Terre.

Finalement, on obtient l'accélération de la pesanteur, somme d'un terme central, de l'effet de l'aplatissement dynamique de la Terre et de sa rotation :

$$g = \frac{GM}{r^2} - \frac{3GMa^2 J_2}{2r^4} (3 \sin^2 \phi - 1) - \omega^2 r \cos^2 \phi \quad (2.32)$$

avec  $\omega = 7.292115 \times 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}$ .

Cette équation indique que  $g_m$  à la surface de la Terre ne dépend que de la latitude du point considéré. Elle n'inclut évidemment pas les variations latérales de densité dans la Terre ou l'attraction gravitationnelle des corps célestes, notamment de la lune (proche) ou du soleil (massif).

### 2.2.4 Moment d'inertie

Nous avons vu que l'attraction gravitationnelle d'une Terre où la distribution de densité est de symétrie radiale est la même que si la totalité de la masse de la Terre était concentrée en son centre (équation 2.21). Dans ce cas, comment peut-on déterminer la densité de ses deux enveloppes sphériques principales que sont le manteau et le noyau ? La même question se pose pour toutes les planètes telluriques. La solution passe par le calcul et la mesure du moment d'inertie de la Terre.

Par définition, le moment d'inertie d'une masse ponctuelle  $m$  en rotation autour d'un axe est  $I = m d^2$  où  $r$  est la distance de la masse à l'axe de rotation. Cette masse en rotation possède un moment angulaire (ou moment cinétique)  $L = I \omega$  où  $\omega$  est la vitesse angulaire de rotation. Ceci est analogue à la quantité de mouvement  $p$  d'une masse  $m$  en déplacement linéaire à une vitesse  $v$ , donnée par  $p = m v$ . De la même façon que la masse oppose une résistance à la vitesse linéaire, le moment d'inertie oppose une résistance à la rotation.

On voit donc qu'une masse possède un moment d'inertie qui est d'autant plus important qu'elle est éloignée de l'axe de rotation. De fait, si on déplace cette masse pour la rapprocher de l'axe de rotation alors  $I$  diminue, donc  $J$  diminue, donc la vitesse angulaire de rotation  $\omega$  doit augmenter de manière à conserver le moment cinétique. De la même façon, si la vitesse angulaire de rotation  $\omega$  augmente, alors  $I$  doit diminuer pour conserver le moment cinétique ; la masse considérée doit se rapprocher de son axe de rotation. On se souvient ici de l'analogie du patineur.

On peut généraliser au cas d'un solide de forme et de distribution de masse quelconque en sommant la contribution de chaque élément de masse. Le moment cinétique s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum_i m_i \vec{r}_i \wedge \vec{v}_i \\ &= \sum_i m_i \vec{r}_i \wedge (\omega \wedge \vec{v}_i) \\ &= \sum_i m_i \left( r_i^2 \omega - (\dot{r}_i) \vec{r}_i \right) \end{aligned} \quad (2.33)$$

Choisissons par exemple de développer cette équation pour la composante  $x$  :

$$\begin{aligned} L_x &= \sum_i m_i r_i^2 \omega_x - \sum_i m_i (x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z) x_i \\ &= \omega_x \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) - \omega_y \sum_i m_i x_i y_i - \omega_z \sum_i m_i x_i z_i \end{aligned} \quad (2.34)$$

On obtient pour la première somme le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe  $x$ , que nous noterons  $I_x$ . Les deux autres sommes, homogènes à un moment

d'inertie, sont appelés produits d'inertie  $I_{xy}$  et  $I_{xz}$ . On voit donc que l'on peut écrire  $L_x$  sous la forme :

$$L_x = [I_x - I_{xy} - I_{xz}] \omega \quad (2.35)$$

Le même développement pour les composantes  $y$  et  $z$  permet d'écrire le moment cinétique de ce solide sous la forme :

$$\vec{L} = I \vec{\omega} \quad (2.36)$$

avec

$$I = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) & -\sum_i m_i x_i y_i & -\sum_i m_i x_i z_i \\ -\sum_i m_i x_i y_i & \sum_i m_i (x_i^2 + z_i^2) & -\sum_i m_i y_i z_i \\ -\sum_i m_i x_i z_i & -\sum_i m_i y_i z_i & \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

Le moment d'inertie d'un solide traduit donc de manière compacte la distribution des masses à l'intérieur de celui-ci : les masses y sont "pondérées" par leur position dans le système de coordonnées choisi. De plus, c'est un tenseur d'ordre deux. On peut donc trouver un système d'axes tels que  $I$  soit une matrice diagonale. Ce système est celui des axes principaux d'inertie et les composantes diagonales  $A, B, C$  sont les moments principaux d'inertie du solide :

$$\bar{I} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

Pour un sphéroïde, une sphère aplatie aux pôles, soit la forme approchée de la Terre, les moments d'inertie par rapport aux axes  $Ox$  et  $Oy$  sont égaux :

$$\bar{I} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

Pour une sphère homogène de rayon  $R$ , les moments d'inertie par rapport aux trois axes sont égaux. L'équation 2.37 permet d'écrire :

$$\begin{aligned} 3I &= I_x + I_y + I_z \\ &= \int_V [(O_y^2 + O_z^2) + (O_z^2 + O_x^2) + (O_x^2 + O_y^2)] dm \\ &= 2 \int_V (O_x^2 + O_y^2 + O_z^2) dm \\ &= 2 \int_0^R r^2 (4\pi\rho r^2 dr) \\ &= 8\pi\rho \int_0^R r^4 dr \\ &= \frac{8\pi\rho}{5} R^5 \end{aligned} \quad (2.40)$$

## TABLE DES MATIÈRES

---

On a utilisé  $dm = 4\pi\rho r^2 dr$  en se souvenant que l'aire d'une sphère est donnée par  $S_{sphere} = 4\pi r^2$ . On a donc :

$$I = \frac{8\pi\rho}{15} R^5 \quad (2.41)$$

Pour une coque sphérique homogène de rayon interne  $R_1$  et externe  $R_2$ , on procède de la même façon que ci-dessus en intégrant entre ces deux valeurs :

$$\begin{aligned} 3I &= 2 \int_{R_1}^{R_2} r^2 (4\pi\rho r^2 dr) \\ &= \frac{8\pi\rho}{15} (R_2 - R_1)^5 \end{aligned} \quad (2.42)$$

Exprimons le moment d'inertie d'une sphère homogène de rayon  $R$  en utilisant cette fois sa masse  $M = 4/3 \pi R^3 \rho$ . L'équation 2.41 devient :

$$I = \frac{2}{5} M R^2 = 0.4 M R^2 \quad (2.43)$$

On définit le "facteur de moment d'inertie"  $f$  comme :

$$f = \frac{I}{M R^2} \quad (2.44)$$

Nous venons de démontrer que, pour une sphère homogène,  $f = 0.4$ . Hors les mesures géodésiques montrent que, pour la Terre,  $f = 0.3307$ . Cela implique que la distribution des masses dans la Terre n'est pas homogène, et que les masses les plus denses sont concentrées vers son centre. En effet, le "moment" de densité pondère la contribution des masses en fonction de leur distance au géocentre, comme expliqué ci-dessus.

Revenons à la question initiale de la détermination de la densité du manteau et du noyau. Si l'on suppose deux enveloppes sphériques concentriques, chacune de densité homogène, les expressions précédentes permettent d'écrire :

$$I = \rho_{noyau} \frac{8\pi}{15} R_{noyau}^5 + \rho_{manteau} \frac{8\pi}{15} (R^5 - R_{noyau}^5) \quad (2.45)$$

On peut par ailleurs décomposer la masse de la Terre de la même manière :

$$M = \rho_{noyau} \frac{4\pi}{3} R_{noyau}^3 + \rho_{manteau} \frac{4\pi}{4} (R^3 - R_{noyau}^3) \quad (2.46)$$

Les inconnues sont  $R_{noyau}, \rho_{noyau}, \rho_{manteau}$ . La géodésie permet de mesurer  $R, M, I$ . Si l'on fait des hypothèses sur la valeur de  $R_{noyau}$ , on se retrouve face à un système de deux équations linéaires avec deux inconnues. On peut écrire le problème direct :

$$\begin{bmatrix} M \\ I \end{bmatrix} = \frac{4\pi}{3} \begin{bmatrix} R_c^3 & (R^3 - R_{noyau}^3) \\ \frac{2\pi}{5} R_{noyau}^5 & \frac{2\pi}{5} (R^5 - R_{noyau}^5) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_{noyau} \\ \rho_{manteau} \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

Pour  $M = 5.97e24$  kg,  $R = 6371$  km et  $R_{noyau} = 3471$  km on trouve  $\rho_{noyau} = 12555$  kg/m<sup>3</sup> et  $\rho_{manteau} = 4155$  kg/m<sup>3</sup>.

Ces valeurs sont cohérentes, par exemple, avec celles mesurées à partir de la vitesse des ondes sismiques  $P$ . En 1961, Birch montre que cette vitesse  $V_p$  est proportionnelle à la masse atomique moyenne  $m$  des minéraux traversés, soit  $V_p = a m + b \rho$ , où  $\rho$  est la densité. Il utilise des observations de  $V_p$  lors d'expériences par ondes de choc – qui permettent d'atteindre des pressions similaires à celle du manteau – pour une série de métaux et détermine un ensemble de droites dans un diagramme  $\rho, V_p$  (Figure 2.5). Il y superpose les domaines correspondants au manteau tirés d'observations sismologiques et conclut que le noyau est composé de fer et le manteau d'éléments plus légers.

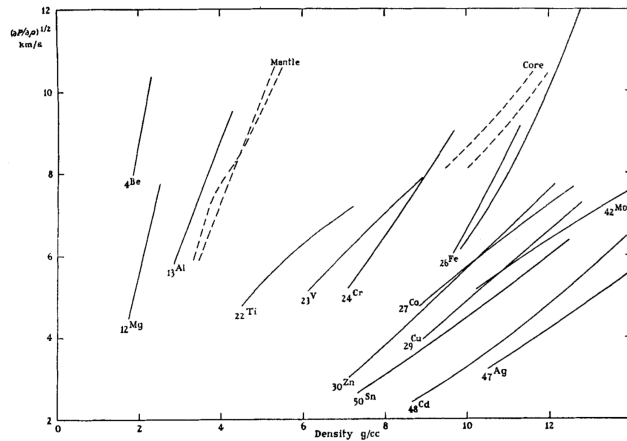


FIGURE 2.5 – Vitesse des ondes  $P$  (ordonnées) en fonction de la densité pour une série de métaux déterminées à partir d'expériences par ondes de choc qui permettent d'atteindre des pressions de plusieurs megabars. Les chiffres indiquent les numéros atomique des éléments. Les domaines du manteau et du noyau terrestres tels que déduits de la sismologie sont indiqués par des traits pointillés. Figure originelle de F. Birch, “Composition of the Earth’s Mantle”, Geophysical Journal, 1961.

## 2.3 Le potentiel de pesanteur et le géoïde

### 2.3.1 Potentiel du champ normal

Le champ de pesanteur terrestre est associé à un potentiel,  $U$ . Par définition, le potentiel de pesanteur est le travail (force  $\times$  distance) nécessaire pour déplacer une masse unitaire de l’infini à sa position  $r$  dans le champ de pesanteur. C’est donc l’intégrale de  $g_m$  (équation 2.32) dans la direction radiale :

$$U = \int_{\infty}^r g \, dr' = -\frac{GM}{r} + \frac{GMa^2 J_2}{2r^3} (3 \sin^2 \phi - 1) - \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \cos^2 \phi \quad (2.48)$$

Un élément de masse a donc, du fait de sa position dans le champ de pesanteur terrestre, une énergie potentielle de pesanteur. Cette énergie est l’opposé du

travail nécessaire pour la déplacer de l'infini à sa position. On pose par convention que l'énergie potentielle est nulle à une distance infinie de la Terre. Elle est négative à son voisinage. La Terre agit donc comme un puits de potentiel.

On pourrait écrire, de manière équivalente, que la force de pesanteur dérive du potentiel du champ de pesanteur. C'est généralement la manière de procéder en physique. On écrit donc que la force de pesanteur est le gradient du potentiel de pesanteur :

$$\vec{f} = -\nabla U \quad (2.49)$$

On appelle surface équipotentielle, ou équipotentielle, une surface sur laquelle le potentiel de pesanteur  $U$  est constant. Le travail mis en oeuvre pour déplacer un élément de masse le long d'une surface équipotentielle est, par conséquent, nul. Pour un corps sphérique dans lequel la distribution est de symétrie sphérique (une Terre très simplifiée), les surfaces équipotentielles sont des sphères.

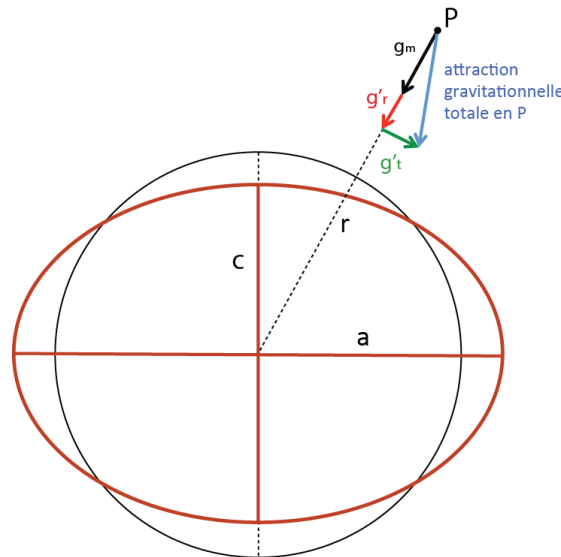


FIGURE 2.6

Puisque la force de pesanteur est le gradient du potentiel, il suit que cette force – donc  $\vec{g}$  – est perpendiculaire en tout point aux équipotentielles de pesanteur. On définit la verticale comme la direction de  $\vec{g}$ , les équipotentielles définissent des horizontales – au sens physique du travail à exercer pour déplacer une masse.

La surface de la mer au repos, c'est-à-dire sans courants ni vagues, matérialise une de ces équipotentielles. On l'appelle le géoïde : l'équipotentielle qui correspond au mieux, en moyenne sur l'ensemble du globe, au niveau de la mer. Cette surface équipotentielle sert de référence pour la mesure des altitudes. En domaine continental elle se trouve – sauf rares exceptions – sous le relief.

L'équation 2.48 définit le potentiel pour une Terre sans variations latérales de densité, une approximation valide au premier ordre. Le potentiel de cette Terre simplifiée est appelé "potentiel normal", par opposition au "potentiel réel" de la vraie Terre, avec ses variations latérales de densité.

### 2.3.2 Ellipsoïde de référence

Quelle est la forme d'une équipotentielle du champ de pesanteur normal? On peut montrer que  $U = \text{constante}$  implique que :

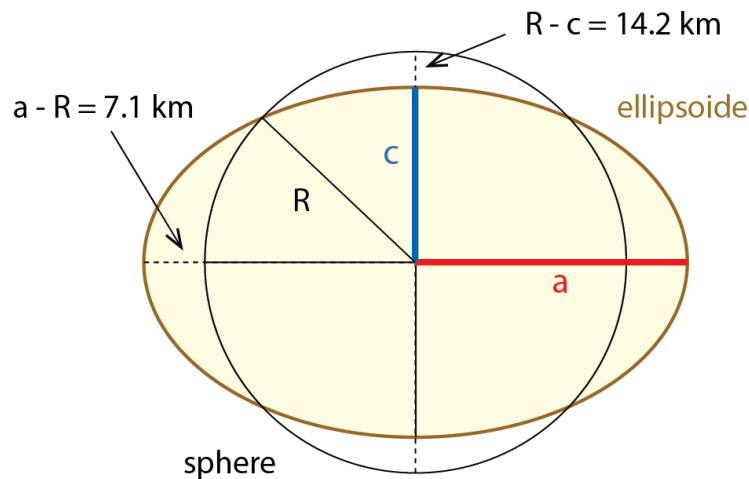
$$\frac{r_0^2 \cos^2 \phi}{a^2} + \frac{r_0^2 \sin^2 \phi}{a^2} (1 - f^2) = 1 \quad (2.50)$$

où  $r_0$  est la distance de l'équipotentielle au centre de masse,  $\phi$  la latitude,  $a$  le rayon équatorial terrestre et  $f = (a-c)/a$  avec  $c = \text{rayon polaire}$ . Cette équation décrit un ellipsoïde de révolution (= sphéroïde). Les équipotentielles du champ de pesanteur normal sont donc des ellipsoïdes de révolution de semi-grand axe  $a$ , semi-petit axe  $c$  et aplatissement  $f$ .

