Outils mathématiques pour la géophysique
Remise à niveau – Algèbre

Table des matières

1 Espaces vectoriels

1.1 Espace vectoriel - sous espace vectoriel

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

Définition : F est un sous espace vectoriel de E si

1. F n'est pas l'ensemble vide
2. F est stable : $\forall\,\lambda$ et $\forall(\underline{u},\underline{v}) \in \mathrm{F}^2$, $\underline{u} + \lambda\,\underline{v} \in \mathrm{F}$

1.2 Famille libre - Famille liée

Définition : Soit $\mathrm{F} = (\underline{x_1}, \underline{x_2}, ..., \underline{x_n})$ une famille de *n* vecteurs. F est une famille libre si et seulement si :

$$\forall\,(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n), \quad \lambda_1\,\underline{x_1} + \lambda_2\,\underline{x_2} + ... + \lambda_n\,\underline{x_n} = \underline{0} \quad \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$$

Dans le cas contraire F est une famille liée.

Exemple :

Dans $\mathbb{R}^2$, $F = ((1,0);(1,1))$

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ On peut écrire : $\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \mu = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \mu = 0$

Donc F est une famille libre.

Remarque :

Si $(\underline{x_1}, \underline{x_2})$ sont liés $\Leftrightarrow$ $\underline{x_1}$ et $\underline{x_2}$ sont colinéaires.

Démonstration :

$\underline{x_1}$, $\underline{x_2}$ sont liés $\Leftrightarrow \exists\,(\lambda, \mu) \neq (0,0)$, $\lambda\underline{x_1} + \mu\underline{x_2} = \underline{0} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{x_1} = -\frac{\mu}{\lambda}\,\underline{x_2}$

1.3 Bases

Définition : On appelle base de E toute famille libre et génératrice

théorème : Si $B = (\underline{x_1}, \underline{x_2}, ..., \underline{x_p})$ est une base de E, alors tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de $(\underline{x_1}, \underline{x_2}, ..., \underline{x_p})$.

Base canonique : Soit $\underline{e_i} = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ avec $i \in [1, n]$ (*1 est sur la ième composante*)

Soit $B = (\underline{e_1}, \underline{e_2}, ..., \underline{e_n})$, alors B est une base canonique de $\mathbb{K}^n$

Exemple :

Base canonique de $\mathbb{R}^2$: $(\underline{i}, \underline{j}) = ((1,0);(0,1))$

Base canonique de $\mathbb{R}^3$: $(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}) = ((1,0,0);(0,1,0);(0,0,1))$

1.4 Dimension d'un espace vectoriel

<u>Théorème</u> : Une famille de n vecteurs forme une base d'un espace vectoriel de dimension n si et seulement si la famille est libre

1.5 Exercices

Exercice 1

Dans $\mathbb{R}^3$, $F = ((1,1,1);(1,1,0);(1,1,3))$ F est elle une famille libre libre ou liée ?

Exercice 2

Soit l'ensemble F défini par : $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, / 2x - 3y + z = 0\, \}$

1. Montrer que F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$
2. Trouver 2 vecteurs libres de F
3. Quelle est la dimension de F

Exercice 3

Trouver une base et la dimension de l'espace vectoriel formé par les solutions du système suivant :

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ 2x + 2y - 2z = 0 \end{cases}$$

Exercice 4

$\underline{v_1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{v_2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\underline{v_3} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, et $\underline{v_4} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, forment-ils une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 5

Soit $V = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ x = y - z \text{ et } z = 2t \right\}$ Montrer que V est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, donner une base de V

Exercice 6

Soient les vecteurs $\underline{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\underline{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\underline{u_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que ces 3 vecteurs forment une base B' de $\mathbb{R}^3$
2. Soit $\underline{a}$ de coordonnées dans la base canonique $\underline{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$; trouver les coordonnées de $\underline{a}$ dans B'.

Exercice 7

Soit P_2, l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 2, tel que :

$\Big\{ P_1 : x \longmapsto 1; \quad P_2 : x \longmapsto x+5; \quad P_3 : x \longmapsto (x+5)(x+2) \Big\}$

1. Démontrer que (P_1, P_2, P_3) est une base de P_2,
2. Quel est l'ensemble des éléments P de P_2 tel que $P(-5) = 4, P(-2) = 5$ et $P(3) = 6$?

2 Application linéaire - Matrice

2.1 Application linéaire

Soit E et F deux espaces vectoriels. Soit une application $f : E \longmapsto F$,

f est une application linéaire $\Leftrightarrow \forall (x, y) \in E^2$ et $\forall\lambda \quad f(x+\lambda y) = f(x) + \lambda f(y)$.

exemple :

L'application définie par

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longmapsto & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x+y \\ y \end{pmatrix} \end{array}$$ est une application linéaire.

L'application définie par

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longmapsto & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x^2 \\ y \end{pmatrix} \end{array}$$ n'est pas une application linéaire.

Propriété : L'espace des images est un sous espace vectoriel.

En particulier :

1. A=$\left\{x \in E / f(x) = 0\right\}$ est un espace vectoriel appelé noyau de f (On le note *Ker f*)
2. B=$\left\{x \in E / f(x) = y\right\}$ est un espace vectoriel appelé image de f (On le note *Im f*)
   On appelle *rang* de f la dimension de l'espace vectoriel de *Im f*.

exemple

Soit le système suivant de 3 équations à 3 inconnues :

$$\left\{ \begin{array}{l} x+y-z=0 \\ x+2y+z=0 \\ 2x+2y-2z=0 \end{array} \right.$$

Ce système peut être interprété comme le noyau de l'application linéaire suivante

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longmapsto & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x+y-z \\ x+2y+Z \\ 2x+2y-2z \end{pmatrix} \end{array}$$ Dans cet exemple $dim(\mathit{ker} f) = 1$ (voir section 1.5)

Théorème du Rang

f est une application linéaire de $E \rightarrow F$ où E est de dimension finie. Alors $dim\, E = dim(\mathit{ker} f) + dim(\mathit{Im} f)$

Dans l'exercice précédent $dim\, E = 3$ et $dim(\mathit{ker} f) = 1$, donc $dim(\mathit{Im} f) = rang(\ f\ ) = 2$.