Il découle de l'équation 2.50 que

$$r_0 = a \left[ 1 + \frac{2f - f^2}{1 - f^2} \sin^2 \phi \right]^{-1/2} \quad (2.51)$$

Cette équation avec  $a = 6378.137 \text{ km}$  et  $f = 1/298.257222$  définit le géoïde de référence, qui a la forme d'un ellipsoïde. On l'appelle, de fait, "ellipsoïde de référence".



$$\text{WGS84} \begin{cases} a = 6378.136 \text{ km} \\ c = 6256.751 \text{ km} \\ R = 6371.000 \text{ km} \end{cases}$$

FIGURE 2.7

Cet ellipsoïde de référence global, défini de manière conventionnelle, s'appelle WGS84 pour *World Geodetic System 1984*". La différence de longueur entre ses axes polaire et équatorial est de 21.3 km. Cet ellipsoïde de référence sert à définir des "coordonnées ellipsoïdales" :

- Le méridien principal est l'origine des longitudes.
- Le plan équatorial est l'origine des latitudes.



## TABLE DES MATIÈRES

---

- La latitude géodésique  $\phi$  est l'angle entre le plan équatorial plane et la direction normale à l'ellipsoïde. Ne pas la confondre avec la latitude géocentrique (= sphérique).
- La longitude  $\lambda$  est l'angle avec le méridien de référence dans le plan équatorial.
- La hauteur  $h$  est la distance à l'ellipsoïde dans une direction normale à l'ellipsoïde.

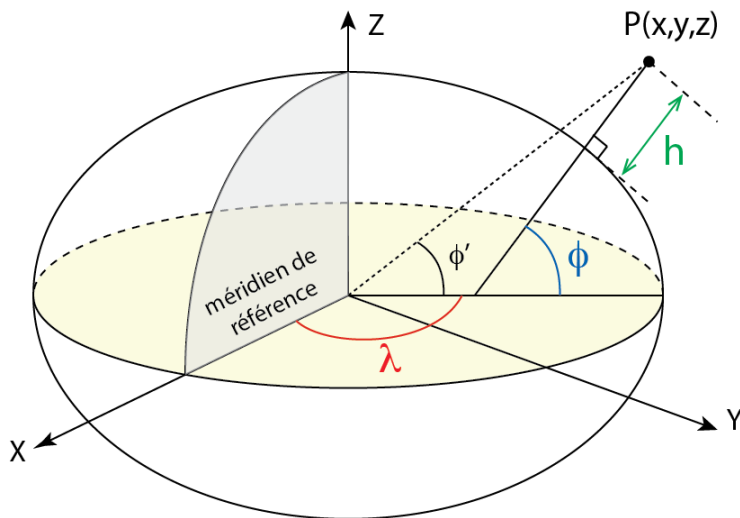


FIGURE 2.8

La convention de WGS est un ellipsoïde global, mais d'autres définitions sont possibles. Par exemple, on pourrait vouloir choisir un ellipsoïde qui s'ajuste au mieux à la forme de la Terre dans une région donnée, indépendamment de son ajustement au reste de la Terre. Il existe de fait un grand nombre d'ellipsoïdes régionaux. Les latitude, longitude et hauteur d'un point donnée sont bien sûr différentes suivant l'ellipsoïde de référence utilisé.

Le géoïde réel a une forme irrégulière à cause des variations latérales de distribution des masses à l'intérieur de la Terre. On l'appelle parfois, familièrement, "patatoïde". La différence d'élévation entre le géoïde réel et l'ellipsoïde de référence,  $\Delta N$ , est l'anomalie du géoïde, exprimées en mètres.

Les anomalies du géoïde sont de l'ordre de 100 m, soit  $\approx 0.5\%$  des 21 km de différence entre rayons polaire et équatorial. Aux grandes longueurs d'onde<sup>1</sup> spatiales, les anomalies du géoïde sont dominées par les trois positifs de l'Islande, du sud de l'Afrique du Sud et de la Nouvelle Guinée et le négatif du sud de l'Inde. Ils sont interprétés comme la signature de mouvements convectifs dans le manteau profond. Aux courtes longueur d'onde, les anomalies du géoïde reflètent les structures géologiques crustales.

---

1. Attention, il ne s'agit pas d'ondes au sens physique, mais simplement d'un raccourci que les géophysiciens utilisent pour exprimer la notion de "distance caractéristique".

### 2.3.3 Pesanteur sur l'ellipsoïde de référence

Plaçons-nous sur l'ellipsoïde (= géoïde) de référence où le potentiel vaut  $U = U_{ref}$ . Le géoïde réel se trouve légèrement au-dessus, avec un potentiel  $U = U_0$ . Géoïde de référence et réel sont séparés par une distance  $\Delta N$  très petite face au rayon équatorial  $a$ .

On veut exprimer  $U(r)$  au voisinage de l'ellipsoïde. On utilise le théorème de Taylor, qui permet d'approcher la valeur d'une fonction plusieurs fois dérivable au voisinage d'un point par une fonction polynôme dont les coefficients sont les dérivées de la fonction en ce point. Ici la fonction est  $U$ , avec ses dérivées partielles selon  $R$ . On a donc :

$$U_0 = U_{ref} + \left( \frac{\partial U}{\partial r} \right)_{r=r_0} \Delta N \quad (2.52)$$

On néglige les termes d'ordres supérieurs du polynôme de Taylor. Cette équation relie donc  $U_{ref} - U_0 = \Delta U$  à  $\Delta N$  par l'intermédiaire du gradient de  $U$ . Elle est valide car  $\Delta N/a \ll 1$ .

Puisque l'accélération de la pesanteur est le gradient du potentiel (cf. équation 2.49), la dérivée radiale de  $U$  est la pesanteur sur le géoïde de référence :

$$g_0 = \left( \frac{\partial U}{\partial r} \right)_{r=r_0} \quad (2.53)$$

La valeur de  $g$  varie bien sûr entre le géoïde de référence et le géoïde réel. Mais comme on la multiplie par une très petite quantité  $\Delta N$ , on peut la considérer constante et égale à  $g_0$ . Comme il existe un potentiel "normal" sur le géoïde de référence,  $g_0$  est la "pesanteur normale" sur ce géoïde de référence. On a donc :

$$\Delta U = -g_0 \Delta N \quad (2.54)$$

On détermine  $g_0$  en insérant l'équation qui donne la distance du géoïde normal au centre de masse  $r_0$  (2.51) dans celle qui donne l'accélération de la pesanteur en fonction de  $\phi$  (2.32). Un accord international de 1980 donne la valeur numérique de  $g$  sur l'ellipsoïde de référence :

$$\begin{aligned} g_0 = & 9.7803267715(1 + 0.0052790414 \sin^2 \phi \\ & + 0.0000232718 \sin^4 \phi \\ & + 0.0000001262 \sin^6 \phi \\ & + 0.0000000007 \sin^8 \phi) \end{aligned} \quad (2.55)$$

Cette équation définit le système de référence géodésique GRS80, cohérent avec WGS84. Les constantes numériques dépendent de la forme ( $a$  et  $c$ ) et de la vitesse de rotation angulaire ( $\omega$ ) de la Terre.

On constate au passage que la pesanteur n'est pas constante sur une équipotentielle, qu'elle soit normale ou réelle.

### 2.3.4 Equipotentielles du champ de pesanteur réel – LE géoïde

Nous avons jusqu'ici parlé uniquement des surfaces équipotentielles du champ de pesanteur normal, c'est-à-dire d'une Terre en rotation mais homogène en densité. Nous avons vu que ces surfaces sont des ellipsoïdes de révolution et avons choisi l'une d'entre elle comme référence. C'est le géoïde normal ou, de manière équivalente, l'ellipsoïde de référence.

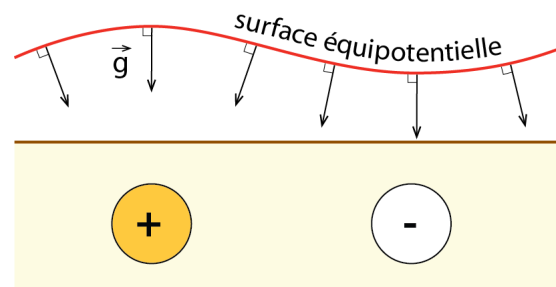


FIGURE 2.9

La Terre est évidemment hétérogène ; elle présente notamment des variations latérales de densité qui peuvent être importantes. De fait, les surfaces équipotentielles du champ de pesanteur réel présentent des déviations notables par rapport à l'ellipsoïde de référence. La figure 2.9 montre graphiquement que les équipotentielles du champ réel "ondulent" – on parle effectivement des ondulations du géoïde – en remontant au-dessus d'anomalies de masse positives et en descendant au-dessus d'anomalies de masse négatives. On peut cependant toujours définir la surface équipotentielle la plus proche du niveau des mers, qui est le géoïde réel, ou le géoïde tout court. Les ondulations du géoïde (par rapport à l'ellipsoïde de référence) renseignent donc sur les distributions de densité à l'intérieur de la Terre.

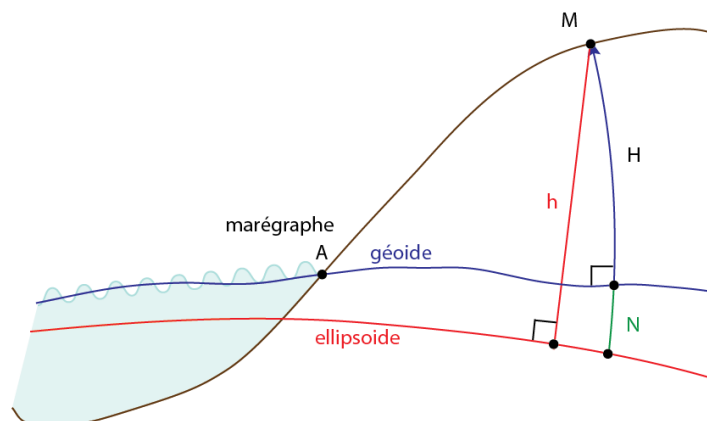


FIGURE 2.10

La figure 2.10 schématise les relations géométriques entre le géoïde, l'ellipsoïde de référence et la topographie. Définissons le géoïde comme l'équipotentielle du champ de pesanteur réel qui passe par un marégraphe de référence – en France il s'agirait de celui de Marseille. Le géoïde matérialise alors le niveau de la mer tel que défini au marégraphe. De fait, on peut maintenant définir l'altitude d'un point  $M$  comme la distance entre ce point et le géoïde. Nous verrons plus bas qu'il s'agit de la distance mesurée le long de la ligne de force du champ de pesanteur qui passe par  $M$ . Elle est notée  $H$ . On retrouve aussi la hauteur du point  $M$ , qui est sa distance à l'ellipsoïde de référence mesurée le long d'une normale à celui-ci. Elle est notée  $h$ . L'écart entre la ligne de force du champ de pesanteur et la normale à l'ellipsoïde est bien sûr très exagéré sur cette figure. Dans la réalité leurs longueurs diffèrent toujours de moins de un millimètre. La différence entre altitude et hauteur est donc la hauteur du géoïde par rapport à l'ellipsoïde de référence. Elle est notée  $N$ . On peut donc écrire :

$$h \sim N + H \quad (2.56)$$

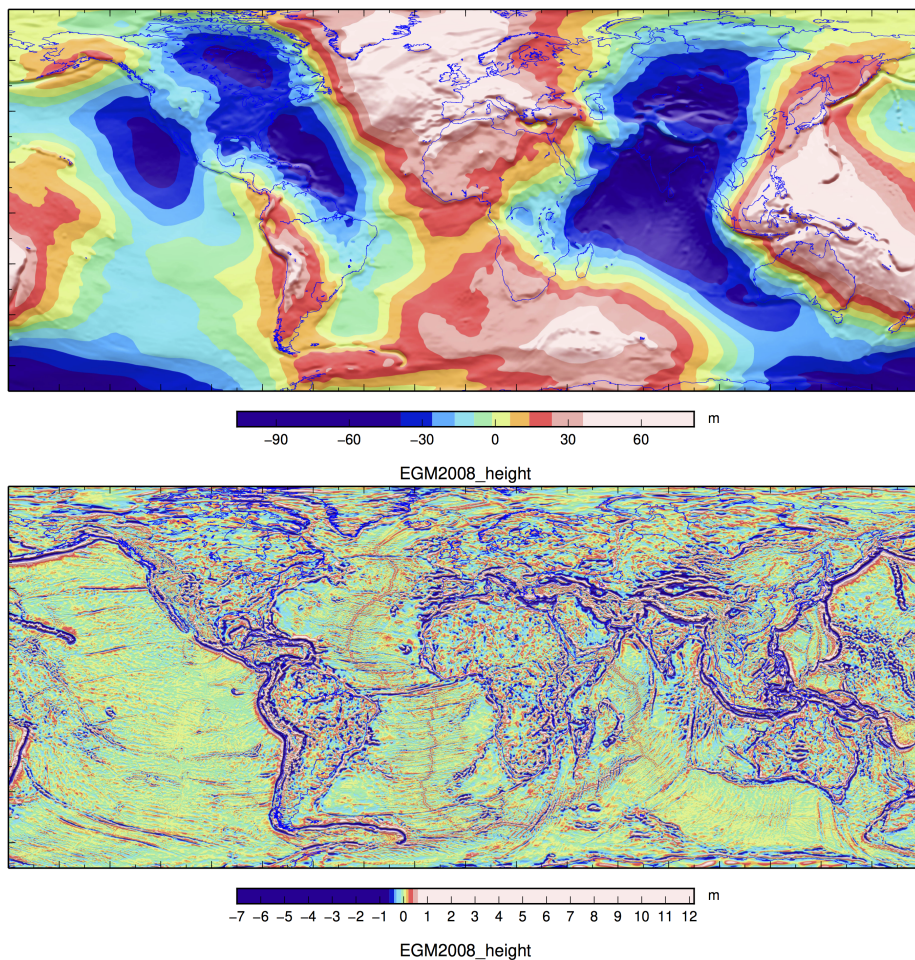


FIGURE 2.11 – <http://earth-info.nga.mil/GandG/wgs84/gravitymod/egm2008/>

La figure 2.11 montre, en carte, les hauteurs du géoïde EGM2008. Il a été calculé en combinant des mesures de l'accélération de la pesanteur sur les continents, par avion, et par le satellite GRACE, ainsi que des données d'altimétrie océanique. Le calcul du géoïde à partir de la pesanteur est réalisé en appliquant la formule de Stokes, dont la dérivation – relativement complexe – est donnée par Heiskanen et Moritz (*Physical Geodesy*, 1967) :

$$N = \frac{R}{4\pi\gamma} \int \int_{\sigma} \Delta g S_M(\phi) d\sigma \quad (2.57)$$

où  $R$  est le rayon terrestre moyen,  $\gamma$  la pesanteur normale sur l'ellipsoïde de référence,  $\Delta g$  la pesanteur mesurée corrigée de l'effet de la topographie,  $\sigma_0$  la sphère d'intégration considéré, et  $S_M(\phi)$  les kernels de Stokes définis par :

$$S_M(\phi) = \sum_{n=2}^M \frac{2n+1}{n-1} P_n \cos \phi \quad (2.58)$$

avec

$$P_n(x) = \frac{1}{s^n n!} \frac{d^n [(x^2 - 1)^n]}{dx^n} \quad (2.59)$$

On note que l'altimétrie océanique, réalisée depuis des satellites, donne directement le niveau de la mer – donc le géoïde – si on sait corriger la mesure des variations de hauteur d'eau dues aux courants. Les premiers satellites altimétriques, lancés dans les années 1980 – GEOS-III, SEASAT (1978), GEOSAT (1985) – ont d'ailleurs permis d'établir les premières cartes du géoïde océanique.