2.2 Matrices

Définition d'une matrice (n,p)

Soit n et p deux entiers naturels non nuls. On appelle matrice de type (n,p) tout tableau constitué de n lignes et p colonnes.

Notation :

$$M = \begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12} \dots a_{1p} \\ a_{21} \dots\dots a_{2p} \\ \vdots \dots\dots \vdots \\ a_{n1} \dots\dots a_{np} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n \text{ et } 1 \leq j \leq p}$$

Somme de deux matrices de type (n,p)

$$M = \begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12} \dots a_{1p} \\ a_{21} \dots\dots a_{2p} \\ \vdots \dots\dots \vdots \\ a_{n1} \dots\dots a_{np} \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} b_{11}\, b_{12} \dots b_{1p} \\ b_{21} \dots\dots b_{2p} \\ \vdots \dots\dots \vdots \\ b_{n1} \dots\dots a_{np} \end{pmatrix}$$

Alors $\quad M + N = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1p}+b_{1p} \\ a_{21}+b_{21} & \dots & \dots & a_{2p}+b_{2p} \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & \dots & \dots & a_{np}+b_{np} \end{pmatrix} = (a_{ij}+b_{ij})_{1 \leq i \leq n \text{ et } 1 \leq j \leq p}$

Multiplication par un scalaire

$$\lambda M = \begin{pmatrix} \lambda a_{11}\, \lambda a_{12} \dots \lambda a_{1p} \\ \lambda a_{21} \dots\dots \lambda a_{2p} \\ \vdots \dots\dots \vdots \\ \lambda a_{n1} \dots\dots \lambda a_{np} \end{pmatrix} = (\lambda a_{ij})_{1 \leq i \leq n \text{ et } 1 \leq j \leq p}$$

Base canonique

Si F est une base canonique de M_{np} alors F s'écrit $F = (E_{ij})_{1 \leq i \leq n \text{ et } 1 \leq j \leq p}$

où $E_{ij} = \begin{pmatrix} 0 \dots\dots 0 \\ \vdots \dots 1 \dots \vdots \\ 0 \dots\dots 0 \end{pmatrix}$ où 1 est sur la i^{ieme} ligne et sur j^{ieme} colonne.

Exemple : Si l'on a $M_{2,2}$

$M_{2,2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ La base canonique F s'écrit $F = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$

Produit de deux matrices

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n \text{ et } 1 \leq j \leq p}$ et $B = (b_{ij})_{1 \leq i \leq p \text{ et } 1 \leq j \leq q}$

Remarque : il faut que le nombre de colonne de A = le nombre de ligne de B.

Alors

$C = A.B$ avec $C_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$ et $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq q$

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \\ C = A.B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} & = \begin{pmatrix} 14 & 8 \\ 5 & 8 \\ 27 & 9 \end{pmatrix} \end{array}$$

Matrice d'une application linéaire

Exemple 1

La matrice M de l'application linéaire f suivante

$$f : \begin{array}{c} \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \longmapsto (3x + 2y + z, x + 5z, y + 3z) \end{array}$$

est définie par $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, ainsi on a bien $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = f((x, y, z))$

Remarque, la première colonne de M correspond à l'image de $e_1\,(1, 0, 0)$ par l'application linéaire f, (noté $f(e_1)$). La deuxième colonne correspond à $f(e_2)$...

Exemple 2

$$f : \begin{array}{c} \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2 \\ P \longmapsto (x^2 - 1)P' - 2xP \end{array}$$

Dans ce cas P est une polynôme de degré 2, l'image de P par f est aussi un polynôme de degré 2. La base des polynômes d'ordre 2 est $(1, 0, 0); (0, x, 0); (0, 0, x^2)$

On peut alors calculer $f(1, 0, 0) = -2x$, $f(0, x, 0) = -x^2 - 1$, et $f(0, 0, x^2) = -2x$

La matrice M_f de cette application linéaire s'écrit donc

$$M_f = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrice Inversible

Définition : M est inversible si et seulement si, il existe une matrice M' tel que $M.M' = I_d$, avec $I_d = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

Une matrice est inversible si le noyau de l'application linéaire est de dimension 0.

Transposition

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n \text{ et } 1 \leq j \leq p}$

On appelle transposé de A et on la note ${}^tA$ la matrice définie par ${}^tA = (b_{ij})_{1 \leq i \leq p \text{ et } 1 \leq j \leq n}$ avec $b_{ij} = a_{ji}$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i & -4 \\ 3 & 0 & -2i \end{pmatrix} \quad \text{alors} \quad {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ i & 0 \\ -4 & -2i \end{pmatrix}$$

Remarque

Si ${}^tA = A$ alors A est symétrique, par exemple $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

A est antisymétrique si $a_{ij} = -a_{ji}$, ceci impose $a_{ii} = 0$, par exemple $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -4 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

Changement de base

L'expression matricielle dépend de la base des espaces de départ et d'arrivée

Soit B et B' deux base de E, et f une application linéaire.

M et M' sont deux matrices carrées, M' est l'expression de f dans la base B', M est l'expression de f dans la base B.

On peut alors écrire : $M' = P^{-1}\, M\, P$, où P est appelée matrice de passage, de B dans B'.

Si B s'écrit $(\underline{e_1}, \underline{e_2}, \cdots \underline{e_n})$, et $B'(\underline{e'_1}, \underline{e'_2}, \cdots \underline{e'_n})$ alors,

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \underline{e'_1} & \underline{e'_2} & \cdots & \underline{e'_n} \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \underline{e_1} \\ \underline{e_2} \\ \vdots \\ \underline{e_n} \end{array}$$

Rang d'une matrice

$A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n \text{ et } 1 \leq j \leq p}$.

On appelle rang de la matrice A la dimension formé par l'espace vectoriel des p vecteurs colonnes de A.

Exemple :

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ Les vecteurs colonnes sont $\underline{x}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\underline{x}_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\underline{x}_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, on remarque que $\underline{x}_3 = \underline{x_1} + \underline{x_2}$, l'espace vectoriel formé par les vecteurs colonnes de A est de dimension 2, donc $rang\, A = 2$.

On peut en déduire le noyau de A, $Ker\, A = dim\, E - rang\, A = 3 - 2 = 1$.

2.3 Exercices

Exercice 1

Soit l'application f définie par

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longmapsto & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x + y - z \\ 2x - 4z \end{pmatrix} \end{array}$$

1. Décrivez le noyau et l'image de l'application f
2. Ecriver la matrice de f relative aux bases cononiques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2

Soit les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer $A.B$, $B.A$, et $A - 3I_d$

Exercice 3

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer M^2, puis calculer M^n

Exercice 4

Soit l'application f définie par

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3 &\longmapsto \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) &\longmapsto (2x+y; -3x-y+z; x-z) \end{aligned}$$

1. Donner la matrice M de f dans la base canonique B de $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer M^2 et M^3.
3. Factoriser $(I_d + M^3)$ et $(I_d - M^3)$.
4. En déduire que $(I - M)$ et $(I + M)$ sont inversibles.

Exercice 5

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

1. Calculer A^2, et A^3.
2. En déduire que A est inversible

Exercice 6

Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 12 \\ -1 & -1 & 16 \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 25 & -45 & 60 \\ 7 & 7 & -28 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

1. Calculer $P.Q$, en déduire que P est inversible et déterminer P^{-1}
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ Calculer $D = P^{-1}.A.P$
3. Calculer D^n
4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad A^n = P.D^n.P^{-1}$
5. En déduire A^n

Exercice 7 Inversion d'une matrice 2×2

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

En notant $M.M' = I_d$ et en posant $M' = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, exprimer x, y, z, t en fonction de a, b, c, et d.

Exercice 8

Soit la matrice $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Calculer K^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 9

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 10

Soit l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[x]$, l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur, ou égal à 2 muni de sa base canonique $((1, 0, 0), (0, x, 0), (0, 0, x^2))$

Soit l'application ϕ définie par

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_2[x] &\longmapsto \mathbb{R}_2[x] \\ P &\longmapsto 2(x+1)P(x) - (x-1)^2 P'(x) \end{aligned}$$

1. Vérifier que pour tout polynômes Q de degré inférieur où égale à 2, l'image de ce polynôme Q par l'application ϕ est bien comprise dans l'espace $\mathbb{R}_2[x]$.
2. Donner la matrice ϕ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[x]$.

Exercice 11

Soit $B = \{\underline{e_1}, \underline{e_2}\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et soit le couple de vecteur $B' = \{\underline{e'_1} = \underline{e_1} + \underline{e_2};\ \underline{e'_2} = 3\underline{e_1} - \underline{e_2}\}$

1. Monter que le couple B' est libre
2. Soit $\underline{x}$ de représentation $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique B. Quelles sont les coordonnées X' de $\underline{x}$ dans B' ?.
3. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ associée à une application linéaire f dans la base canonique B. Quelle est la matrice A' de l'application f dans la base B' ?

3 Déterminant

3.1 Determinant d'une famille de vecteur

En dimension 2

Soit $B = (\underline{e_1}, \underline{e_2})$ une base d'un espace vectoriel de dimension 2. Soit $\underline{u} = x\,\underline{e_1} + y\,\underline{e_2}$ et $\underline{v} = x'\,\underline{e_1} + y'\,\underline{e_2}$.

On appelle le déterminant de $\underline{u}$ et $\underline{v}$ dans la B le scalaire :

$$det_B(\underline{u}, \underline{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'$$

Remarque : $\underline{u}$ et $\underline{v}$ sont liés $\Leftrightarrow$ $det_B(\underline{u}, \underline{v}) = 0$

Conséquence : $\underline{u}$ et $\underline{v}$ forment une base $\Leftrightarrow$ $det_B(\underline{u}, \underline{v}) \neq 0$

Remarque : Soit deux vecteurs $\underline{u}$ et $\underline{v}$, (voir Figure 1), alors l'aire du parallélogramme $ABCD$ est donné par : $A_{ABCD} = |det_B(\underline{u}, \underline{v})|$

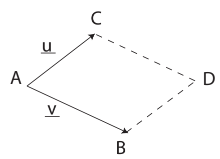

FIG. 1 –

En dimension 3

Soit $B = (\underline{e_1}, \underline{e_2}, \underline{e_3})$ une base d'un espace vectoriel de dimension 3. Soit

$\underline{u} = x_1\,\underline{e_1} + y_1\,\underline{e_2} + z_1\,\underline{e_3}$

$\underline{v} = x_2\,\underline{e_1} + y_2\,\underline{e_2} + z_2\,\underline{e_3}$

$\underline{w} = x_3\,\underline{e_1} + y_3\,\underline{e_2} + z_3\,\underline{e_3}$.