On observe sur la figure 2.11 que la hauteur du géoïde varie de -110 m à +85 m. Il se trouve donc parfois en-dessous et parfois en-dessus de l'ellipsoïde de référence. De fait, on peut être au niveau de la mer – sur une plage par exemple – et lire son son GPS une hauteur négative car le GPS donne la hauteur par rapport à l'ellipsoïde de référence, pas l'altitude ! Si l'on souhaite convertir la hauteur ellipsoïdale fournie par le GPS en une altitude, il faut alors connaître  $N$  puis appliquer l'équation 2.56.

Les grandes longueurs d'onde du géoïde (figure 2.11, haut) contiennent des informations sur les variations latérales de densité dans le manteau, donc de l'information pertinentes pour convection mantellique, dont l'un des moteurs est justement la densité des roches du manteau. Une caractéristique importante du géoïde est la forte amplitude d'une structure de degré 2, avec deux "hauts" sur l'Atlantique nord et le centre-ouest Pacifique, et deux "bas" centrés sur le sud de l'Inde et

Les courtes longueurs d'onde du géoïde (figure 2.11, bas) reflètent les variations latérales de densité dans la lithosphère, en particulier la profondeur du Moho, qui y est le contraste de densité le plus important à la frontière croûte – manteau lithosphérique. On observe notamment la signature des fosses de subduction, des chaînes de monts sous-marins, et des zones de fractures océaniques. Ces structures juxtaposent en effet des croûtes dont l'épaisseur varie rapidement latéralement, comem illustré sur la figure 2.12.

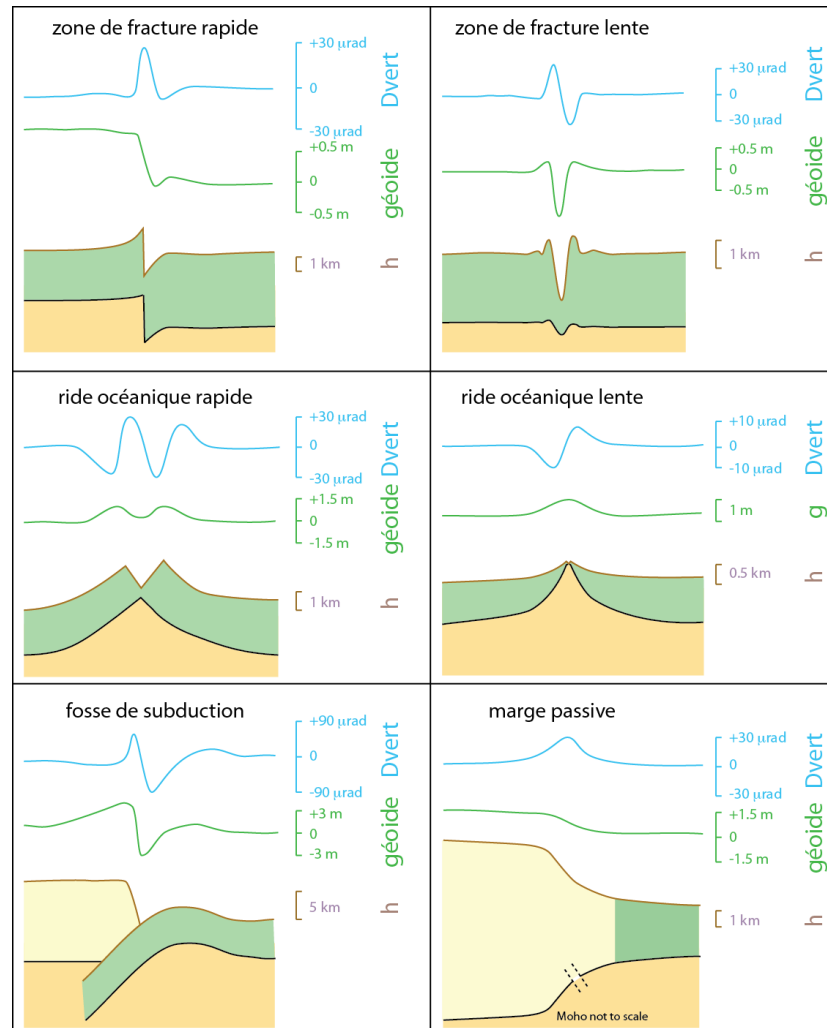


FIGURE 2.12 – Royer et al., 1989, “A preliminary tectonic fabric chart of the Indian Ocean”.

## 2.4 Les altitudes

### 2.4.1 Quelques définitions

L'altitude est définie par l'Institut Géographique National français (IGN) comme "la coordonnée par laquelle on exprime l'écart vertical d'un point à une surface de référence proche du géoïde". L'altitude est donc une quantité physique liée à la pesanteur et à son potentiel, pas seulement une quantité géométrique. L'altitude a une implication pratique très importante : elle définit le sens d'écoulement d'un liquide, des hautes vers les basses altitudes. De fait, les surfaces d'altitude égale doivent être proches d'équipotentielles du champ de pesanteur.

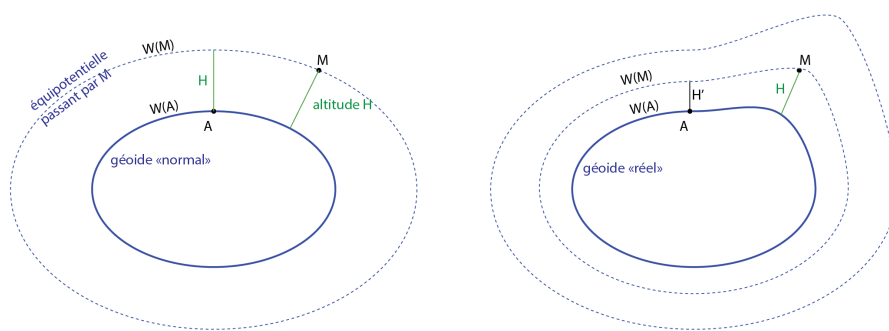


FIGURE 2.13

Prenons l'exemple d'une Terre homogène en densité dont la forme est un ellipsoïde de révolution (figure 2.13, gauche). Les équipotentielles du champ de pesanteur sont alors des ellipsoïdes de révolution concentriques. L'écart vertical (perpendiculaire aux équipotentielles, par définition) en  $M$ , situé au potentiel  $W(M)$  au-dessus du géoïde (normal dans ce cas, au potentiel  $W(A)$ ) est  $H'$ , l'altitude de  $M$ . Dans ce cas l'écart entre les équipotentielles est constant et  $H = H'$ .

Dans le cas de la Terre réelle, les variations latérales de densité impliquent que les équipotentielles ne sont pas des ellipsoïdes de révolution (figure 2.13, droite). De fait, l'écart entre elles n'est pas constant et  $H \neq H'$ . Par conséquent, si on s'élève verticalement d'une distance  $H$  au-dessus de  $A$ , on n'est plus "au niveau" du point  $M$ . Donc l'altitude ne peut se définir comme une simple hauteur géométrique au-dessus d'une surface de référence. Sa mesure nécessite alors de connaître le géoïde sous le point de mesure, donc le champ de pesanteur.

La pesanteur  $g$  est perpendiculaire aux surfaces équipotentielles (figure 2.14). Une courbe qui, en chacun de ses points, est orthogonale aux surfaces équipotentielles (tangente à  $g$ ) est appelée "ligne de force". Ses tangentes sont des verticales. Par définition, l'altitude de  $M$  (par rapport à  $A$ , qui peut par exemple être fixé arbitrairement à zéro) est l'abscisse curviligne entre  $A$  et  $M$ , comptée le long de la ligne de force du champ de pesanteur.

### 2.4.2 Principe de la détermination de l'altitude

La définition du potentiel de pesanteur donne (figure 2.14) :

$$W(A) = - \int_{\infty}^A g \, dr \quad (2.60)$$

$$W(M) = - \int_{\infty}^M g \, dr \quad (2.61)$$

donc

$$W(A) - W(M) = - \int_M^A g \, dr \quad (2.62)$$

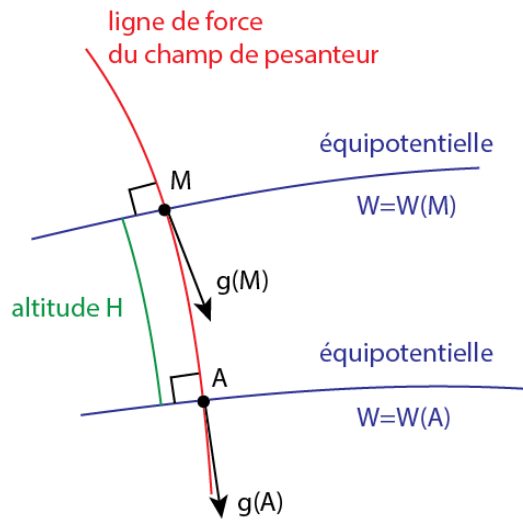


FIGURE 2.14

Si  $W(A)$  est le géoïde ( $W(A) = W_0$ ), alors  $W(A) - W(M)$  est appelé “cote géopotentielle” de  $M$ . Elle s’exprime en  $\text{m}^2\text{s}^{-2}$  et représente le travail à effectuer dans le champ de la pesanteur réel pour se rendre de la surface de référence  $W_0$  à la surface équipotentielle passant par  $M$ .

En supposant  $G$  constant entre  $A$  et  $M$  – par exemple en utilisant une valeur moyenne  $\tilde{g}$  – on a alors :

$$W(A) - W(M) = -\tilde{g} \int_M^A dr \quad (2.63)$$

d’où la définition de l’altitude  $H$  :

$$H = \frac{W(A) - W(M)}{\tilde{g}} \quad (2.64)$$

Par conséquent, la détermination d’altitude en un point requiert (1) de mesurer sa cote géopotentielle, (2) de choisir une valeur moyenne de la pesanteur en ce point.



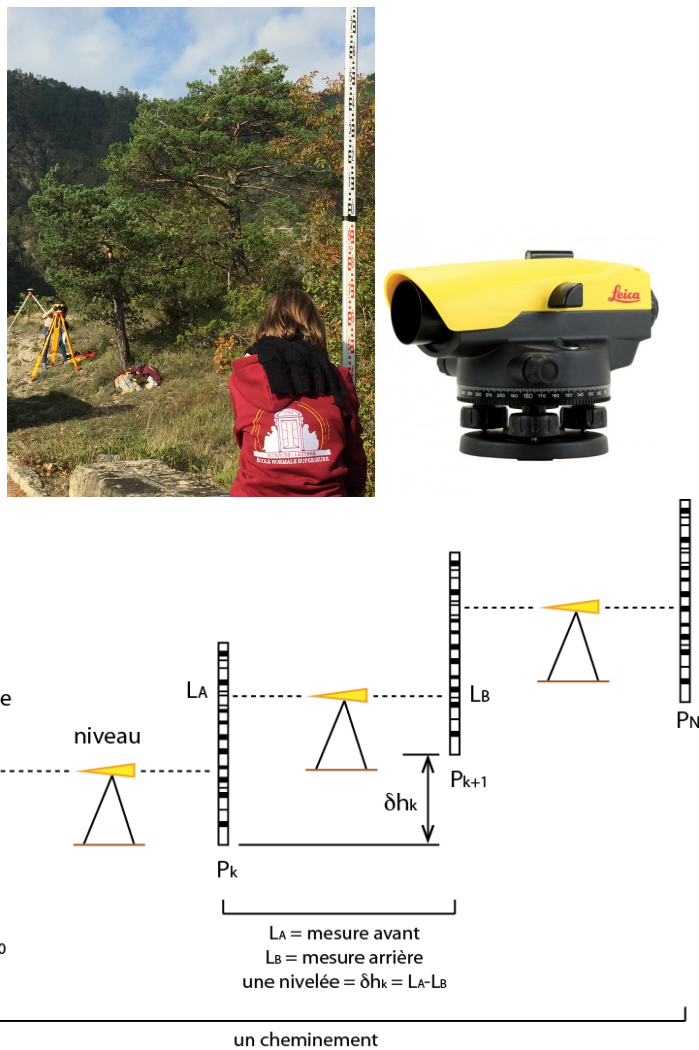


FIGURE 2.15

### 2.4.3 Le nivellement

Le nivellement cherche à mesurer l'écart vertical entre des points proches. On utilise pour cela un niveau à bulle qui, une fois réglé, est tangent à une équipotentielle de pesanteur. Ce niveau est associé à un dispositif de visée optique. Une pratique classique consiste à le placer entre deux points proches (figure 2.15). On place une règle graduée, ou mire, sur l'un des deux points que l'on vise à l'aide du niveau. On lit une hauteur, dite "visée avant". On déplace la mire vers le second point et on fait pivoter le niveau de 180 degrés pour faire une nouvelle mesure de hauteur, dite "visée arrière". On obtient de fait une "nivelée"  $\delta h'_k = \text{visée avant} - \text{visée arrière}$ . On procède ainsi de proche en proche le long d'un cheminement. Les points de mesure sont généralement séparés de quelques dizaines de mètres seulement, il s'agit donc d'un travail titanesque si on doit le

réaliser sur un grand territoire.

Puisque le niveau matérialise une équipotentielle du champ de pesanteur réel, on peut écrire la cote géopotentielle du point  $P_N$  par rapport à une référence  $P_0$  :

$$W(P_N) - W(P_0) = - \sum_{k=1}^N g_k \delta h'_k \quad (2.65)$$

Le nivellement donne  $\delta h'_k$ . Si on dispose aussi de mesures gravimétriques pour donner  $g_k$ , alors on peut donc déterminer la cote géopotentielle de  $P_N$ . Une fois celle-ci obtenue, on utilise l'équation 2.64 pour calculer l'altitude de  $P_N$ .

La force de pesanteur étant conservative, la cote géopotentielle (= le travail de cette force) entre deux points est indépendante du chemin parcouru. Par contre la mesure des dénivelées dépend du chemin suivi ( $AB$  ou  $A'B'$  ici). Deux points peuvent donc être à la même altitude mais pas la même hauteur. A l'inverse, deux points de même hauteur ne sont pas nécessairement à la même altitude. Cela est résumé par le "paradoxe des tunnels équipotentiels".

### 2.4.4 Altitude orthométrique

Plaçons nous dans le cas de la figure 2.70 où nous cherchons à déterminer l'altitude du point  $M$ . Le géoïde, qui donne la surface zéro de référence des altitudes, est défini en  $A$  par des mesures marégraphiques (généralement en moyennant plusieurs années de mesure de hauteur d'eau). Sur le géoïde, le potentiel du champ réel vaut  $W = W(A)$ .