Le déterminant de $\underline{u}$, $\underline{v}$, et $\underline{w}$ dans la base B se note :

$$det_B(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

On peut le calculer par un développement sur la premiere ligne :

$$det_B(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}) = (-1)^{1+1} x_1 \begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} x_2 \begin{vmatrix} y_1 & y_3 \\ z_1 & z_3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} x_3 \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix}$$

Règle de calcul : l'exposant sur (-1) correspond à la somme du numéro de la ligne plus le numéro de la colonne, du scalaire à partir duquel le développement se fait (exemple : x_1 est sur la colonne 1 et la ligne 1).

Ce même déterminant peut être calculer (par exemple) par un développement sur la deuxième colonne :

$$det_B(\underline{u},\underline{v},\underline{w}) = (-1)^{1+2}x_2\begin{vmatrix} y_1 & y_3 \\ z_1 & z_3 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2}y_2\begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ z_1 & z_3 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3}z_2\begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}$$

Remarque : $(\underline{u},\underline{v},\underline{w})$ sont liés $\Leftrightarrow$ $det_B(\underline{u},\underline{v},\underline{w}) = 0$

Conséquence : $\underline{u}$, $\underline{v}$ et $\underline{w}$ forment une base $\Leftrightarrow$ $det_B(\underline{u},\underline{v},\underline{w}) \neq 0$

Remarque : Soit trois vecteurs $\underline{u}$, $\underline{v}$, et $\underline{w}$ (voir Figure 2), alors le volume du parallélépipède $ABCDA'B'C'D'$ est donné par : $V_{ABCDA'B'C'D'} = |det_B(\underline{u},\underline{v},\underline{w})|$. Le volume du tétraèdre ABCDE est donné par $V_{ABCDE} = \frac{1}{6}|det_B(\underline{u},\underline{v},\underline{w})|$

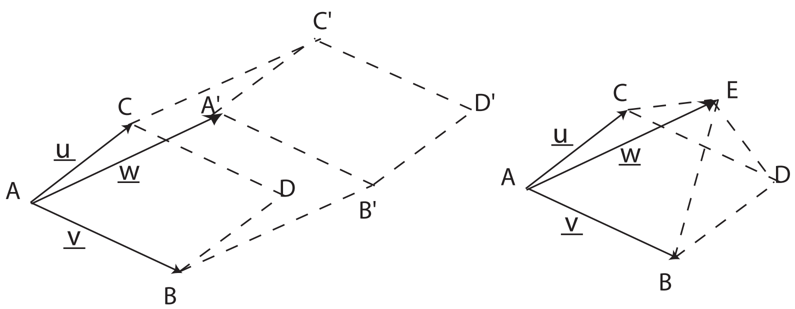

FIG. 2 –

Extension à la dimension n

Les méthodes de calcul pour une dimension n sont identiques à celle utilisées pour la dimension 2 et 3.

Exemple d'un déterminant d'une matrice 4×4 (développement par rapport à la première ligne).

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & -6 & 4 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

Cas d'une matrice triangulaire

Exemple de calcul d'un déterminant d'une matrice triangulaire (développement par rapport à la première colonne) :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 1 \times 4 \times 6 = 24$$

Généralisation $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ (0) & & a_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$

Cas d'un déterminant d'un produit de deux matrices

Soit A et B deux matrices, alors $det(A.B) = det(A).det(B) = det(B.A)$

Conséquence : Soit M la matrice d'une application linéaire f dans la base B, et M' sont écriture dans la base B'

On a $M' = P^{-1}MP$, où P est la matrice de passage. Alors

$det(M') = det(P^{-1}MP) = det(P^{-1})det(M)det(P) = det(M)det(P^{-1}P) = det(M)$

d'où $det(M') = det(M)$.

Le déterminant de la matrice d'une application linéaire, est indépendant de la base dans laquelle la matrice est écrite.

Méthode de calcul

L'addition à une ligne (respectivement à une colonne) d'une combinaison linéaire des autres lignes (respectivement des autres colonnes) ne change pas le déterminant.

Par opération linéaire, on peut donc faire apparaître un maximum de 0 pour simplifier le calcul.

Exemple

$$\begin{vmatrix} 15 & 12 \\ 25 & 24 \end{vmatrix} = 5 \times 4 \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 5 \times 4 \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = 20 \times 3 = 60$$

Dans l'exemple, on factorise la première colonne par 5, puis la seconde par 4 ; dans une seconde étape $C_1 - C_2 \mapsto C_1$.

3.2 Exercices

Exercice 1

Trouver la surface du triangle définit par $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $B \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $C \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

Puis du triangle $A'B'C'$ définit par $A' \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $B' \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $C' \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$

Exercice 2

Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$ définit par $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, $C \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$, $D \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix}$

Exercice 3

Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

Exercice 4

Soit les deux matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Calculer $det(A)$, $det(B)$, $det(A.B)$, et $det(A+B)$

Exercice 5

Calculer le déterminants suivant :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ b^2 & a^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 \end{vmatrix}$$

Montrer que $\Delta = (a^3 - b^3)^2$

Exercice 6

Calculer le déterminant suivant :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

Indication : développer par rapport à la troisième ligne, puis remarquer que Δ est un polynôme en C de degré 2 ayant a et b pour racine.

4 Système linéaire

4.1 Système d'équation - Généralité

On appelle système de n équation linéaires à p inconnues tout système de la forme suivante :

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

Interprétation matricielle :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

Alors $S \Longleftrightarrow A.X = B$

4.2 Système d'équation - Résolution par la méthode de Cramer

Système à deux inconnues

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

C'est de la forme $A.X = B$ avec

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad \text{Avec} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Résolution de (S) :

$$\begin{aligned} a_{12}L_2 - a_{22}L_1 \Longrightarrow \quad (a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22})x_1 &= b_2a_{12} - b_1a_{22} \\ x_1 &= \tfrac{b_2a_{12} - b_1a_{22}}{a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22}} \\ x_1 &= \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \qquad \text{avec} \quad det(A) \neq 0 \\ x_1 &= \tfrac{1}{det(A)} \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

De la même manière on obtient x_2 :

$$x_2 \quad = \frac{1}{det(A)} \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} \quad \text{avec} \quad det(A) \neq 0$$

Système à 3 inconnues

Soit le système suivant :

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Les solutions de système sont :

$$x_1 \quad = \frac{1}{det(A)} \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad x_2 \quad = \frac{1}{det(A)} \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \qquad x_2 \quad = \frac{1}{det(A)} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

$$\text{avec} \quad det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad det(A) \neq 0$$

4.3 Système d'équation - Inversion de la matrice A

Le système S de n équation linéaires à p inconnues suivant :

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

Peut s'écrire : $A.X = B$, avec $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$

Alors $A.X = B \quad \Leftrightarrow \quad A^{-1}.A.X = A^{-1}.B \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{X} = \mathbf{A^{-1}.B}$

Remarque A est inversible si $dim(kerf = 0$ ou $det(A) \neq 0$.

Opérations élémentaires sur les matrices

On appelle opération élémentaires sur une matrice A l'une des trois opérations suivantes :
- Multiplication d'une ligne par un scalaire non nul
- Addition à la ligne r de la ligne s multiplié par un scalaire

– Echange de deux colonnes
– *Opérations analogues sur les colonnes*

Inversion sur les matrices

Si A est une matrice inversible, alors par opérations élémentaires sur la les lignes (où colonnes), A peut-être transformée en la matrice identité. On obtient A^{-1} en effectuant les mêmes opérations sur I_d.

Exemple

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ on remarque que $det(A) \neq 0$.

alors,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I_d = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} L_2 - 2L_1 \mapsto L_2 \\ L_3 - 3L_1 \mapsto L_3 \end{array} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & -3 & -8 \end{pmatrix} \quad I_d = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_3 - 3L_2 \mapsto L_3 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad I_d = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_2 + L_3 \mapsto L_2 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad I_d = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_1 - \tfrac{3}{4}L_3 \mapsto L_2 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad I_d = \begin{pmatrix} -\frac{5}{4} & \frac{9}{4} & -\frac{3}{4} \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_1 + L_2 \mapsto L_1 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad I_d = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} -L_2 \mapsto L_2 \\ \frac{1}{4}L_3 \mapsto L_3 \end{array} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I_d = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -1 & 2 & -1 \\ \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

D'où

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -1 & 2 & -1 \\ \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

4.4 Exercices

Exercice 1

Soit le système suivant :

$$S = \begin{cases} (m-1)x + my + z = 1 \\ mx + 2y + 3z = 3 \\ (m+1)x + my + (m-1)z = m-1 \end{cases}$$

1. Déterminer les valeurs de m, pour que ce système admette une solution unique
2. Exprimer x, y, z en fonction de m *(Résoudre le système S)*

Exercice 2

Résoudre le le système suivant (méthode de Cramer) :

$$S = \begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = d \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2 \end{cases}$$

Exercice 3

Soit le système suivant :

$$S = \begin{cases} 2x + ay + z = 1 \\ x + 2ay + z = a \\ x + ay + 2z = 1 \end{cases}$$

1. Résoudre le système par la méthode du pivot
2. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ 1 & 2a & 1 \\ 1 & a & 2 \end{pmatrix}$.
   A est-elle inversible ? Pour $a \neq 0$, calculer A^{-1}. Déterminer alors par cette seconde méthode x, y, z.

24, rue Lhomond - 75231 PARIS CEDEX 05

Exercice 4

Discuter et résoudre le système, suivant les valeurs du paramètre α :

$$S = \begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ x - y + 3z = 8 \\ x + 2y - z = -3 \\ x + y + 2z = \alpha \end{cases}$$

Exercice 6

Soit la matrice A définie par $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

A est-elle inversible, si oui calculer A^{-1}

5 Diagonalisation

5.1 Introduction

Soit f une application linéaire $\begin{cases} E \to E \\ x \to f(x) \end{cases}$ et soit A sa matrice dans la base B. La résolution du système s'écrit $A.X = B$ (voir section 4)

Pour résoudre ce système on peut utiliser la méthode du pivot de Gauss afin de se ramener à un système sous la forme suivante :

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 + \cdots + a'_{1n}x_n &= b'_1 \\ 0 + a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \cdots + a'_{2n}x_n &= b'_2 \\ 0 + 0 + a'_{33}x_3 + \cdots + a'_{3n}x_n &= b'_3 \\ \ddots & \vdots \\ 0 + 0 + \cdots + 0 + a'_{nn}x_n &= b'_n \end{cases}$$

Cependant, la meilleur solution est de se ramener à un système purement diagonal :

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + 0 + 0 + \cdots + 0 &= b'_1 \\ 0 + a'_{22}x_2 + 0 + \cdots + 0 &= b'_2 \\ 0 + 0 + a'_{33}x_3 + \cdots + 0 &= b'_3 \\ \ddots & \vdots \\ 0 + 0 + \cdots + 0 + a'_{nn}x_n &= b'_n \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ Il faut trouver une base de E dans laquelle l'expression de la matrice f est plus simple que dans la base B.

Diagonaliser, c'est trouver une matrice inversible P telle que la matrice $\Delta = P^{-1}.A.P$ soit diagonale.