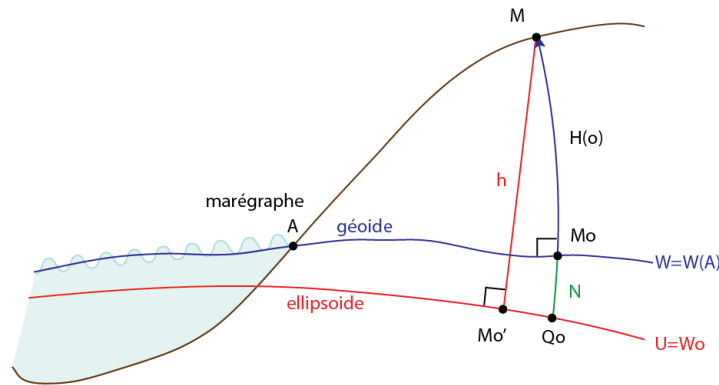


FIGURE 2.16

L'ellipsoïde de référence, représenté ici sous le géoïde, est au potentiel normal  $U = W_0$ . La hauteur ellipsoïdale de  $M$  est par définition  $h$ , mesurée le long d'une normale à l'ellipsoïde de référence.  $h$  est par exemple obtenu à partir d'une mesure GPS.

L'abscisse curviligne  $H^{(o)}$  le long de  $M_0M$  au-dessus du géoïde est, par défini-

tion, l'altitude orthométrique de  $M$  donnée par :

$$H^{(o)} = \frac{W(A) - W(M)}{\tilde{g}} \quad (2.66)$$

où  $\tilde{g}$  est la moyenne de la pesanteur réelle le long de l'arc de ligne de force de  $M_0$  à  $M$ . Cette altitude est très proche de la "hauteur au-dessus du niveau de la mer".

Dans la pratique la distance le long de la ligne de force du champ de pesanteur et de la normale à l'ellipsoïde diffèrent de moins d'un millimètre. On peut donc relier l'écart vertical  $N$  entre le géoïde et l'ellipsoïde (= hauteur ou anomalie du géoïde) et l'altitude orthométrique par :

$$h = N + H^{(o)} \quad (2.67)$$

Cela permet notamment de transformer une hauteur ellipsoïdale mesurée par GPS en une altitude. Réciproquement, si l'on dispose d'une mesure GPS de hauteur ellipsoïdale et d'une altitude normale, on peut alors calculer la hauteur du géoïde.

L'altitude orthométrique pose cependant un problème, celui de déterminer  $\tilde{g}$ , moyenne de la pesanteur réelle sur l'arc de ligne de force de  $M_0$  à  $M$ . Celle-ci dépend de la distribution des masses à l'intérieur de la Terre qui sont généralement inconnues. On fait donc généralement l'hypothèse d'une variation linéaire de  $g$  pour obtenir l'altitude orthométrique dite "de Helmert" :

$$\tilde{g}_M = g_M - \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial H} H_H^{(o)} \quad (2.68)$$

avec le gradient dit de "Poincaré-Prey" :

$$\frac{\partial g}{\partial H} = -0.848 \times 10^{-6} \text{s}^2 \quad (2.69)$$

On note donc que les altitudes orthométriques "rigoureuses", les seules qui donnent exactement le sens de l'écoulement d'un liquide, ne sont pas calculables car  $\tilde{g}$  n'est pas directement mesurable. Les altitudes orthométriques de Helmert sont une approximation des altitudes orthométriques qui fait l'hypothèse que la pesanteur varie linéairement de la surface au géoïde. Plus la densité varie de manière complexe – par exemple en zone de montagnes – plus ces altitudes s'éloignent de la définition orthométrique pure.

Une comparaison entre altitudes orthométriques de Helmert et altitudes orthométriques "rigoureuses"<sup>2</sup> au Japon, territoire montagneux et géologiquement variable, montre des différences de  $\pm 1.7$  cm en moyenne, avec un maximum de 31 cm (Odera et Fukuda, 2015). Une comparaison équivalente en Suisse (Marti, 2007) montre des différences toujours inférieures à 3 cm en plaine mais qui peuvent atteindre 90 cm en haute montagne ( $> 3000$  m). Cependant, pour la plupart des applications pratiques, les altitudes orthométriques de Helmert sont suffisantes. Elles sont la norme légale pour de nombreux pays, dont les Etats Unis.

---

2. C'est-à-dire où  $\tilde{g}$  peut être déterminé en utilisant un modèle de distribution des densités déduit d'un modèle numérique de terrain précis

### 2.4.5 Altitude normale

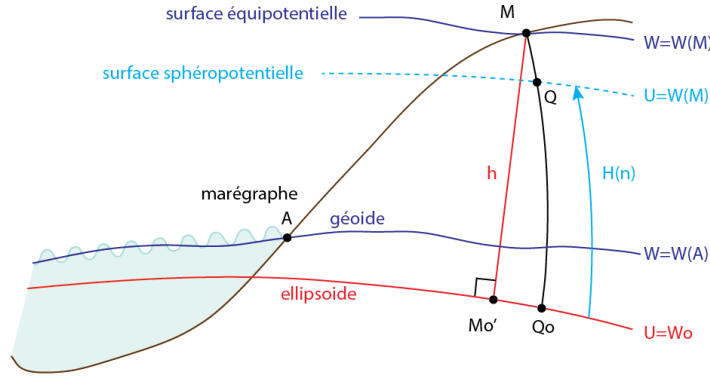


FIGURE 2.17

Une alternative aux altitudes orthométriques consiste à remplacer la moyenne de la pesanteur réelle  $\tilde{g}$  par la moyenne de la pesanteur normale  $\tilde{\gamma}$ . On obtient alors des altitudes dites “normales” (figure 2.17) définies par :

$$H^{(n)} = \frac{W(A) - W(M)}{\tilde{\gamma}} \quad (2.70)$$

L'avantage évident est que  $\tilde{\gamma}$  peut être déterminé exactement par le calcul puisqu'il dérive du potentiel du champ normal. On le calcule en fonction de la latitude  $\phi$  du point considéré et de son élévation par rapport à l'ellipsoïde :

$$\tilde{\gamma} = \gamma(\phi, 0) (1 + \beta \sin^2 \phi) \left( 1 - \frac{H_m}{R} \right) \quad (2.71)$$

On utilise généralement, en négligeant les termes de second ordre :

$$\tilde{\gamma} = \gamma(\phi, 0) - 0.1543 H^{(n)} \quad (2.72)$$

On note ici que l'altitude normale en  $M$  est l'abscisse curviligne  $Q_0Q$  au-dessus de l'ellipsoïde. Considérons (figure 2.18) l'ellipsoïde de référence comme une surface équipotentielle du champ normal noté  $U$ . Par convention, fixons que le potentiel (normal) sur cet ellipsoïde est le potentiel réel sur le géoïde, soit  $U_{Q_0} = W_0 = W(A)$ . Par le point  $M$  passe une équipotentielle du champ réel  $W = W(M)$ . Il existe une surface équipotentielle du champ normal qui vaut  $U = W(M)$  : on l'appelle surface “sphéropotentielle”.  $U = W(M)$  est décalée de  $M$  d'une valeur  $\zeta$  proche du décalage entre géoïde et ellipsoïde. On définit le “quasi-géoïde” en  $M$  comme la surface située à une abscisse curviligne  $-H^{(n)}$  le long de  $Q_0Q$ .

La conversion altitude normale–orthométrique est donc donnée par :

$$N - \zeta = H^{(n)} - H^{(0)} = (W(A) - W(M)) \frac{\tilde{g} - \tilde{\gamma}}{\tilde{g}\tilde{\gamma}} \quad (2.73)$$

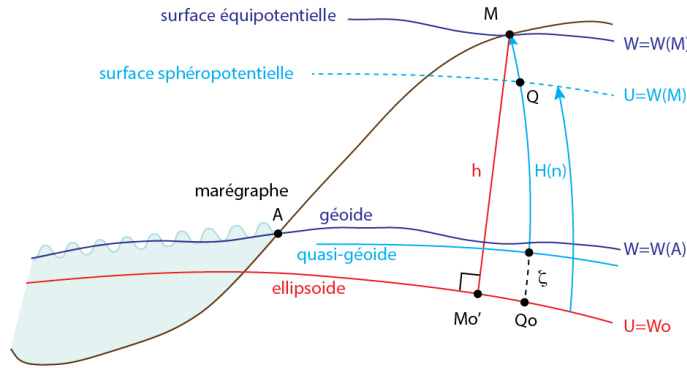


FIGURE 2.18

soit :

$$H^{(n)} - H^{(0)} = H^{(n)} \frac{\tilde{g} - \tilde{\gamma}}{\tilde{g}} = H^{(0)} \frac{\tilde{g} - \tilde{\gamma}}{\tilde{\gamma}} \quad (2.74)$$

On peut montrer que cette différence peut s'approximer d'après l'anomalie de Bouguer  $\Delta g_B$  :

$$H^{(n)} - H^{(0)} \approx \frac{\Delta g_B}{\tilde{\gamma}} H \quad (2.75)$$

Les altitudes normales sont celles adoptées en France, par exemple. Elle offrent l'avantage que leur calcul ne repose sur aucune hypothèse géophysique, contrairement aux altitudes orthométriques de Helmert. Cependant, elles ne garantissent pas exactement l'écoulement des fluides des points "hauts" vers les points "bas". Dans la pratique, elles sont malgré tout très proches des altitudes orthométriques de Helmert. En France, les différences se répartissent entre  $-16$  cm et  $+61$  cm avec un gradient sud-nord dû à un biais du nivellement général de la France. En Suisse ces différences se répartissent entre  $-10$  cm et  $+50$  cm (Marti, 2007) avec les valeurs les plus élevées corrélées aux plus hauts reliefs. En région plate ou à faible variation topographique, les différences sont de l'ordre du centimètre.

#### 2.4.6 Subtilités des altitudes en France

Les altitudes orthométriques furent la référence en France jusqu'en 1969 avec le nivellement "NGF-Lallemand". Depuis 1969 le système légal en France continentale, dit "NGF-IGN69", utilise les altitudes normales. L'IGN publie une grille de corrections entre les altitudes orthométriques et normales.

Par ailleurs, l'IGN a comparé les géoïdes et quasi-géoïdes scientifiques (calculés à partir de données gravimétriques) avec les données GPS/nivellement. Ils observent un bon accord en général, mais des écarts significatifs dans certaines régions, supérieurs à la fois aux précisions du GPS/nivellement et de la détermination du géoïde. C'est par exemple le cas dans les Alpes Maritimes, où l'écart atteint 60 cm. Des écarts de cet ordre sont trop importants pour permettre

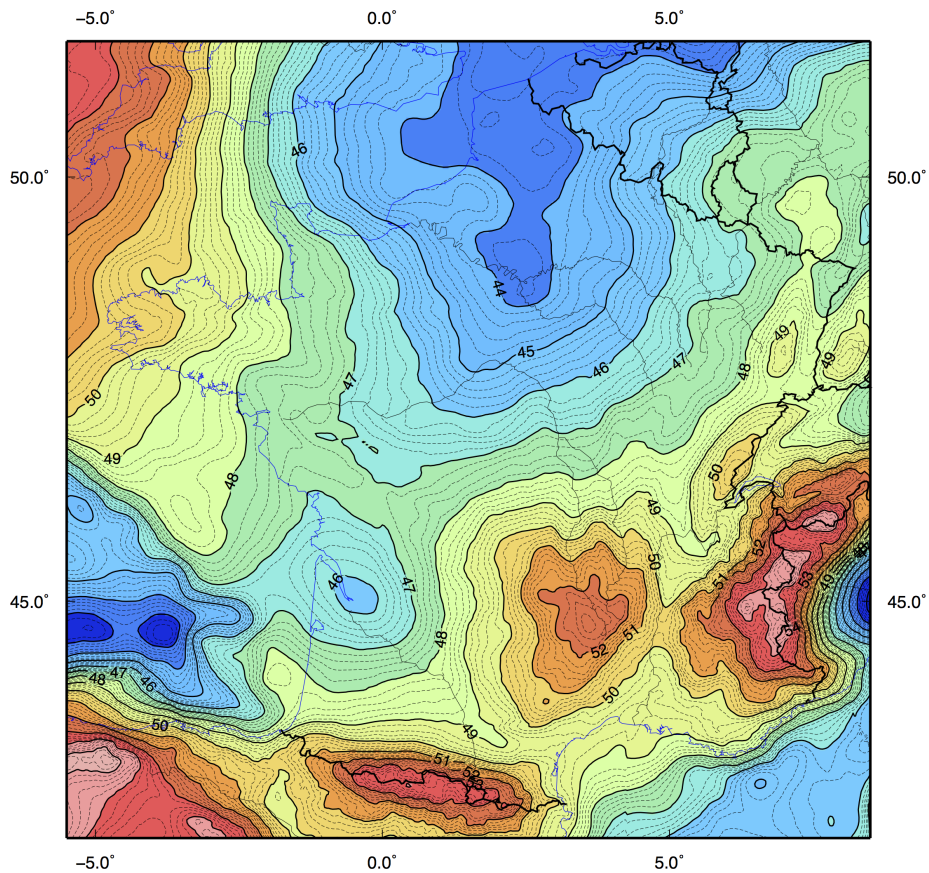


FIGURE 2.19

d'utiliser directement le quasi-géoïde pour des applications géodésiques et topographiques. De fait, pour les applications pratiques (conversion des hauteurs GPS en altitudes normales NGF-IGN69), l'IGN a créé une grille de conversion (RAF09 pour Référence d'Altitude Française, figure 2.19) qui corrige ces problèmes en incluant des mesures en colocation GPS/nivellement. Cette grille est un quasi-géoïde "déformé" par redistribution des résidus observés sur les points GPS nivelés du réseau de base français.

L'origine des altitudes en France est établie à partir des observations marégraphiques réalisées au marégraphe de Marseille entre le 1<sup>er</sup> février 1885 et le 1<sup>er</sup> janvier 1897. Le zéro des altitudes est matérialisé physiquement par un repère dit "fondamental" (numéro M.AC-0-VIII) implanté à l'intérieur des bâtiments du marégraphe de Marseille.

## 2.5 Les anomalies de pesanteur

### 2.5.1 Calcul des anomalies

La mesure de l'accélération de la pesanteur  $g$  à la surface de la Terre montre des différences significatives par rapport au modèle théorique de  $g_0$  sur le géoïde de référence. Ces différences sont dues aux variations latérales de densité à l'intérieur de la Terre. Les cartes géologiques montrent à l'évidence, en surface, la juxtaposition de roches de densités différentes. L'intrusion d'un dyke basaltique ( $\rho = 3.3 \text{ kg/m}^3$ ) ou de veines minéralisées à l'intérieur de séries sédimentaires ( $\rho \approx 2.5 \text{ kg/m}^3$ ) induit des variations de  $g$  par rapport au modèle de référence. La gravimétrie est de fait une méthode d'identification des structures géologiques profondes, en particulier des dépôts métallogéniques.

#### Cas d'une sphère

Le cas le plus simple est celui d'une anomalie de gravité causée par une sphère de rayon  $R$  dont le centre est situé à une profondeur  $b$ , avec un contraste de densité  $\Delta\rho$  par rapport à de son encaissant (figure 2.20). L'attraction gravitationnelle de cette sphère est donnée par l'équation 2.21, on a donc :

$$g_m = \frac{GM}{r^2} \quad (2.76)$$

$$= \frac{G\Delta\rho V}{r^2} \quad (2.77)$$

$$= \frac{4\pi R^3}{3} \frac{G\Delta\rho}{r^2} \quad (2.78)$$

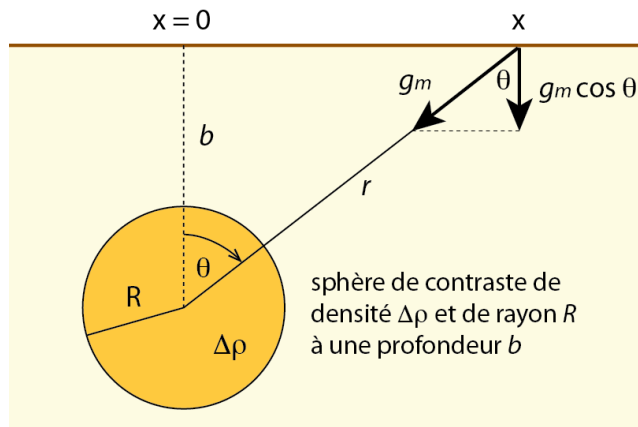


FIGURE 2.20

Si  $\Delta\rho > 0$ , l'anomalie de gravité est positive et l'attraction gravitationnelle est dirigée vers le centre de la sphère. Sa direction varie légèrement le long de la surface en fonction de la distance à cette sphère en convergeant vers la source de l'anomalie. L'anomalie de géoïde associée sera positive (bosse du géoïde)

car les équipotentiels sont perpendiculaires à  $g$ . A l'inverse, une anomalie de densité négative produit une attraction gravitationnelle dirigée vers l'extérieure et divergente, donc une anomalie de géoïde négative (trou du géoïde).

La composante tangentielle de  $g_m$  est très petite (voir plus haut), on peut donc écrire que l'anomalie de gravité en un point  $P$  situé à une distance  $r$  de la sphère comme :

$$\Delta g = g_m \cos \theta \quad (2.79)$$

$$= g_m \frac{b}{r} \quad (2.80)$$

$$= \frac{4\pi R^3 G \Delta \rho}{3} \frac{b}{(x^2 + b^2)^{(3/2)}} \quad (2.81)$$

$$= G \Delta M \frac{b}{(x^2 + b^2)^{(3/2)}} \quad (2.82)$$

où  $\Delta M$  est l'anomalie de masse due à la présence de la sphère. La forme de cette anomalie à la surface est donnée sur la figure 2.21.

$$\Delta g = \frac{4\pi R^3 G \Delta \rho}{3} \frac{b}{(x^2 + b^2)^{(3/2)}} \quad (2.83)$$

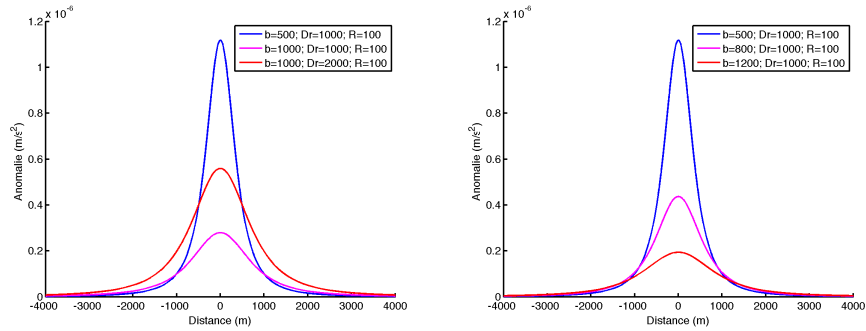


FIGURE 2.21

On observe sur la figure 2.21 que :

1. Si l'anomalie de masse de la sphère augmente, l'amplitude du signal augmente. Cela s'obtient de manière équivalente en augmentant  $R$  ou  $\Delta \rho$ .
2. Si l'on multiplie  $R$  par  $n$  et dans le même temps divise  $\Delta \rho$  par  $n^3$ , la masse de la sphère ne change pas, donc le signal ne change pas.
3. Il découle des deux points précédents que la même mesure peut être expliquée par une infinité de combinaisons  $(R, \Delta \rho)$  : la gravimétrie seule ne permet pas de lever cette ambiguïté, il n'y a pas unicité du modèle.
4. Si la profondeur  $b$  de la sphère augmente, l'amplitude du signal diminue (l'anomalie est plus lointaine) et sa "longueur d'onde" augmente.
5. Cette longueur d'onde dépend uniquement du second terme de l'équation ci-dessus, donc uniquement de la profondeur  $b$  de la sphère.



6. Il découle des deux points précédents que, pour une anomalie de forme donnée, la longueur d'onde du signal gravimétrique en surface contient de l'information sur la profondeur de l'anomalie de masse.
7. Cependant, un ellipsoïde superficiel peut créer un signal de la même longueur d'onde qu'une sphère plus profonde : il y a donc ambiguïté ici sur la forme de l'anomalie de masse.

On lève généralement ces ambiguïtés en utilisant des informations indépendantes soit géologiques (observations de surface, sismique réflexion, forages) ou géophysiques (données magnétiques).

### Cas d'un plateau

On cherche maintenant à déterminer l'attraction gravitationnelle causée par un plateau horizontal d'épaisseur  $H$  infini dans les directions horizontales. Plusieurs approches sont possibles, par exemple de calculer l'attraction gravitationnelle d'un cylindre de rayon  $R$  et d'épaisseur  $h$ , puis de faire tendre  $R \rightarrow \infty$ , comme schématisé sur la figure 2.22. On va "fabriquer" ce cylindre en intégrant l'attraction gravitationnelle causée par un anneau de section carrée  $dy dr$  et de rayon  $r$ . On se place à l'aplomb du centre de cet anneau à une distance verticale  $y = -b$  du plan contenant l'anneau.

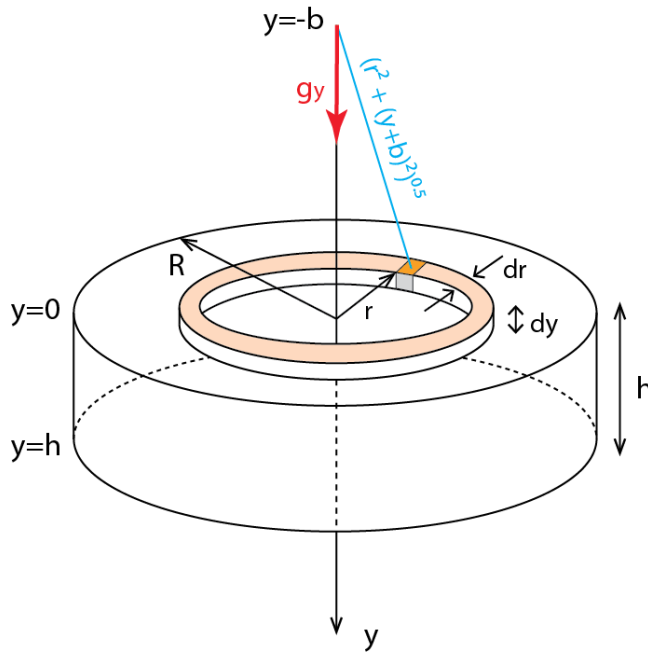


FIGURE 2.22

Un élément de volume cubique de cet anneau, de masse  $m$  et de côtés  $dr$ ,  $dy$  et  $r \cos d\psi$  exerce une attraction gravitationnelle donnée par (voir figure 2.22) :

$$g_m = \frac{mG}{[r^2 + (y+b)^2]} \quad (2.84)$$

En vertu de la symétrie axiale du problème, l'attraction gravitationnelle de l'anneau est donnée par :

$$g_{\text{anneau}} = \frac{MG}{\left[r^2 + (y + b)^2\right]} \quad (2.85)$$

ou  $M$  est la masse de l'anneau, soit :

$$M = 2\pi r dr dy \rho \quad (2.86)$$

L'attraction gravitationnelle dans la direction verticale est :

$$g_y = g_{\text{anneau}} \cos \theta \quad (2.87)$$

où  $\theta$  est l'angle entre la verticale et la direction de l'anneau, soit :

$$\cos \theta = \frac{y + b}{\left[r^2 + (y + b)^2\right]^{1/2}} \quad (2.88)$$

Pour obtenir l'attraction gravitationnelle d'un disque de rayon  $R$  et d'épaisseur  $h$ , on intègre l'anneau dans ces dimensions. La densité  $\rho$  varie avec la profondeur  $y$  pour le moment. On écrit donc :

$$g_y = 2\pi G \int_0^h \int_0^R \frac{(y + b) r \rho(y)}{\left[r^2 + (y + b)^2\right]^{3/2}} dr dy \quad (2.89)$$

Avec un peu d'efforts on intègre cette équation par rapport à  $r$  pour obtenir :

$$g_y = 2\pi G \int_0^h \rho(y) \left(1 - \frac{y + b}{\left[R^2 + (y + b)^2\right]^{1/2}}\right) dy \quad (2.90)$$

Dans la limite où  $R \rightarrow \infty$ , c'est-à-dire où le cylindre devient un plateau, on a donc :

$$g_y = 2\pi G \int_0^h \rho(y) dy \quad (2.91)$$

C'est la formule de Bouguer. On note que  $g_y$  ne dépend pas de la distance au plateau. On l'utilise souvent pour calculer l'attraction gravitationnelle d'un plateau de densité constante, par exemple  $\rho_c$ , et d'épaisseur  $h$  :

$$g_{\text{plateau}} = 2\pi \rho_c G h \quad (2.92)$$

Ces formules sont écrites pour une géométrie plane. On montre qu'elles s'appliquent à une géométrie sphérique en remplaçant  $2\pi$  par  $4\pi$ .

### 2.5.2 Réduction des mesures de la pesanteur

On a vu que la pesanteur sur l'ellipsoïde de référence, pour une Terre homogène, est de la forme :

$$g_0 = g_E (1 + k_1 \sin^2 \phi + k_2 \sin^4 \phi + \dots) \quad (2.93)$$

Les mesures de la pesanteur réalisées sur le terrain ne sont cependant pas faites sur l'ellipsoïde de référence. Elles doivent donc être corrigées pour pouvoir les comparer à la valeur théorique  $g_0$  et en déduire des informations sur la répartition de masse dans la Terre. On dit que l'on "réduit" les mesures pour les amener sur l'ellipsoïde de référence. Les corrections à appliquer pour réaliser cette réduction sont (figure 2.23) :

1. Une correction qui prend en compte l'attraction gravitationnelle de la topographie (positive ou négative) autour du site de mesure = correction de terrain.
2. Une correction qui prend en compte l'attraction d'un plateau de densité (généralement) choisi constante entre le site de mesure et l'ellipsoïde = correction de plateau.
3. Une correction qui prend en compte l'élévation du site de mesure par rapport à l'ellipsoïde de référence = correction à l'air libre.

Le résultat de ces corrections est une mesure de la pesanteur "réduite" sur l'ellipsoïde de référence.

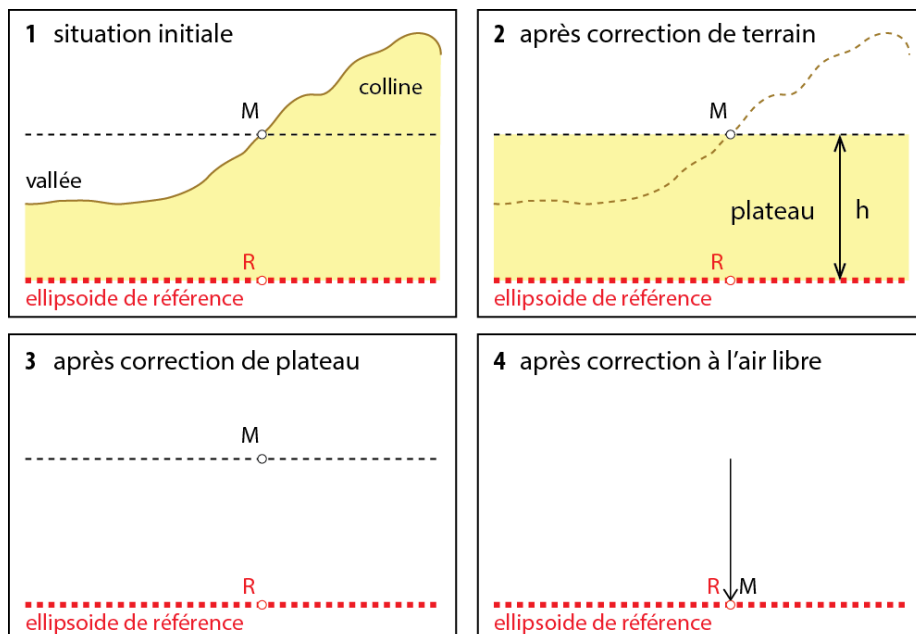


FIGURE 2.23

### Correction de terrain

Elle consiste à effacer l'attraction gravitationnelle due à l'excès de masse causé par la topographie au-dessus du site de mesure et au déficit de masse dû aux reliefs négatifs (vallées, bassins, dépressions) au-dessous du site de mesure (figure 2.24, gauche). On note que dans les deux cas on ajoute une correction de terrain positive.

Ce calcul se fait numériquement en utilisant un modèle numérique de terrain autour du site de mesure.

### Correction de plateau

Elle consiste à effacer l'attraction gravitationnelle due à un plateau de densité constante et d'épaisseur  $h$  = élévation du point de mesure au-dessus de l'ellipsoïde de référence (figure 2.24, centre). Cette correction est donnée par la formule de Bouguer ci-dessus :

$$\Delta g_{\text{plateau}} = 2\pi \rho G h \quad (2.94)$$

soit, en unité de mGal,  $\Delta g_{\text{plateau}} = 0.0419 \rho h$ . Pour une croûte continentale normale de densité  $\rho = 2670 \text{ kg/m}^3$ , on a  $\Delta g_{\text{plateau}} = 0.1119 \text{ mGal/m}$ .

### Correction à l'air libre

Elle consiste à effacer l'élévation du point de mesure par rapport à l'ellipsoïde de référence (figure 2.24, droite).

Soit  $g$  = valeur mesurée et  $g_0$  = valeur sur l'ellipsoïde de référence. On peut écrire la variation de  $g$  autour de  $g_0$  comme une série de Taylor :

$$g = g_0 - \frac{\partial g}{\partial r} h + \dots \quad (2.95)$$

On néglige les termes d'ordre supérieur à un, qui sont très petits. La correction à l'air libre devient simplement :

$$\Delta g_{\text{FA}} = \frac{\partial g}{\partial r} h \quad (2.96)$$

L'attraction gravitationnelle d'une masse ponctuelle  $M$  étant à une distance  $r$  est :

$$g = \frac{GM}{r^2} \quad (2.97)$$

on en déduit la dérivée radiale de  $g$  :

$$\frac{\partial g}{\partial r} = -2 \frac{GM}{r^3} = -2 \frac{g}{r} \quad (2.98)$$

La correction à l'air libre, gradient de gravité à l'air libre au voisinage de l'ellipsoïde de référence, est donc :

$$\Delta g_{\text{FA}} = -2 \frac{g}{R} h = -2 \frac{9.82}{6.378 \times 10^6} h = -0.3086 \times 10^{-4} h \quad (2.99)$$

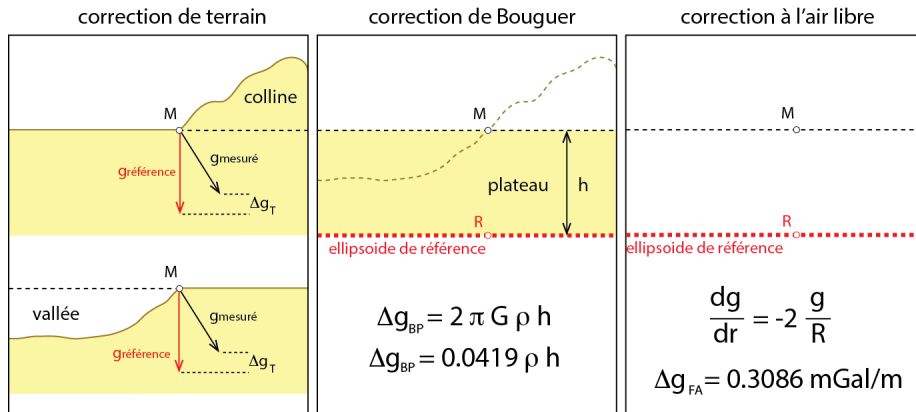


FIGURE 2.24

On exprime la correction à l'air libre en unité de mGal, avec  $h$  en mètres, comme suit :

$$\Delta g_{FA} = 0.3086 h \quad (2.100)$$

soit  $g_{FA} = 0.3086 \text{ mGal/m}$ .