Alors la puissance de la matrice (voir partie 2.3) se calcule de la façon suivante : $A^n = P.\Delta.^n.P^{-1}$

5.2 Valeur Propres

1. On dit que λ est une valeur propre s'il existe $\underline{x} \in E$ tel que $f(\underline{x}) = \lambda \underline{x}$
2. On appelle spectre de f, l'ensemble des valeurs propres de f noté $S_p(f) = \left\{ \lambda \in \mathbb{K} \quad \exists \underline{x} \neq 0 \quad \text{avec} \quad f(\underline{x}) = \lambda \underline{x} \right\}$

A la recherche des valeurs propres

$$\begin{aligned} \lambda \quad \text{est une valeur propre} \quad &\Leftrightarrow \quad f(\underline{x}) = \lambda \underline{x} \\ &\Leftrightarrow \quad A.X = \lambda X \\ &\Leftrightarrow \quad (A - \lambda\, I_d).X = 0 \\ \text{donc} \quad & det(A - \lambda\, I_d) = 0 \end{aligned}$$

$P_f = det(A - \lambda I_d)$ est un polynôme du n^{ieme} degré en λ si n est la dimension de l'espace vectoriel E. Les différentes valeurs propres λ_i sont les racines du polynôme $P_f(\lambda)$.

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$det(A - \lambda I_d) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 4 \\ 3 & -4-\lambda & 12 \\ 1 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix}$$

$$det(A - \lambda I_d) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2(2-\lambda) & 4 \\ 3 & 2-\lambda & 12 \\ 1 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} \qquad C_2 \leftarrow C_2 + 2C_1$$

$$det(A - \lambda I_d) = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 12 \\ 1 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix}$$

$$det(A - \lambda I_d) = (2-\lambda)\begin{vmatrix} -4-\lambda & 0 & -20 \\ 3 & 1 & 12 \\ 1 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} \qquad L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$$

$$det(A - \lambda I_d) = (2-\lambda)\begin{vmatrix} -4-\lambda & -20 \\ 1 & 5-\lambda \end{vmatrix}$$

$$det(A - \lambda I_d) = (2-\lambda)\Big[(4-\lambda)(5-\lambda) - 20\Big]$$
$$det(A - \lambda I_d) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$$

Alors, $det(A - \lambda I_d) = 0 \quad \Rightarrow \lambda = 1$, où, $\lambda = 2$, ou $\lambda = 2$.

On note alors $S_p(A) = \Big\{0, 1, 2\Big\}$

A la recherche des vecteurs propres

λ_i sont les valeurs propres de l'application linéaire f, (c'est à dire, les valeurs λ_i sont solutions du polynôme caractéristiques $det(A - \lambda I_d) = 0$). On obtient alors le sous-espace propre des vecteurs propres $E_\lambda = ker(A - \lambda I_d)$, en résolvant le système :

$$(A - \lambda_i I_d)X_i = 0$$

Exemple :

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$, on a $S_p(A) = \Big\{0, 1, 2\Big\}$

Pour $\lambda_1 = 0$, on pose $\underline{X} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ alors, $(A - 0I_d) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rl} 2x_1 + 4x_3 & = 0 \\ 3x_1 - 4x_2 + 12x_3 & = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 & = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x_1 & = -2x_3 \\ x_2 & = \frac{3}{2}x_3 \end{array} \right.$

Un vecteur propre associée à la valeur propre $\lambda_0 = 0$ est $\underline{X_1} \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Pour $\lambda_2 = 1$ un vecteur propre est $\underline{X_2} \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Pour $\lambda_3 = 2$ un vecteur propre est $\underline{X_3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

On peut alors écrire A sous la forme $A = P.D.P^{-1}$, avec $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Remarque Dans cette exemple, A est une matrice non-inversible, mais diagonalisable.

5.3 Exercices

Exercice 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 13 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

Diagonaliser les matrices A et B, et donner leur matrice de passage P.

Exercice 2

Soit $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Diagonaliser A, puis en déduire A^n

Calculer $Lim_{n \mapsto \infty} A^n$

Exercice 3

Expliciter U_n, V_n, W_n en fonction de n, U_0, V_0, W_0 lorsque :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} U_{n+1} & = & 3U_n - V_n + W_n \\ V_{n+1} & = & U_n + V_n - W_n \\ W_{n+1} & = & 2U_n - 2V_n + 2W_n \end{array} \right.$$

On posera un vecteur $\underline{X_n} \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \\ W_n \end{pmatrix}$, le système S est alors équivalent à $X_{n+1} = A.X_n$

Exercice 4

$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

Montrer que A et B ont les mêmes valeurs propres

Montrer que A est diagonalisable, et que B ne l'est pas.

Exercice 5

Pour $k \in \mathbb{R}$, on définit l'application suivante :

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_2[x] & \rightarrow & \mathbb{R}_2[x] \\ P & \rightarrow & (x+1)xP' - 2kP \end{array} \right.$$

Pour quelles valeurs de k, Φ est-elle une application de $\mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de Φ.

6 Produit scalaire - produit vectoriel

6.1 Orientation d'un espace vectoriel

Définition Orientation de l'espace.

Soit E un espace vectoriel de dimension n. Orienter E, c'est choisir une base B de E.

Soit B' une autre base de E. On dit que :
- B' est directe lorsque $det_B B' > 0$
- B' est indirecte lorsque $det_B B' < 0$

6.2 Produit scalaire

Définition

Soit $(\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ une base orthonormale de l'espace.

Le produit scalaire des vecteurs $\underline{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\underline{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ est définit par :

$$\underline{u}.\underline{v} = xx' + yy' + zz'$$

Propriétés

Pour tout vecteurs, $\underline{u}$, $\underline{v}$, et $\underline{w}$ et pour tout réel α :

$\underline{u}.\underline{v} = \underline{v}.\underline{u}; \quad (\alpha\underline{u}).\underline{v} = \underline{u}.(\alpha\underline{v}) = \alpha(\underline{u}.\underline{v}); \quad \underline{u}.(\underline{v} + \underline{w}) = \underline{u}.\underline{v} + \underline{u}.\underline{w}$

Orthogonalité

- Deux vecteurs u̲ et v̲ sont orthogonaux si et seulement si $\underline{u}.\underline{v} = 0$.
- Un point sur une droite : soit D une droite de l'espace de vecteur directeur u̲, M et A des points de l'espace. A est le projeté orthogonal de M sur D si et seulement si A appartient à D et $\underline{AM}.\underline{u} = 0$.