### 2.5.3 Les anomalies de pesanteur

#### L'ordre de grandeur des corrections gravimétriques

La pesanteur mesurée à la station de train de Chamonix dans les Alpes françaises est de 980332.9 mGal. L'élévation de la station est de 1038 m, sa latitude est  $45^\circ 54'$  N. Prenons une croûte de densité  $\rho_c = 2800 \text{ kg.m}^{-3}$ . On donne la correction de terrain qui vaut, en mGal,  $12.73 \times \rho_c$ , avec  $\rho_c$  en  $\text{g.cm}^{-3}$ . Les corrections à appliquer à cette mesure brute valent :

$$\Delta g_{terrain} = 12.73 \times \rho_c = 35.6 \text{ mGal} \quad (2.101)$$

$$\Delta g_{plateau} = 2 \pi G \rho_c h = 121.8 \text{ mGal} \quad (2.102)$$

$$\Delta g_{airlibre} = 0.3086 \times h = 320 \text{ mGal} \quad (2.103)$$

On constate que la correction à l'air libre est très supérieure aux autres. En d'autres termes, la position du point de mesure dans le champ de pesanteur est l'effet qui domine – or il ne contient pas d'information géophysiquement importante. L'interprétation de la mesure brute doit donc, *a minima*, se faire après soustraction de cette contribution. La quantité résultante est l'anomalie à l'air libre.

La pesanteur sur l'ellipsoïde de référence vaut :

$$g_0 = 978031.846 \times [1 + 0.0053024 \sin^2(45.9) - 0.0000058 \sin^2(91.8)] \quad (2.104)$$

$$= 980700.58 \text{ mGal} \quad (2.105)$$

On peut donc maintenant corriger la mesure brute de l'ensemble des contributions que l'on sait calculer simplement. Il s'agit de la contribution "à l'air

libre” ci-dessus, de la contribution du terrain, et de la contribution d’un plateau d’épaisseur  $h$ . On obtient :

$$\Delta g_{\text{Bouguer}} = g_n - \Delta g_{\text{air libre}} - \Delta g_{\text{plateau}} + \Delta g_{\text{terrain}} \quad (2.106)$$

$$= -133.9 \text{ mGal} \quad (2.107)$$

La quantité résultante est l’anomalie de Bouguer. Le fait que la valeur obtenue soit négative indique qu’il subsiste encore un déficit de masse une fois ces 3 corrections faites. Il existe donc, en profondeur, un déficit de masse, qui reste à expliquer.

Ce simple exemple numérique illustre (1) que l’anomalie à l’air libre est le produit de base en gravimétrie car cette anomalie soustrait un signal dominant qui ne contient pas d’information géophysique intéressante, et (2) que l’anomalie de Bouguer est simplement ce qui reste une fois que l’on a enlevé tout ce que l’on peut facilement calculer.

### Anomalie à l’air libre

C’est la différence entre la pesanteur mesurée et celle sur l’ellipsoïde de référence ( $g_0$ ) corrigée de l’élévation du point de mesure dans le champ de pesanteur :

$$A_{FA} = g_m - (g_0 - 0.03086 h) \quad (2.108)$$

La correction à l’air libre est donc équivalente à soustraire l’effet de l’élévation du point de mesure sur la pesanteur mesurée. Une fois “ramené” sur l’ellipsoïde de référence, la mesure contient cependant toujours la totalité du signal de la croûte, qui est dominé par la topographie relative (figure 2.25, haut). Elle contient aussi les effets des variations de densité dans la croûte, mais la topographie (continentale ou océanique) étant une source plus proche du point de mesure, c’est aussi celui qui a la plus forte amplitude et qui domine le signal. La correction à l’air libre, finalement, a l’effet d’applatir les mesures brutes de la pesanteur. Elle est particulièrement utile pour pouvoir comparer directement les mesures réalisées sur les océans et les continents.

L’anomalie à l’air libre contient toutes les longueurs d’onde, mais sur une carte globale comme celle de la figure 2.25, ce sont les courtes longueur d’ondes de la topographie ou de la bathymétrie qui dominant. L’anomalie à l’air libre est nulle si le point de mesure se trouve sur l’ellipsoïde de référence. Elle est positive dans le cas d’un excès de masse – généralement dû à une topographie positive par rapport à la moyenne globale. C’est ce que l’on observe pour les chaînes de montagne ainsi que les dorsales océaniques lentes, qui sont aussi très marquées dans la bathymétrie. À l’inverse, elle est négative dans le cas d’un déficit de masse, généralement dû à une topographie négative par rapport à la moyenne globale. C’est le cas des fosses de subductions bien sûr, mais aussi des bassins sédimentaires continentaux de faible élévation et particulièrement épais, comme la plaine du Pô ou le bassin molassique frontal de l’Himalaya.

On observe aussi sur la figure 2.25 un signal à plus grande longueur d’onde, marqué par exemple par un positif régional dans l’Atlantique Nord ou un négatif régional centré sur le sud de l’Inde. Il faut rechercher la source de ces longueurs d’ondes – que l’on trouve aussi dans le géoïde – dans le manteau.

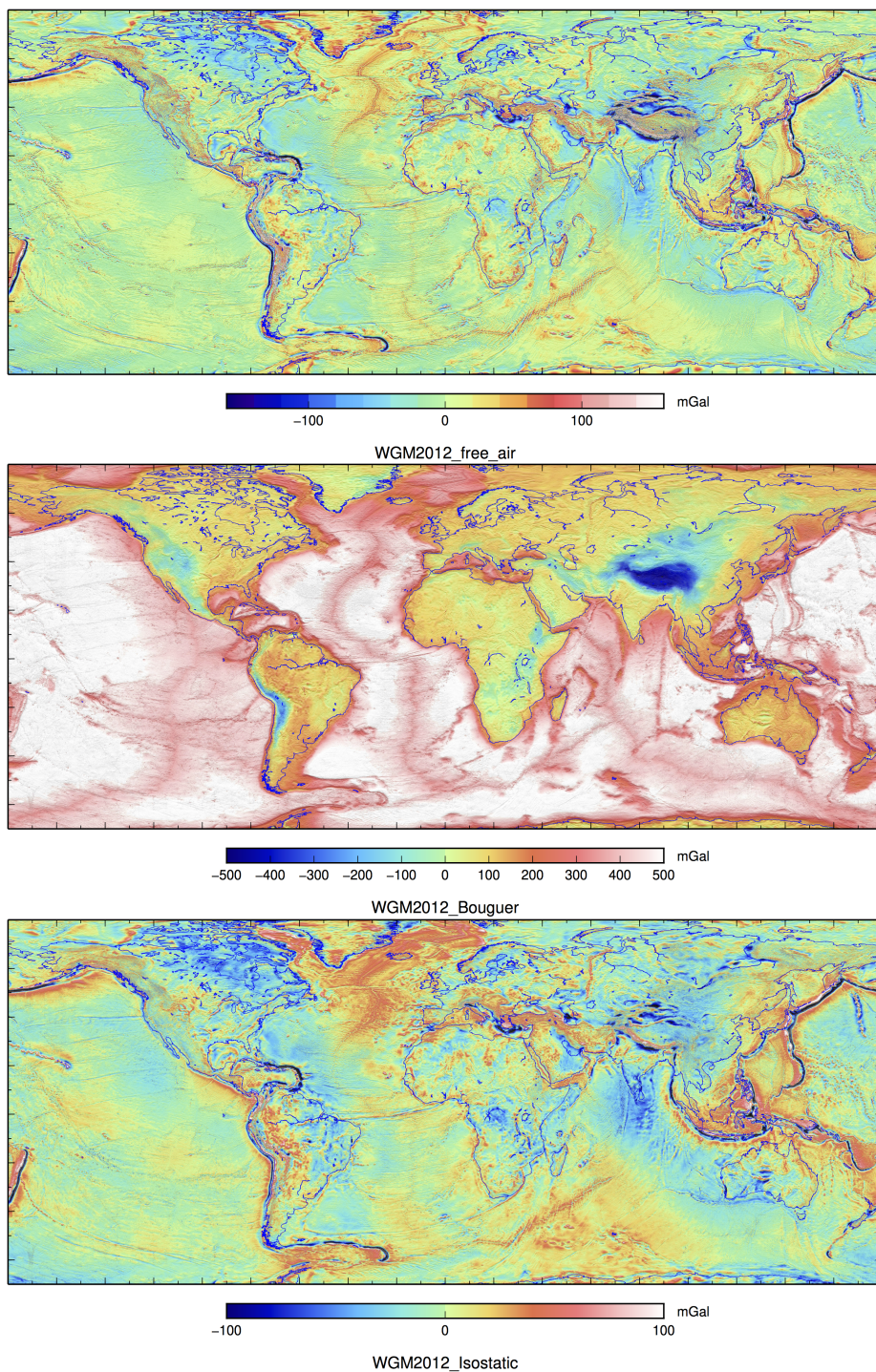


FIGURE 2.25

### Anomalie de Bouguer

C'est la différence entre la pesanteur mesurée et celle sur l'ellipsoïde de référence corrigée de l'élévation du point de mesure, de l'effet de plateau et de l'effet du terrain :

$$A_B = g_m - (g_0 - 0.3086 h) - (0.1119 \rho h) + \rho T \quad (2.109)$$

La correction de Bouguer revient donc à soustraire de la pesanteur mesurée l'ensemble des contributions que l'on sait facilement calculer : l'élévation du site de mesure, le terrain autour du site, et un plateau que l'on suppose de densité constante entre le site de mesure et l'ellipsoïde de référence.

L'anomalie de Bouguer est donc négative (1) s'il existe au sein du plateau considéré un déficit de masse notable par rapport à la densité constante utilisée, et /ou si (2) s'il existe un déficit de masse en-dessous du plateau considéré. Ce deuxième cas peut correspondre à la racine crustale d'un orogène, qui induit un déficit de masse latéral par rapport au manteau. C'est ce que l'on observe sur la figure 2.25 sous l'Himalaya et le Tibet, sous les Alpes ou sous la chaîne des Andes en Amérique du Sud. Il peut aussi correspondre à un manteau localement moins dense, par exemple parce qu'il est plus chaud.

À l'inverse, l'anomalie de Bouguer est positive s'il existe au sein du plateau considéré un excès de masse notable par rapport à la densité constante utilisée. C'est le cas pour l'ensemble des océans, où la densité crustale est de l'ordre de  $3300 \text{ g/m}^3$ . Les dorsales océaniques y sont un cas particulier car elles correspondent à des régions de flux de chaleur élevé, où la croûte et le manteau sont donc moins denses que la moyenne. La soustraction d'un plateau de densité constante y donne donc des valeurs plus élevées que la moyenne de la croûte océanique. Le même raisonnement s'applique aux points chauds.

### Anomalie isostatique

Puisque les anomalies de Bouguer ont des valeurs importantes, positives comme négatives, on peut vouloir les corriger en faisant une hypothèse géophysique simple, celle que l'ensemble de la croûte terrestre se trouve à l'équilibre isostatique local. Connaissant la topographie / bathymétrie et les densités moyennes des croûtes océanique et continentale, ainsi que du manteau, on sait calculer les épaisseurs crustales qui satisfont l'isostasie locale, ou au sens d'Airy (voir chapitre Forces et Rhéologie). On peut alors calculer la valeur de la pesanteur qui correspond à ce modèle et le soustraire à l'anomalie de Bouguer. La quantité résultante est l'anomalie isostatique.

On observe sur la figure 2.25 (bas) que la fourchette des valeurs de l'anomalie de Bouguer (figure 2.25, milieu) est très fortement réduite. Cela indique que l'hypothèse de l'isostasie locale est très largement valide sur Terre. La forte anomalie de Bouguer négative du Tibet, par exemple, est très fortement réduite. Le fort contraste continents/océans de l'anomalie de Bouguer est très largement réduit. Les frontières de plaque – fosses de subduction, dorsales océaniques – restent marquées car l'isostasie locale n'y est pas particulièrement le processus majeur qui maintient le relief.



On observe toujours le signal à plus grande longueur d'onde mentionné ci-dessus pour l'anomalie à l'air libre (positif régional dans l'Atlantique Nord, négatif régional centré sur le sud de l'Inde) qui le résultat de processus mantelliques.

### 2.5.4 Quelques exemples

#### Le Tibet

La figure 2.26 montre un profil au travers du Tibet, depuis l'Inde au sud (gauche sur la figure) au bassin du Tarim au nord (droite sur la figure). La topographie montre, du sud au nord l'avant-pays himalayen très plat et de faible élévation, les montagnes de l'Himalaya à la transition Inde/Tibet, le plateau tibétain à une élévation moyenne de 5000 m, et le bassin du Tarim à une élévation d'ordre de 1000 m.

L'anomalie à l'air libre le long de ce profil "gomme" l'effet majeur de l'élévation sur la mesure de la pesanteur, comme expliqué plus haut. On observe donc surtout l'effet de la topographie, qui se manifeste par des courtes longueurs d'onde qui montrent notamment l'effet de haut sommes himalayens. Les bassins Indien et du Tarim ont une anomalie à l'air libre équivalente et proche de zéro.

L'anomalie de Bouguer montre un fort négatif sous le plateau tibétain (-400 mGal), qui s'explique par la présence d'une racine crustale importante, comme décrit dans la section *Forces et Rhéologie*. L'anomalie isostatique est très faible sous les plaines de l'Inde et du Tarim, ainsi que sous le Tibet, ce qui indique que l'élévation de ces régions est en majeure partie expliquée par l'isostasie locale d'Airy. Le résidu positif qui subsiste au niveau de l'Himalaya et de la bordure nord du Tibet indique que l'élévation de ces chaînes de montagnes est soutenue par des processus autres que l'isostasie locale.

#### Topographie soutenue par la résistance mécanique de la croûte

Dans ce cas, il n'y a pas de racine crustale car la croûte ne se déforme pas sous l'effet de la charge imposée par le relief (figure 2.27, gauche). C'est par exemple le cas des reliefs de courte longueur d'onde – disons <100 km – qui sont soutenus simplement par la résistance mécanique de la lithosphère. Il n'y a pas de modification de la distribution des masses en profondeur et l'anomalie de Bouguer est plate. L'anomalie à l'air libre est proportionnelle au relief.

#### Topographie soutenue par l'isostasie

Dans ce cas, la charge du relief induit une déformation de la croûte et la mise en place d'une "racine crustale" (figure 2.27, droite). On dit alors que le relief est "compensé" par cette racine crustale. C'est généralement le cas des reliefs de grande longueur d'onde – plusieurs centaines de km – suffisamment pesants pour déformer la croûte vers le bas. Une partie de la croûte pénètre donc dans le manteau, où il y a donc une anomalie de masse négative que la correction de Bouguer ne prend pas en compte. L'anomalie de Bouguer résultante est donc négative. La condition d'isostasie impliquant qu'il n'y a pas de différence de

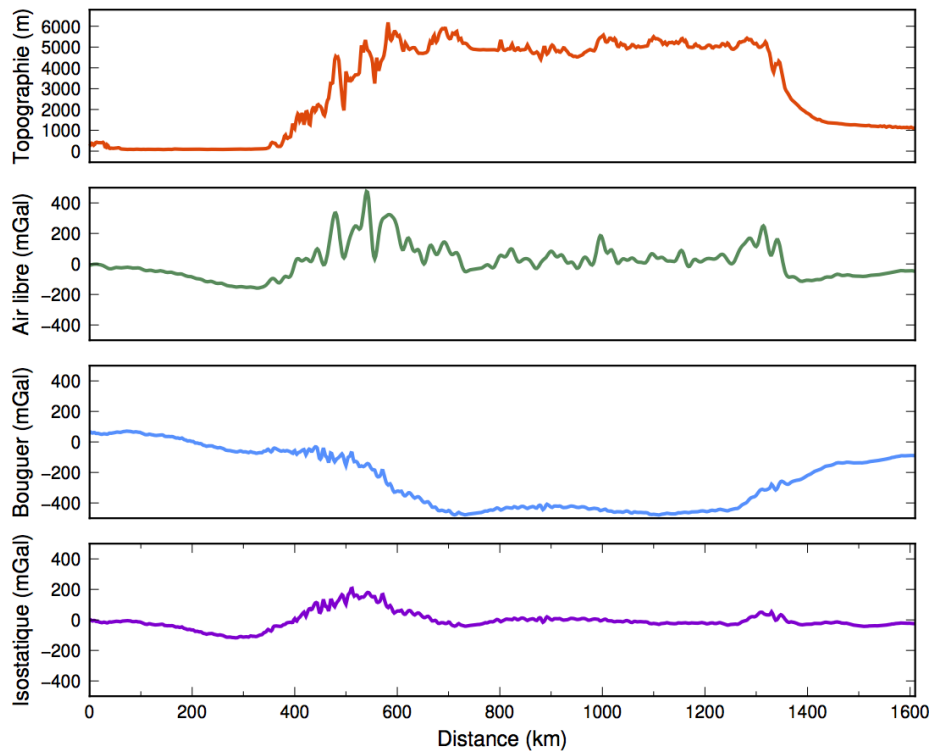


FIGURE 2.26

masse entre une colonne de roches normale et une colonne épaissie, l'anomalie à l'air libre est proche de zéro, sauf aux bordures du relief.

### Anomalie de Bouguer au-dessus d'un rift

À grande échelle, le déficit de masse dans le manteau sous le rift dû à l'advection de matériel mantellique chaud implique une anomalie de Bouguer négative. À l'intérieur du rift, l'excès de masse dans la croûte dû aux intrusions de roches mafiques implique un "positif relatif" dans la partie centrale du rift. On observe une bonne corrélation avec les vitesses sismiques.

## 2.6 Le géoïde à l'isostasie

### 2.6.1 Moment de la distribution de densité

Dans une région isostatiquement compensée, la condition d'isostasie implique que la masse de colonnes de lithosphère d'épaisseur  $h$  est identique. Par rapport à une colonne de référence, la condition d'isostasie en terme de variation de

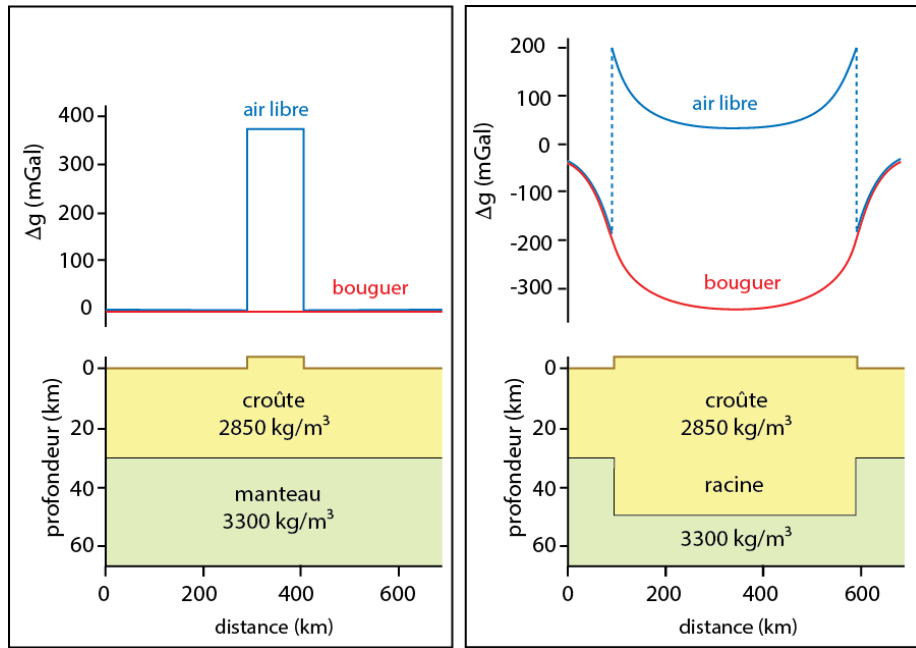


FIGURE 2.27

densité dans une colonne s'écrit :

$$\int_0^h \Delta\rho(y) dy = 0 \quad (2.110)$$

En effet, pour une même altitude  $y$ , seules les variations de densité dans une colonne donnée par rapport à la référence interviennent dans l'isostasie (voir figure).

Cette équation permet, entre autres, de déterminer rapidement si un modèle géométrique de croûte donné se trouve bien à l'isostasie. Elle peut cependant être satisfaite par une infinité de distributions de masse. On va maintenant montrer que l'anomalie du géoïde permet de lever cette ambiguïté, au premier ordre, car elle est sensible au "moment de la distribution de densité" :

$$\int_0^h \Delta\rho(y) y dy \quad (2.111)$$

On va pour cela reprendre l'exemple du disque utilisé ci-dessus pour calculer la correction de plateau. Cette fois-ci partons du potentiel plutôt que de la pesanteur car nous nous intéressons au géoïde. Comme plus haut, nous partons d'un anneau de section carrée  $dy dr$  et de rayon  $r$ . On se place à l'aplomb du centre de cet anneau à une distance verticale  $y = -b$  du plan contenant l'anneau. Le potentiel de gravité en ce point dû à un petit élément de masse  $dm$  est :

$$\begin{aligned} dU_{\text{element}} &= -G \frac{dm}{[r^2 + (y + b)^2]^{1/2}} \\ &= -G \frac{\Delta\rho r d\alpha dr dy}{(r^2 + (y + b)^2)^{1/2}} \end{aligned} \quad (2.112)$$

où  $r d\alpha$  est le petit arc, côté de l'élément de masse considéré. On a donc, pour l'anneau :

$$\begin{aligned} dU_{\text{anneau}} &= \int_0^{2\pi} dU_{\text{element}} d\alpha \\ &= -G \frac{\Delta\rho 2\pi r dr dy}{(r^2 + (y+b)^2)^{1/2}} \end{aligned} \quad (2.113)$$

On intègre cet anneau selon les directions  $y$  et  $r$  pour trouver l'anomalie de potentiel causée par un disque :

$$\Delta U = -2\pi G \int_0^h \int_0^R \frac{r \Delta\rho(y)}{(r^2 + (y+b)^2)^{1/2}} dr dy \quad (2.114)$$

L'intégration selon  $r$  donne l'anomalie de potentiel causée par un disque de rayon  $R$  :

$$\Delta U = -2\pi G \int_0^h \Delta\rho(y) \left[ (R^2 + (y+b)^2)^{1/2} - (y+b) \right] dy \quad (2.115)$$

On se place maintenant à la limite  $R \rightarrow \infty$  et on cherche à simplifier l'expression précédente. On peut pour cela utiliser un développement limité (binomial) pour écrire l'expression entre parenthèses à la puissance 1/2 qui contient  $R$  :

$$(R^2 + (y+b)^2)^{1/2} = R \left( 1 + \frac{(y+b)^2}{R^2} \right)^{1/2} \quad (2.116)$$

Le développement limité donne :

$$(R^2 + (y+b)^2)^{1/2} = R \left( 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{y+b}{R} \right)^2 - \frac{1}{8} \left( \frac{y+b}{R} \right)^4 \dots \right) \quad (2.117)$$

A la limite où  $R \rightarrow \infty$  on peut donc écrire :

$$(R^2 + (y+b)^2)^{1/2} = R \quad (2.118)$$

De fait, l'anomalie de potentiel causée par un plateau est :

$$\Delta U = -2\pi G \left[ R \int_0^h \Delta\rho(y) dy - \int_0^h (y+b) \Delta\rho(y) dy \right] \quad (2.119)$$

Appliquons la condition d'isostasie. Dans ce cas, l'équation 2.110 implique que la première intégrale vaut zéro. On peut donc réduire l'anomalie de potentiel à l'expression suivante :

$$\Delta U = 2\pi G \int_0^h y \Delta\rho(y) dy \quad (2.120)$$

On constate que l'anomalie du potentiel de gravité causée par un élément de grande longueur d'onde est proportionnelle à la distribution du moment de densité sous le point de mesure.

On peut retrouver l'anomalie de gravité causée par un plateau de densité constante et d'épaisseur  $h$  en utilisant le fait que la gravité est la dérivée du potentiel. On retrouve de manière triviale :

$$g_{\text{plateau}} = 2\pi \rho G h \quad (2.121)$$

Nous avons vu plus haut qu'anomalie du potentiel et hauteur du géoïde sont reliés par  $\Delta U = -g_0 \Delta N$  (équation 2.54). On peut donc relier directement la hauteur du géoïde à la distribution du moment de densité :

$$\Delta N = -\frac{2\pi G}{g_0} \int_0^h y \Delta \rho(y) dy \quad (2.122)$$

Le moment de densité est dominé par le contraste de densité au Moho entre croûte et manteau. De fait, la mesure de la hauteur du géoïde dans une région donnée permet de déterminer de manière relativement simple les variations de profondeur du Moho, c'est-à-dire d'épaisseur crustale.

## 2.6.2 Les forces qui maintiennent la topographie

Revenons à la question posée dans un chapitre précédent qui était de déterminer la force horizontale nécessaire pour maintenir une topographie donnée. Partons du cas très simplifié d'un bloc de croûte continentale de densité  $\rho(y)$  et d'épaisseur  $h$  inclus dans un manteau de densité  $\rho_m$  tel que la "racine crustale" a une épaisseur  $b$ .

On utilise l'équation 2.122, qui exprime l'anomalie du potentiel de gravité en fonction de la distribution du moment de densité, pour écrire la différence de potentiel entre deux colonnes du modèle, l'une continentale, l'autre mantellique. On pose  $y = 0$  au sommet du plateau crustal et  $y$  positif vers le bas. Cette différence de potentiel est due à (1) la topographie crustale entre 0 et  $h - b$ , de densité  $\rho(y)$ , et (2) le contraste de densité  $\rho(y) - \rho_m$  le long du contact vertical croûte/manteau, entre  $h - b$  et  $h$ . On écrit donc :

$$\begin{aligned} \Delta U &= 2\pi G \left[ \int_0^{h-b} y \rho(y) dy + \int_{h-b}^h y (\rho(y) - \rho_m) dy \right] \\ &= 2\pi G \left[ \int_0^h y \rho(y) dy - \rho_m \int_{h-b}^h y dy \right] \\ &= 2\pi G \left[ \int_0^h y \rho(y) dy - \rho_m \left( hb - \frac{1}{2}b^2 \right) \right] \end{aligned} \quad (2.123)$$

On fait l'hypothèse que le système est à l'isostasie, donc que  $\rho_c h = \rho_m b$ . Plaçons nous aussi dans le cas où  $\rho(y) = \text{constante} = \rho_c$ . On intègre la première partie de l'équation précédente et on substitue  $b$  dans la seconde partie pour trouver :

$$\begin{aligned} \Delta U &= 2\pi G \left[ \frac{1}{2} \rho_c h^2 - \rho_m \left( h^2 \frac{\rho_c}{\rho_m} - \frac{1}{2} h^2 \frac{\rho_c^2}{\rho_m^2} \right) \right] \\ &= 2\pi G \left[ -\frac{1}{2} \rho_c h^2 \left( 1 - \frac{\rho_c}{\rho_m} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.124)$$

Le contenu entre crochets nous rappelle-t-il quelque chose ? Nous avons écrit, dans le chapitre “Forces et rhéologie”, que la force horizontale entre le plateau et le manteau encaissant, dans ce même système, était :

$$F_b = -\frac{1}{2}\rho_c g h^2 \left(1 - \frac{\rho_c}{\rho_m}\right) \quad (2.125)$$

On en déduit donc que :

$$F_b = -\frac{g}{2\pi G} \Delta U \quad (2.126)$$

Nous avons écrit plus haut que  $\Delta U = -g\Delta N$  (équation 2.54), on a donc :

$$F_b = \frac{g}{2\pi G} \Delta N \quad (2.127)$$

On voit donc que la force horizontale générée par les gradients latéraux d'énergie potentielle de gravité dans la lithosphère est proportionnelle à l'anomalie du géoïde. Ce résultat fondamental, dérivé ici pour une configuration simple, reste valide pour toute géométrie, dans un système à l'équilibre isostatique.

Prenons l'exemple des Alpes Maritimes en France, où la hauteur du géoïde varie de 53 m au coeur du massif cristallin du Mercantour à 45 m au pied de la marge Ligure, soit  $\Delta N = 8$  m. L'équation précédente nous donne :

$$F_b = \frac{10}{2 \times \pi \times 6.7 \times 10^{-11}} \times 8 \approx 2 \times 10^{-11} \text{ N/m} \quad (2.128)$$

Intégrée sur une lithosphère de 100 km d'épaisseur, cette force correspond à une contrainte horizontale moyenne de :

$$\sigma_{xx} = \frac{2 \times 10^{-11}}{100 \times 10^3} = 2 \times 10^6 \text{ N/m/m} = 2 \text{ MPa} \quad (2.129)$$

## 2.7 Mesure du champ de pesanteur terrestre

### 2.7.1 Pendule

Les premières mesures de la pesanteur furent réalisées à l'aide d'un pendule, selon le principe développé par Huygens (1629-1695). En effet, la période d'oscillation  $T$  d'un pendule simple (masse ponctuelle fixée à l'extrémité d'un fil sans masse, inextensible et sans raideur, et oscillant sous l'effet de la pesanteur) ne dépend – pour des oscillations de petite amplitude – que de la longueur du fil  $L$  et de la valeur de la pesanteur  $g$  :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad (2.130)$$

Le pendule a permis à l'astronome français Richter, dès 1672, de noter une différence de  $g$  entre Cayenne, proche de l'équateur, et Paris. Cette observation, que l'on sait maintenant être le résultat du bombement équatorial de la Terre, sera importante pour initier les campagnes de géodésie de Clairaut et Maupertuis

en Laponie (1736) et de Bouguer et La Condamine au Pérou (1737-1740) pour mesurer directement la longueur d'un arc de méridien à l'équateur et proche du pôle. Ils montrèrent que la longueur d'un degré de méridien en Laponie est supérieure à cette même mesure au Pérou. On en déduisit donc qu'une sphère tangente au pôle a un rayon supérieur à celui d'une sphère tangente à l'équateur, donc que la Terre est aplatie aux pôles.

Pendant l'expédition au Pérou, Bouguer mesura la pesanteur à l'aide d'un pendule à des altitudes différentes. Il corrigea les mesures de l'effet de l'élévation dans le champ de pesanteur et de la topographie : cette correction porte maintenant son nom. Le ratio de l'attraction gravitationnelle  $\Delta g_{BP}$  d'une plaque infinie d'épaisseur  $h$  et de densité  $\rho$  (= la croûte) et de l'attraction gravitationnelle  $g$  d'une Terre de rayon  $R$  et densité moyenne  $\rho_0$  donne :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta g_{BP}}{g} &= \frac{2\pi g \rho h}{\frac{4}{3}\pi G \rho_0 R} \\ &= \frac{3}{2} \frac{\rho}{\rho_0} \frac{h}{R} \end{aligned} \quad (2.131)$$

A partir de mesures de  $\Delta g_{BP}$  dans la région de Quito, Bouguer détermina que  $\rho_0/\rho \approx 4.5$ . On sait maintenant que  $\rho_0 = 5510 \text{ kg/m}^3$  et  $\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$  – le rapport est donc en fait de 2.

Les pendules ont continué à être utilisés pour mesurer  $g$  jusque dans les années 60, avec des modèles de plus en plus complexes et précis (jusqu'à  $10^{-6}$ ).