Définition d'un plan

Le plan passant par le point A et de vecteur normal $\underline{n}$ est l'ensemble des points M qui vérifient : $\underline{AM}.\underline{n} = 0$

Dans un repère orthonormal, un plan P à une équation de la forme : $ax + by + cz + d = 0$, où les réels a, b, c ne sont pas tous nuls. Le vecteur $\underline{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur normal du plan.

Définition d'une sphère

Soit S une sphère de centre I et de rayon r. Soit M un point de S. On en déduit de l'égalité $IM^2 = r^2$ l'équation de la sphère.

Si on connaît les coordonnées des points A et B tels que $[AB]$ est un diamètre, alors l'équivalence $M \in S \Leftrightarrow \underline{AM}.\underline{BM} = 0$ permet de donner une équation de S.

6.3 Produit mixte

Définition

Soit E un espace vectoriel de dimension n. On appelle produit mixte des vecteurs $\underline{v_1}, \underline{v_2}, ..., \underline{v_n}$ de E leur déterminant dans une base orthonormée directe quelconque.

On le note : $det(\underline{v_1}, \underline{v_2}, ..., \underline{v_n})$, où $[\underline{v_1}, \underline{v_2}, ..., \underline{v_n}]$

Propriété

$[\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}] = 0 \Leftrightarrow \underline{u}, \underline{v}$ et $\underline{w}$ sont coplanaires

6.4 Produit vectoriel

Définition

Le vecteur $\underline{a}$ défini ci-dessous, s'appelle produit vectoriel de $\underline{u}$ et $\underline{v}$. On le note

$$\underline{a} = \underline{u} \wedge \underline{v}$$

Propriété

Pour trois vecteurs u, v et w quelconques, on a :

$$[\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}] = (\underline{u} \wedge \underline{v}).\underline{w} = \underline{u}.(\underline{v} \wedge \underline{w})$$

$\underline{u} \wedge \underline{v} = 0 \;\Leftrightarrow \underline{u}$ et $\underline{v}$ sont colinéaires

Si $\underline{u}$ et $\underline{v}$ sont non liés, alors $(\underline{u}, \underline{v}, \underline{u} \wedge \underline{v})$ forme une base directe de E

Anticommutativité : $\underline{u} \wedge \underline{v} = -\underline{v} \wedge \underline{u}$

Expression analytique du produit vectoriel

Soit $B = (\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$ une base orthonormée directe de E. En notant (x, y, z) et (x', y', z') les coordonnées respectives de $\underline{u}$ et $\underline{v}$ dans la base B, on a :

$$\underline{u} \wedge \underline{v} = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \underline{i} \; + \; \begin{vmatrix} z & z' \\ x & x' \end{vmatrix} \underline{j} \; + \; \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \underline{k}$$

Formule du double produit vectoriel

$$\underline{u} \wedge (\underline{v} \wedge \underline{w}) = (\underline{u}.\underline{w})\underline{v} - (\underline{u}.\underline{v})\underline{w}$$

Interprétation géométrique

Soient $\underline{u}$ et $\underline{v}$ deux vecteurs non liés et P le plan engendré par $\underline{u}$ et $\underline{v}$. Soit $\underline{w}$ un vecteur unitaire orientant P.

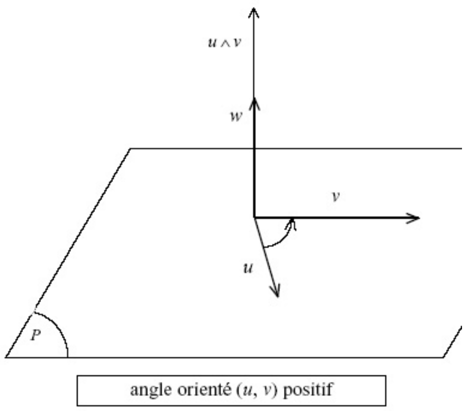

FIG. 3 –

Alors :

$$\underline{u} \wedge \underline{v} = ||\underline{u}|| \times ||\underline{v}|| sin(u, v)\underline{w}$$

Où $(\underline{u}, \underline{v})$ désigne l'angle orienté de $\underline{u}$ et $\underline{v}$ selon $\underline{w}$ dans le plan P (voir figure ci-dessous).

distance d'un point à une droite, d'un point à un plan

Soit $D = (A, \underline{u})$ et M un point, alors :

$$d(M, D) = \frac{\|\underline{AM} \wedge \underline{u}\|}{\|\underline{u}\|}$$

Soit $P(A, \underline{u}, \underline{v})$ et M un point, alors :

$$d(M, P) = \frac{|[\underline{AM}, \underline{u}, \underline{v}]|}{\|\underline{u} \wedge \underline{v}\|}$$

6.5 Exercices

Exercice

Soit $\underline{u}\begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix}$; $\underline{v}\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $\underline{w}\begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix}$

Calculer $\underline{u}.\underline{v}$, puis $\underline{u} \wedge \underline{v}$

Calculer $[\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}]$ par deux méthodes

Calculer $\underline{u} \wedge (\underline{v} \wedge \underline{w})$ par deux méthodes

Soit $A\begin{pmatrix}2\\3\\7\end{pmatrix}$ et $M\begin{pmatrix}4\\8\\-3\end{pmatrix}$;

calculer la distance de M à la droite D définit par $(A, \underline{u})$

calculer la distance de M au plan définit par $(A, \underline{u}, \underline{v})$.

7 Equations différentielles - Résolution analytique

7.1 Equations différentielles du premier ordre

7.1.1 Equations à variable séparables

Définition : On appelle équation à variable séparables tout équation différentielle qui peut se mettre sous la forme

$$a(x) + b(y)y' = 0 \qquad (1)$$

où a et b sont des applications connus.

Méthode de Résolution :
– Séparer les variables et réduire l'équation différentielle (1) sous la forme

$$b(y)\mathrm{d}y = -a(x)\mathrm{d}x$$

– Intégrer les deux termes de cette équation

$$\int b(y)\mathrm{d}y = -\int a(x)\mathrm{d}x$$

pour obtenir la solution générale

$$B(y) = A(x) + C, \qquad \text{ou} \qquad C \qquad \text{est une constante arbitraire, et}$$

$$B(y) = \int b(y)\mathrm{d}y, \qquad A(x) = -\int a(x)\mathrm{d}x$$

– Si la fonction inconnue y(x) doit satisfaire en plus la condition initiale

$$y(x_o) = y_o$$

utiliser cette condition pour éliminer la constante C de l'équation générale et obtenir ainsi la solution particulière de l'équation différentielle (1).

7.1.2 Equations linéaire du premier ordre

Définition On appelle équation linéaire du premier ordre toute équation différentielle qui peut se mettre sous la forme

$$a(x)y' + b(x)y + c(x) = 0 \qquad (2)$$

où a, b et c sont des applications continues sur des intervalles à préciser.

On appelle équation sans second membre :

$$a(x)y' + b(x)y = 0 \qquad (3)$$

Méthode de résolution
- On résout d'abord l'équation linéaire sans second membre (c'est une équation à variable séparable)
- On détermine une solution particulière de (2).
- Les solutions générales de (2) s'obtiennent en ajoutant les solutions de l'équation sans second membre, et la solution particulière trouvée de (2).

Détermination de la solution particulière par la méthode dite de variation de la constante

Sur un intervalle où a ne s'annule pas, soit D une primitive de $\frac{b(x)}{a(x)}$. Les solution de (3) sont de la forme

$$y = Ce^{-D(x)} \qquad \text{où} \quad C \quad \text{est une constante}$$

On suppose que la solution particulière y_o de (2) est de la forme $y_o = Ce^{-D(x)}$ où C cette fois est une fonction de x, c'est à dire $y_o = C(x)e^{-D(x)}$

7.2 Equations différentielles linéaire du second ordre

7.2.1 Equation sans second membre

Définition On appelle équation différentielle linéaire du second ordre à coefficient constants sans second membre toute équation différentielle qui peut se mettre sous la forme :

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad (5)$$

où a,b, et $c \in \mathbb{C}$, et $a \neq 0$.

Définition On appelle polynôme caractéristique de l'équation (5), le polynôme $P = aX^2 + bX + c$. On note discriminant de l'équation (5), le réel $\Delta = b^2 - 4ac$

Propriété Avec les notations précédentes,
- Si $\Delta > 0$ et si r_1 et r_2 sont les racines de P alors les solutions de (5) sont de la forme : $y = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
- Si $\Delta = 0$ et si r est la racine double de P alors les solutions de (5) sont de la forme : $y = (\lambda x + \mu)e^{rx}$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
- Si $\Delta < 0$ et si $r_1 = \alpha + \beta i$ et $r_2 = \alpha - \beta i$ sont les racines de P alors les solutions de (5) sont de la forme : $y = e^{\alpha x}(\lambda \cos \beta x + \mu \sin \beta x)$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

7.2.2 Equation avec second membre de type exponentielle-polynôme

Définition On appelle équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants avec second membre de type exponentielle-polynôme tout équation différentielle qui peut se mettre sous le forme :

$$ay'' + by' + cy = f(x) \qquad (6)$$

où a,b, et $c \in \mathbb{C}$, et $a \neq 0$ et f est une somme de fonctions de la forme $Q(x)e^{mx}$ où $m \in \mathbb{C}$ et $Q \in \mathbb{C}[X]$.

Méthode de résolution De la même façon que les équations linéaires du premier ordre, on résout d'abord l'équation sans second membre, on détermine ensuite une solution particulière y_o, la solution générale de (6) s'obtient en ajoutant la solution de l'équation sans second membre et la solution particulière y_o.

Détermination de la solution particulière

- Si $f(x) = Q(x)$ avec Q polynôme de degré n alors une solution particulière de (6) est de la forme $y_o = R(x)$ où R est un polynôme de degré n si $c \neq 0$, de degré $n+1$ si $c = 0$ et $b \neq 0$, de degré $n+2$ si $c = 0$ et $b = 0$.
- Si $f(x) = Q(x)e^{mx}$ avec Q polynôme de degré n alors une solution particulière de (6) est de la forme $y_o = R(x)e^{mx}$ où R est un polynôme de degré n si m n'est pas racine du polynôme caractéristique, de degré $n+1$ si m est une racine simple du polynôme caractéristique, de degré $n+2$ si m est une racine double du polynôme caractéristique.

7.3 Exercices

1. Résoudre :
$$xy' + 2y = 3x$$
2. Résoudre :
$$y'sin(x) - ycos(x) = sin(x) - xcos(x)$$
3. Résoudre :
$$y'cos(x) - ysin(x) = -cos^3(x)$$
4. Résoudre :
$$xy' - y = x$$
5. Résoudre :
$$(1 - x^2)y' - xy = x^2$$
6. Résoudre :
$$y'' + 9y = x + 3$$
7. Résoudre :
$$y'' - 3y' + 2y = xe^{-x}$$
8. Résoudre :
$$y'' + y'tan(x) - ycos^2(x) = 0 \quad \text{en posant } t = sin(x)$$