### 2.7.2 Déviation de la verticale

Lors de son expédition, Bouguer utilisa aussi la déviation locale de la verticale pour mesurer  $g$ . La déviation de la verticale est l'angle (petit) entre la verticale locale et une direction astronomique déduite de la visée vers une étoile. On voit qu'une anomalie de masse ponctuelle induit une déviation de la verticale  $\delta$  donnée par :

$$\tan \delta \approx \delta = \frac{g_x}{g_z + g_0} \approx \frac{g_x}{g_0} \quad (2.132)$$

car  $g_z \ll g_0$ . On a aussi, par définition de  $g = -\nabla U$  et en vertu de la relation anomalie de potentiel / hauteur du géoïde (équation 2.54) :

$$g_x = -\frac{dU}{dx} = g_0 \frac{dN}{dx} \quad (2.133)$$

On obtient donc :

$$\delta = \frac{dN}{dx} \quad (2.134)$$

soit

$$N = \int_x \delta(x) dx \quad (2.135)$$

On voit donc que l'on peut déterminer le géoïde en mesurant la déviation de la verticale en plusieurs points et en l'intégrant selon  $x$ . Cette méthode de détermination du géoïde, dit "astro-géodésique" a été utilisée jusque dans les années 1970, avant d'être supplantée par les méthodes de géodésie spatiale.

Supposons que la verticale soit déviée par la masse d'une montagne de symétrie radiale. On peut approximer ce relief comme la somme de cylindres dont l'attraction gravitationnelle est  $G\rho h_i$ . L'équation 2.132 donne alors :

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{g_{\text{montagne}}}{g_0} \\ &= \frac{G\rho \sum h_i}{\frac{4}{3}\pi G\rho_0 R} \\ &= \frac{\sum h_i}{\frac{4}{3}\pi R} \frac{\rho}{\rho_0} \end{aligned} \quad (2.136)$$

La déviation de la verticale est donc proportionnelle au ratio de la densité de la croûte et de la densité moyenne de la Terre.

En 1774, Bouguer mesura la déviation de la verticale causée par le Chimborazo, point culminant de l'Équateur (6272 m). Il trouva que  $\rho/\rho_0 \approx 12$ , un résultat qui lui sembla non réaliste car très différent de celui qu'il avait obtenu à Quito (voir ci-dessus). Ce résultat resta longtemps sans explication. Dans son livre *“La Figure de la Terre”* (1749), il écrit : *“Pour revenir aux observations faites sur Chimborazo, il paraît assez qu'on peut dire en se refermant dans le fait simple, que les montagnes agissent en distance, mais que leur action est bien moins considérable que le promet la grandeur de leur volume.”*

Le géodésien anglais George Everest effectua des mesures similaires en Inde de 1806 à 1843. Il détermina une valeur de la déviation de la verticale de 5.23 secondes d'arc, qu'il attribua à l'attraction gravitationnelle exercée par la masse de l'Himalaya. En 1855, John Pratt, archidiacre de Calcutta, astronome et mathématicien, calcula la déviation minimale que pouvait causer le relief himalayen, considérant une densité constante. Il trouva 15.89 secondes d'arc. L'attraction gravitationnelle du relief himalayen était à l'évidence bien moindre que ce que prédisait la théorie.

Pratt proposa que cette anomalie était due à des variations latérales de densité : l'Himalaya serait donc plus haut car moins dense que la croûte qui l'entoure. Airy proposa au contraire que la densité de la croûte était uniforme, mais que son épaisseur variait latéralement. Pour lui, les reliefs positifs tels que l'Himalaya correspondaient à une croûte plus épaisse qui leur permettaient de flotter au-dessus des terrains encaissants.

### 2.7.3 Mesures relatives

#### Gravimètre à ressort

Le principe est simple : il consiste à suspendre une masse à l'extrémité d'un ressort en métal ou en fibre de quartz et de mesure les variations de l'allongement du ressort en fonction des variations de pesanteur. L'allongement est une fonction linéaire de la raideur du ressort pour une petite variation de pesanteur. On amplifie ce petit allongement pour pouvoir le mesurer et on étalonne le déplacement par une mesure sur un site où  $g$  est connu.

Ces gravimètres relatifs sont des instruments mécaniques relativement complexes et fragiles. L'ensemble masse-ressort est placé sous vide et éventuellement



thermostaté pour limiter les frottements et éviter des variations des propriétés élastique du ressort.

Ces instruments délivrent des mesures relatives de  $g$  en un point par rapport à un autre. Ils doivent être étalonnés sur des sites où l'on dispose d'une mesure absolue de  $g$ . De plus, les propriétés mécaniques du ressort se dégradant nécessairement avec le temps, il est nécessaire de déterminer la dérive instrumentale en réoccupant de manière répétée la même station. Leur précision est de l'ordre de 5–10  $\mu\text{Gal}$ .

On distingue classiquement deux types de gravimètres relatifs :

1. Ceux utilisant un ressort vertical : c'est le cas des Scintrex CG3 et CG5. Le ressort est en quartz et on mesure optiquement (anciens instruments) ou à l'aide d'un capteur capacitif la variation de longueur du ressort.
2. Ceux qui utilisent un ressort dit "à longueur nulle" : c'est le cas du Lacoste et Romberg. Une tige horizontale porte la masse à l'une des ses extrémités et pivote autour d'un axe horizontal à l'autre. La tige elle-même est retenue par un ressort. Une variation de  $g$  fait pivoter la tige, le ressort s'allonge ou se raccourcit. La lecture se fait par la restauration de la tige à la position horizontale à l'aide d'une vis micrométrique.

Ces gravimètres sont les plus employés sur le terrain pour réaliser des mesures de  $g$  car ils sont tout à fait transportables (quelques kg) et de manipulation facile. Leur coût reste toutefois élevé, de l'ordre de 100 k€.

### Gravimètre supraconducteur

Le principe consiste à réaliser l'équilibre d'une sphère métallique (en niobium) soumise à son poids et à une force de lévitation magnétique. Cette dernière résulte de l'action d'un champ magnétique créé par deux bobines parcourues par un courant permanent, sur les courants qui parcourent la sphère. On maintient l'ensemble sphère + bobines à l'état supraconducteur de manière à atteindre un état de résistance électrique nulle. Cela nécessite de maintenir le système dans un bain d'hélium liquide à une température de 4.2 K dans un dewar cryogénique.

Ce principe permet d'une part une grande sensibilité, d'autre part assure une très faible dérive instrumentale. Ces instruments sont capables de détecter une variation de la position de la sphère de l'ordre de  $10^{-11}$  m ! Ils sont cependant très chers (300-400 k€), complexes à mettre en oeuvre et ne sont intéressants que pour des mesures continues sur des sites d'observatoires maintenus de manière permanente. Il y en a donc assez peu en opération dans le monde (une trentaine, essentiellement en Europe).

## 2.7.4 Gravimètres absolus

Le principe simple est basé sur la chute libre d'un corps dans le vide. On mesure la distance  $y$  et le temps de chute  $t$  et on résout l'équation de mouvement pour trouver  $g$  :

$$y(t) = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (2.137)$$

où  $y_0$  et  $v_0$  sont la position et la vitesses initiales, nulles dans notre cas.

Une estimation précise de  $g$  nécessite plusieurs mesures de  $y(t)$ . Cependant dans le champ de pesanteur terrestre un objet chute de 5 m en une seconde. Pour des instruments de taille raisonnable il faut donc des mesures très précises de distance et de temps. Cela requiert de combiner interférométrie laser pour mesurer les distances et horloges atomiques pour mesurer le temps.

Le gravimètre absolu de référence actuel, le FG5 (commercialisé par Micro-G Solutions), utilise la chute d'un coin cube sur 20 cm, un faisceau laser pour le suivi de la chute et une horloge atomique au Rubidium. Le temps de chute sur 20 cm est de 0.2 ns.

Les gravimètres absolus mesurent directement  $g$  et ne subissent, par définition, aucune dérive instrumentale. Leur précision est de l'ordre de  $2 \mu\text{Gal}$  pour le FG5 à  $10 \mu\text{Gal}$  pour l'A10, ce dernier ayant l'avantage d'être plus portable que le FG5. Leur coût est de l'ordre de 400 k€. Ce sont des appareils complexes et délicats à opérer.

Une nouvelle génération de gravimètres absolus, les gravimètres à atomes froids, est en train de voir le jour. Ils utilisent la chute d'un nuage d'atomes (Cs, Rb) soumis à la gravité après avoir été refroidis et piégés par laser. La masse d'épreuve est donc cet amas d'atomes dont la chute est suivie par interférométrie Raman. Leur niveau de précision actuel est de l'ordre de  $2 \mu\text{Gal}$ , comme le FG5 décrit ci-dessus. Ils ne dépendent pas d'un système mécanique pour la chute de la masse d'épreuve et sont donc théoriquement plus robustes et simples à opérer qu'un FG5.

Ces gravimètres sont suffisamment précis et exacts pour mesurer des déplacements verticaux d'origine géophysique. En effet,  $dg_m/dr \approx -0.3 \text{ mGal/m}$ . De fait, un déplacement vertical de 1 cm correspond à une variation de  $g$  de  $3 \mu\text{Gal}$ , mesurable par gravimétrie absolue. Ce niveau de précision permet de mesurer, par exemple, les mouvements verticaux actuels dus au réajustement isostatique post-glaciaire ou aux déformations des systèmes volcaniques.

### 2.7.5 Précision des mesures

La précision des mesures de  $g$  à la surface terrestre s'est grandement améliorée depuis les mesures par pendule de Richter et de Bouguer jusqu'aux gravimètres supraconducteurs ou absolus actuels.

On rappelle ci-dessous quelques contributions notables à la valeur de  $g$  :

- Latitude entre pôle et équateur = 5 000 mGal
- Altitude ( $3 \mu\text{Gal/cm}$ ) entre plancher océanique et haute montagne = 3 000 mGal
- Contribution des masses internes profondes (interface croûte-manteau) = 500 mGal
- Contribution des masses internes superficielles (dans la croûte supérieure) = 50 mGal
- Marées terrestres = 0.2 mGal
- Cavités et structures archéologiques = 0.02 mGal

### 2.7.6 Gravimétrie spatiale

La mesure du champ de pesanteur terrestre peut aussi se réaliser depuis l'espace. La manière la plus simple de procéder est de placer un satellite en orbite et de suivre sa trajectoire. Celle-ci dépend de l'attraction gravitationnelle dite "centrale", où l'on considère une Terre de masse ponctuelle en son géocentre, et de perturbations :

- D'origine gravitationnelle
  - Non-sphéricité du potentiel de pesanteur de la Terre due à son aplatissement (effet de premier ordre) et aux hétérogénéités de la distribution des masses dans la Terre (effet de second ordre, d'autant plus atténué que le satellite est éloigné de la Terre).
  - Attraction gravitationnelle de la Lune et du Soleil.
  - Marées terrestres et océaniques.
- D'origine non-gravitationnelle (forces dites "de surface") :
  - Pression des photons sur le satellite = somme de la pression de radiation solaire et de l'albedo terrestre.
  - Frottement dans l'atmosphère = la traînée.
  - Manœuvres éventuelles du satellite.

On utilise pour cela des satellites dits "géodésiques" qui sont simplement des petites sphères ( $\approx 25$  cm de diamètre) munies de rétro-rélecteurs. Ils sont suivis depuis le sol par télémétrie laser. On déduit de ce suivi direct de leur trajectoire les composantes d'intérêt pour reconstituer le champ de pesanteur terrestre après avoir corrigé des autres effets. Cette méthode est utilisée depuis les années 70 avec les satellites Starlette (CNES, 1975), Lageos 1 (NASA, 1976), Stella (CNES, 1993), Lageos 2 (Nasa, 1994). Elle requiert un réseau de stations de télémétrie laser sol le mieux distribué possible géographiquement sur le globe – ce qui pose tout de suite un problème dans l'hémisphère sud. L'hétérogénéité de ce réseau sol aura de fait un impact sur la précision de la reconstitution du champ de pesanteur. Les satellites sont placés sur une orbite suffisamment haute pour minimiser les frottements atmosphériques et donc prolonger la durée de vie du satellite, mais suffisamment basse pour permettre la télémétrie laser depuis le sol.

Une seconde option consiste à suivre la trajectoire du satellite à l'aide d'un système de positionnement GPS embarqué. C'est ce qui a été mis en oeuvre par la mission allemande "CHAMP". Le satellite était en fait suivi à la fois par GPS et télémétrie laser. Il était aussi équipé d'un accéléromètre de grande précision dont l'objectif était de mesurer les perturbations non-gravitationnelles telles que les frottements atmosphériques et l'albedo terrestre. CHAMP fut lancé en 2000 sur une orbite de  $87^\circ$  d'inclinaison et d'altitude initiale de 454 km. Il fonctionna jusqu'en septembre 2010. Il était aussi équipé d'un magnétomètre et d'appareils de mesure du champ électrique ainsi que de la densité électronique dans l'ionosphère. Il a notamment permis de calculer le géoïde et le champ de pesanteur "EIGEN-CHAMP03S".

Une troisième option consiste à suivre la trajectoire du satellite à partir d'un autre satellite : en fait, on mesure la distance qui sépare un tandem de satellites. C'est le cas de la mission américaine GRACE, où deux satellites identiques se suivent à une distance de 220 km en orbite polaire à une altitude de 500 km.

La distance entre les deux satellites (Tom et Jerry) est mesurée par télémétrie micro-onde en bande K ( $\approx 20$  GHz), ce qui permet une précision de l'ordre de  $1 \mu\text{m/s}$  sur la vitesse relative des deux satellites. Quand le tandem s'approche d'une anomalie positive, le premier satellite accélère, la distance entre les deux augmente. GRACE est aussi équipé d'un accéléromètre qui permet de mesurer les perturbations non-gravitationnelles et de les corriger a posteriori. Etant donné son altitude, GRACE ne permet pas une résolution spatiale extraordinaire, son atout majeur est la précision de la mesure gravimétrique aux grandes longueurs d'onde et la durée de vie du satellite. Les deux combinés, on peut alors suivre les variations temporelles du champ de gravité terrestre dues, en particulier, aux déplacements saisonniers des masses d'eau continentales et océaniques. GRACE a aussi permis d'observer les déformations causées par les grands séismes de subduction récents (Sumatra en 2004, Maule en 2010, Japon en 2011).

Enfin, la mission européenne GOCE s'est, elle, donné l'objectif d'une précision de hauteur de la détermination de la hauteur du géoïde de 1 cm à la résolution spatiale de 100 km, soit 3 ordres de grandeur mieux que GRACE. Il faut pour cela une orbite très basse (initialement 250 km), ce qui a été en partie compensé par une forme aérodynamique avec des ailerons et des moteurs ioniques de faibles puissance pour compenser la traînée. GOCE a été lancé le 17 mars 2009 et est rentré dans l'atmosphère terrestre le 11 novembre 2013. Comme CHAMP, sa trajectoire était suivie à la fois par GPS et télémétrie laser. GOCE était cependant équipé d'une "gradiomètre", un ensemble de trois paires d'accéléromètres capables de détecter des accélérations de  $10^{-12}$  g dans 3 directions orthogonales.

On retient que la recette à mettre en oeuvre pour mesurer le champ de pesanteur terrestre depuis l'espace doit utiliser :

- Une orbite la plus basse possible de manière à être le plus sensible aux variations de densités dans la Terre. Cependant, plus l'orbite est basse plus les frottements atmosphériques sont importants, donc plus la durée de vie du satellite est limitée.
- Un suivi continu et précis de la trajectoire du satellite, par exemple par télémétrie laser et/ou GPS.
- Un moyen de s'affranchir des forces de surface. Il faut pour cela les mesurer avec des accéléromètres et les compenser *a posteriori* lors du calcul.

On constate l'amélioration rapide des modèles du champ de pesanteur depuis le modèle GRIM5 basé sur une combinaison de mesures terrestres et spatiale via les satellites géodésiques classiques, puis les modèles dérivés de CHAMP, GRACE, puis GOCE. Cette précision dépend de la longueur d'onde (= distance caractéristique) considérée.